J3M

Jornada da Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática

09 a 13 de novembro de 2026

CADERNO DE RESUMOS 10ª J3M

PET|MAT
Programa de Educação Tutorial - Matemática
Universidade Federal do Paraná

DMAT - UFPR

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Caderno de Resumos

J3M 10ª Edição - 2026

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

JORNADA DA MATEMÁTICA,
MATEMÁTICA APLICADA E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PET Matemática UFPR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Comissão Organizadora

Tutor:	Prof. Dr. Cleber de Medeira
Estudantes:	Alisson Gabriel Struz Ana Carla de Carvalho Honório Felipe Monteiro Kiotheka Gabriela Saki Kunii Guilherme de Lima Sampaio Gustavo Guimarães de Souza Heitor Rodrigo da Silva Giacomozzi Katrine Goulart Habkoste Kaue Novaki João Lucas Bisoni Lucas Petry Melissa Coelho França Bini Miguel Augusto Vialich Nicolas da Verça Scholze Pedro Henrique Andrade Pedro Lascowski Laguna Samuel Henrique Gomes Velez Benito Tiago Filipe Pires Galu
Site do Evento:	https://petmatematica.ufpr.br/j3m
Data do Evento:	9 a 13 de novembro de 2026
Local de Realização:	Centro Politécnico da UFPR,
	Curitiba, novembro de 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Sumário

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução **ii**

1 Álgebra **1**

Anéis de Baer e de Rickard
João Vitor Roseira 2

Aritmética Modular e Introdução à Criptografia
Estela de Cássia Valentim 5

Caracteres de Representações
Felipe Monteiro Kiotheka 9

Classificações de Álgebras de Cluster e Mutações de Quivers
Kaue Novaki João 12

Curvas Planas e o Teorema de Bézout
João Vinícius Zuaretch
João Vitor Roseira 15

Dois (Teoremas) em Teoria Algébrica dos Números: Minkowski, Unidades e Dirichlet
Kaue Novaki João
Miguel Augusto Vialich 18

Dos Números Complexos aos Quatérnios e Suas Aplicações em Rotações
Ana Paula Duda
Gustavo Neves 21

VERSÃO PROVISÓRIA

Equivalência Categórica Entre Conjuntos Pré-Ordenados e Espaços de Alexandrov
Ana Carla de Carvalho Honório 25
Generalizando Ternos Pitagóricos
Roger Henrique Maldaner 28
Introdução às Álgebras de Código
Samuel Henrique Gomes Velez Benito 30
O Teorema de Lagrange
Daniel Gottardi Peres 34
Os Teoremas de Sylow: Um Estudo na Teoria de Grupos
Vinícios Gabriel Positz Haiduk 36
Torne-se Livre e Seja Adjunto do Esquecimento
Ana Carla de Carvalho Honório 39
Uma Caracterização para Duas Classes de Funções Definidas Sobre Álgebras Alternativas
Camilly Silva dos Anjos 42

2 Análise e Equações Diferenciais 45
A Compacidade das Bolas Fechadas em Espaços Normados de Dimensão Infinita
Gileade Trentin Detogni 46
A Extensão Analítica da Função ζ de Riemann
Pedro Lascowski Laguna 49
A Transformada Discreta de Fourier e uma Aplicação em Processamento de Imagens Digitais
Lucas dos Santos 52
A Trasformada de Fourier de Distribuições Periódicas
Daniel Thiago Ivanchechen 56
Exponencial de Matrizes e o Método de Putzer
Luiz Henrique Bahls
Ruan Eneias Ferreira 59

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Números Racionais e Irracionais: Irracionalidade e Transcendência de π
Daniel Galvão Tibães 63
Um Estudo Sobre a Irracionalidade e Transcendência de e
Gustavo Guimarães de Souza 66
Uma Introdução ao Oscilador de Duffing
Celestia Piccioni 69
Uma Introdução às Séries de Fourier
Luiza Soethe Avila 73
Versões Multidimensionais do Teorema de Rolle e a Conjectura de Furi e Martelli
Ana Caroline da Silva 75

3 Análise Numérica **78**
Fundamentos de Álgebra Linear para Análise de Componentes Principais (PCA)
Júlia Menegildo 79
Método de Newton: Formulação, Convergência e Aplicações em Múltiplas Dimensões
Gabriela Saki Kunii 82
Métodos ENO e WENO para Problemas Hiperbólicos
Lucas Bisoni 85

4 Educação Matemática **89**
"Em Fração": Desenvolvimento de um Jogo Matemático com Alunos de Ensino Médio
Guilherme de Lima Sampaio 90
(Des)Plastificando a Matemática pela Geometria Espacial
Allan Christian Reinbold
Luiz Fernando da Silva
Marcela Carvalho de Souza 94

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

A Afetividade no Ensino de Matemática: Um Relato de Experiência no Ensino Médio do IFPR
Katrine Goulart Habkoste 97
A Matemática a "Conta-Gotas": Análise Curricular da Formação Inicial de Professores Multidisciplinares
Nicolas da Verça Scholze 101
A Matemática do Adugo e Mancala Awele para Idosos
Poliana Pereira Palhano 106
Análise da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em um Vaivém
Matheus Urias Rohling Bruno 110
Aprendizagem da Matemática Financeira no Contexto da Educação Financeira: Análise de Fatores Cognitivos e Emocionais à Luz da Neuroeducação na Educação Básica e na Formação Inicial de Professores.
Erik Carolo Martins 114
Conhecimento Matemático para o Ensino: Análise de Práticas Docentes no Estágio Supervisionado
Rafael Ademar Lanser 117
Elaboração da Situação Desencadeadora de Aprendizagem "A Caixa de Sabão em Pó"
Ana Julia Endler
Gabriel Bressan Sizenando
Wanderson dos Santos Rodrigues 121
Geometria Fractal: Uma Abordagem para o Ensino Médio
Juliane Radikowski de Souza 125

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Geometria Plana no Exame Nacional do Ensino Médio: uma proposta de análise para aprendizagem
Gustavo Martini
Renan Brito de Araujo
Robert Soldati Pereira
Weslley da Silva 129

Geometria Plana: Um Estudo Paralelo Entre as Abordagens Cartesiana e Vetorial
Lucas Petry 133

Ilha Limpa, Futuro Sustentável: A Matemática Como Ferramenta de Transformação
Fernanda Cristini Moreira Rodrigues 136

Investigando Medidas Padronizadas e Não Padronizadas: Uma Sequência Didática para o 5º ano do Ensino Fundamental
Ana Lara do Nascimento Schiamanski
Anna Gabryelle de Souza Ferreira
Rayana Luiza Tavares da Costa
Vandressa Ribeiro 139

Letramento Matemático e Cidadania: A Importância da Matemática Ambiental na Educação Básica
Duyller Alves da Silva
Erik Carolo Martins 143

O Ensino de Frações pelo Summamutikka: Um Olhar pela Hermenêutica de Profundidade
Katrine Goulart Habkoste 146

O Uso de Fractais no Ensino da Matemática: Possibilidades Pedagógicas na Educação Básica e Superior
Kamilly Souza Suave 149

O uso da Inteligência Artificial na Graduação em Matemática: Um Estudo com Graduandos da UNESPAR – Campus Paranaguá
Daniel Gomes do Nascimento 152

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Simetria, Arte e Cultura: Uma Experiência com Máscaras Africanas no Ensino de Matemática
Karolyna da Silva Batista
Maria Eduarda Soldati Razera 154
Sistema de Numeração Posicional Balanceado: Possibilidades para a Educação Básica
Thiago Lucas da Silva 157
Um Mapeamento de Pesquisas Sobre Fracasso Escolar em Matemática
Nicolas da Verça Scholze 161
Uma Investigação Sobre o Instrumento de Avaliação Carta para a Tia
Emanuela Gonçales Lopes Rodrigues 165
Uma investigação sobre o uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino da álgebra em colégios do litoral paranaense
Davi Farias Paes
Maria Eduarda Soldati Razera 169
Utilizando o Dominó de Equações para a Revisão de Conceitos Algébricos no Ensino Médio: Interação Pedagógica Desenvolvida Durante o Estágio Supervisionado de Matemática
Wanderson dos Santos Rodrigues 172
Vivências e Aprendizado Durante o Estudo de Práticas de Professoras Pedagogas que Ensinam Matemática em EJA
Eduarda Rodrigues Gomes Veloso 176

5 Geometria e Topologia **179**
Ações de Grupo Contínuas e Módulos Cruzados Topológicos
Pedro Henrique Andrade 180

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Análise Geométrica do Pêndulo de Foucault: Transporte Paralelo e Curvatura
Joao Vitor Silveira Ribeiro 183
Grafos de Cayley e Crescimento de Grupos: Uma Abordagem Geométrica
João Pedro de Castilho Bonini 186
O Monopólo de Dirac: Interpretação Geométrica Via Fibrados Principais
João Carlos Gomes Garcia 189
O Teorema de Hopf-Rinow para Variedades Riemannianas
Tiago Filipe Pires Galu 192
Teorema de Poincaré
Pedro Carvalho Igreja 194
Teoria de Morse e Classificação de Superfícies
Felipe Monteiro Kiotheka 197
Um Estudo Sobre Transformações de Möbius
Marcello Capilé Luiz 201
Uma Introdução à Aritmética das Curvas Elípticas
Miguel Augusto Vialich 204

6 Otimização **207**
Análise Comparativa do Desempenho do Método do Gradiente para Problemas de Otimização Irrestrita com Diferentes Métodos de Busca Linear
Gabriel Manhães da Cruz 208
Cálculo Variacional: Condição Necessária e Suficiente para Caracterização da Ciclóide no Problema da Braquistrócona
Carlos Eduardo Dias 212
Criação de Famílias Sintéticas via IPF e Otimização Inteira
Vitória Caroline Blau 216

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Fadiga Cognitiva e Ganho Acumulado em Sessões Prolongadas de Estudo: Modelagem Matemática e Determinação Experimental do Limiar de Interrupção
Carlos Eduardo Raymond de Paula Ramos 219
Otimização Contínua Aplicada
Sabrina Morgan 223

7 Projetos Matemáticos **226**
2º PG PLAY: Uso de Jogos de Tabuleiro para o Engajamento da Matemática na Educação Básica
Jamilly Yasmin Borgato Lodovirge
Jean Gabriel Warenhuk dos Santos
Peterson Luiz do Nascimento da Silva 227
A Matemática que Acolhe: Uma Experiência de Extensão com Crianças em Acolhimento Institucional
Augusto Henrique da Costa
Camila Rios
Mariah Fragallo Ihlenfeldt
Sibeli da Rosa da Rocha 231
ARReMat: Enfoque Lúdico no Ensino da Matemática
Jamilly Yasmin Borgato Lodovirge
Jean Gabriel Warenhuk dos Santos
Peterson Luiz do Nascimento da Silva 234

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Desinvisibilizando Saberes e Corpos: Mulheres da Limpeza e a Universidade Pública
Andressa Balestrin Dasenbrock
Camilly Silva dos Anjos
Isabele Andrade Vichinieski
Marcel Henrique Gonçalves Sobrinho
Mariah Fragallo Ihlenfeldt
Mateus Adiers
Poliana Pereira Palhano
Rafaela Riemi Marynowski Hachiya 238
Detetives da Baía
Caroline de Morais Ferreira Carmo
Flávio Samuel Amorim Terra Ribeiro
Isabela Tavares Gomes Santana 242
Detetives do Consumidor: Matemática, Educação Financeira e Defesa dos Direitos nas Compras
Jéssica Souza da Cunha 245
Formação de Professores da EJA na Matemática
Alexandre Caetano de Oliveira Teixeira
Amanda Aparecida Sarote
Poliana Pereira Palhano 248
Instrumentos de Avaliação em Matemática: Um Estudo sobre “Carta para a Tia” no Licenciar
Amanda Grütter Jacon
Camila Rios
Emanuela Gonçales Lopes Rodrigues
Luiz Felipe Bezerra
Melissa Coelho França Bini 251
Matemática em Movimento: Exposição Itinerante de Matemática e o Aprendizado Lúdico na Educação Básica
Jamilly Yasmim Borgato Lodovirge
Jean Gabriel Warenhuk dos Santos
Peterson Luiz do Nascimento da Silva 255

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Memórias Matemáticas
Angélica Maria Pinheiro de Lara
Bruno Bonassoli
Igor Chemberg Ayub
João Vitor de Almeida
José Divaldo Xavier da Silva
Luiza Tomielo Paraizo
Maria Paula de Lara de Paula
Nicolas da Verca Scholze 259
Mulheres, Educação Financeira e Autonomia Econômica no Litoral do Paraná
Karolyna da Silva Batista
Marjory Castelhone Camargo 262
Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM)
Carolina Maíza de Rezende Marcos
Kauan Alves de Oliveira
Luis Eduardo Vitorino Gonçalves
Luis Filipe Nazaré Lopes
Matheus Dias da Silva
Melissa Coelho França Bini 265
POTI/TOPMAT - Programa de Treinamento Olímpico em Matemática
Arthur Massarolo Santos
Camila Rios
Felipe Pucineli Valla
João Gabriel Marques dos Santos
Luis Felipe Nazaret Lopes 269

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Semana da Matemática 2026
Alisson Gabriel Struz
Ana Carla de Carvalho Honório
Augusto Henrique da Costa
Daniel Thiago Ivanchechen
Felipe Monteiro Kiotheka
Gabriela Saki Kunii
Guilherme de Lima Sampaio
Gustavo Guimarães de Souza
Katrine Goulart Habkoste
Kaue Novaki João
Lucas Bisoni
Luis Filipe Nazaret Lopes
Miguel Augusto Vialich
Nicolas da Verça Scholze
Pedro Henrique Andrade
Pedro Lascowski Laguna
Samuel Henrique Gomes Velez Benito
Tiago Filipe Pires Galu 272

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

XXI Brincando de Matemático: Uma Experiência de Ensino e Aprendizagem
Alisson Gabriel Struz
Ana Carla de Carvalho Honório
Daniel Thiago Ivanchechen
Felipe Monteiro Kiotheka
Gabriela Saki Kunii
Guilherme de Lima Sampaio
Gustavo Guimarães de Souza
Katrine Goulart Habkoste
Kaue Novaki João
Lucas Bisoni
Luis Filipe Nazaret Lopes
Miguel Augusto Vialich
Nicolas da Verça Scholze
Pedro Henrique Andrade
Pedro Lascowski Laguna
Samuel Henrique Gomes Velez Benito
Tiago Filipe Pires Galu 275

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

Prezada leitora, prezado leitor,

É com grande satisfação que apresentamos o Caderno de Resumos da 10ª edição da Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática (J3M), evento idealizado, organizado e coordenado pelos estudantes do grupo PET Matemática da UFPR.

A J3M surgiu com o propósito de promover um espaço de divulgação e discussão de trabalhos de Iniciação Científica nas diferentes áreas da Matemática. Ao longo de suas edições, vem se consolidando como um importante espaço de intercâmbio acadêmico entre os integrantes do PET Matemática, estudantes e professores do Curso de Matemática da UFPR e de outras instituições de ensino superior.

Alcançar a décima edição representa um marco importante na trajetória da J3M. Ao longo desses anos, o evento tem contribuído para a formação acadêmica de muitos estudantes que participaram de suas atividades, oferecendo oportunidades para apresentar pesquisas, compartilhar conhecimentos e estabelecer diálogos com a comunidade matemática. A cada edição, a J3M reafirma e amplia seu papel como um importante espaço de divulgação científica de trabalhos em Matemática desenvolvidos em nível de graduação, valorizando a pesquisa e incentivando o envolvimento dos estudantes com a produção científica.

Nesta edição, teremos mais de 80 trabalhos apresenta-

dos, abrangendo as áreas de Educação Matemática, Álgebra, Análise Matemática, Equações Diferenciais, Geometria, Topologia, Análise Numérica, Otimização e Projetos. As bancas de avaliação, compostas por docentes e estudantes de pós-graduação da UFPR, contribuem para garantir a qualidade e o rigor acadêmico das apresentações. Como forma de reconhecimento e incentivo à produção acadêmica, são concedidas distinções aos trabalhos mais bem avaliados.

Agradecemos a todos os integrantes do grupo PET Matemática pela dedicação e pelo empenho na organização desta edição da J3M. Agradecemos também aos professores e estudantes de pós-graduação pelo trabalho realizado nas bancas de avaliação. Por fim, registramos nosso reconhecimento à Direção do Setor de Ciências Exatas, ao Departamento de Matemática e à Coordenação do Curso de Matemática pelo apoio e pela colaboração fundamentais para a realização deste evento.

Prof. Dr. Cleber de Medeira
Tutor do PET Matemática - UFPR
Novembro de 2026

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Álgebra

Comissão Científica:

Em breve!

Banca Avaliadora:

Em breve!

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Anéis de Baer e de Rickard

João Vitor Roseira*
24001709@uepg.br

João Vinícius Zuaretch†
25002509@uepg.br

Giuliano Gadioli La Guardia (Orientador)‡
gguardia@uepg.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre os anéis de Baer e Rickart, classes definidas por propriedades relacionadas aos anuladores e elementos idempotentes. Analisamos a relação entre a propriedade de Rickart e a projetividade dos ideais principais à direita, bem como o fato de que anéis de endomorfismos de módulos semissimples são Baer. Também são estudadas a estabilidade dessas propriedades em subanéis da forma eRe e a caracterização dos anéis de Baer por meio da propriedade de Rickart e da completude de um reticulado de ideais. Por fim, mostramos que, sob a hipótese de finitude ortogonal, todo anel right Rickart é Baer. Esses resultados evidenciam as conexões entre anuladores, módulos, idempotentes e estruturas de reticulados na teoria de anéis.

Palavras-chave: Anéis de Baer; Anéis de Rickart; Módulos; Anuladores; Idempotentes.

Introdução

Os anéis de Baer e Rickart constituem classes importantes de anéis definidas por propriedades relacionadas aos seus anuladores e elementos idempotentes. Essas propriedades estabelecem conexões naturais com a teoria de módulos, especialmente por meio de módulos projetivos, módulos semissimples e anéis de endomorfismos.

Enquanto a propriedade de Baer considera os anuladores à direita de subconjuntos arbitrários, a propriedade de Rickart considera os anuladores à direita de elementos.

*Universidade Estadual de Ponta Grossa. Graduando do Bacharelado em Matemática Aplicada. Bolsista PROPet e Voluntário PROVIC.

†Universidade Estadual de Ponta Grossa. Graduando do Bacharelado em Matemática Aplicada. Voluntário PROVIC.

‡Univerisdade Estadual de Ponta Grossa, Professor Doutor do departamento de matemática e estatística.

VERSÃO PROVISÓRIA

Essa diferença permite investigar condições sob as quais essas propriedades se relacionam e, em determinadas situações, tornam-se equivalentes.

Neste trabalho, estudamos essas relações com base nos resultados de Birkenmeier, Park e Rizvi (2013), utilizando Lam (1999) como referência para conceitos fundamentais da teoria de módulos. São abordados resultados sobre anéis de endomorfismos de módulos semissimples, módulos projetivos e a estrutura dos ideais principais à direita gerados por idempotentes.

Além disso, analisamos a caracterização dos anéis de Baer por meio de anéis Rickart e reticulados completos, bem como a influência da finitude ortogonal na relação entre essas duas classes de anéis.

Resultados Principais

Seja R um anel. Para um subconjunto $X \subseteq R$, definimos o anulador à direita e o anulador à esquerda, respectivamente, por

$$r_R(X) = a \in R \mid xa = 0,\ \forall x \in X \tag{1}$$

e

$$\ell_R(X) = a \in R \mid ax = 0,\ \forall x \in X. \tag{2}$$

Definição 1. *Um anel R é chamado Baer se, para todo subconjunto $X \subseteq R$, existe um idempotente $e \in R$ tal que $r_R(X) = eR$.*

Definição 2. *Um anel R é chamado right Rickart se, para todo $a \in R$, existe um idempotente $e \in R$ tal que$r_R(a) = eR$.*

Assim, todo anel Baer é right Rickart, pois a condição de Baer aplicada aos subconjuntos unitários a fornece a condição de Rickart. Quando um anel é simultaneamente right e left Rickart, ele é denominado *Rickart* [1]. Desta maneira, propriedade de Rickart pode ser caracterizada por meio da estrutura dos ideais principais à direita.

Proposição 1. *Um anel R é right Rickart se, e somente se, aR é um módulo projetivo para todo $a \in R$.*

Portanto, a propriedade de Rickart pode ser interpretada como uma condição de projetividade dos ideais principais à direita [1]. Outra conexão fundamental ocorre entre módulos semissimples e anéis de endomorfismos.

Teorema 1. *O anel de endomorfismos de um módulo semissimples é Baer.*

Esse resultado é o Teorema 3.1.3 de [1]. Assim, se M_R é semissimples, então $\mathrm{End}_R(M)$ é um anel de Baer. Em particular, para um espaço vetorial V sobre um corpo F, $\mathrm{End}_F(V)$ é um anel de Baer. A propriedade de Baer também é preservada pela passagem a subanéis determinados por idempotentes.

Teorema 2. *Se R é um anel de Baer, então eRe é um anel de Baer para todo $e^2 = e \in R$.*

Esse é o Teorema 3.1.8 de [1]. Analogamente, a propriedade de Rickart possui a mesma estabilidade.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema 3. *Se R é um anel right Rickart, então eRe é um anel right Rickart para todo $e^2 = e \in R$.*

O resultado acima corresponde ao item (i) do Teorema 3.1.22 de [1]. Para estabelecer a conexão entre as propriedades de Baer e Rickart e a estrutura de reticulado, considere

$$\mathcal{L}(R) = eR \mid e^2 = e \in R. \tag{3}$$

Definição 3. *Um conjunto parcialmente ordenado é chamado de reticulado completo quando todo subconjunto possui supremo e ínfimo.*

A completude de $\mathcal{L}(R)$ permite caracterizar a propriedade de Baer a partir da propriedade de Rickart.

Teorema 4. *Seja R um anel e seja $\mathcal{L}(R) = eR \mid e^2 = e \in R$. Então são equivalentes:*

i) R é um anel de Baer;

ii) R é Rickart e $\mathcal{L}(R)$ é um reticulado completo sob a inclusão.

Esse é o Teorema 3.1.23 de [1]. O resultado mostra que a propriedade de Baer pode ser decomposta em duas condições: a propriedade de Rickart, relacionada aos anuladores de elementos, e a completude de $\mathcal{L}(R)$, que permite tratar conjuntos arbitrários de elementos.

Para anéis regulares, essa caracterização assume uma forma mais simples.

Proposição 2. *Seja R um anel regular. Então são equivalentes:*

i) R é um anel de Baer;

ii) o conjunto dos ideais principais à direita de R forma um reticulado completo sob a inclusão.

Esse resultado corresponde ao Corolário 3.1.24 de [1]. Finalmente, consideramos uma condição de finitude que fornece uma implicação direta entre Rickart e Baer.

Definição 4. *Um anel R é chamado ortogonalmente finito quando não possui uma família infinita de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais.*

Teorema 5. *Todo anel right Rickart ortogonalmente finito é Baer.*

Esse resultado é o Teorema 3.1.25 de [1]. Portanto, sob a hipótese de finitude ortogonal,

$$R \text{ right Rickart} \quad \Longrightarrow \quad R \text{ Baer}. \tag{4}$$

Os resultados apresentados estabelecem uma sequência de conexões entre as estruturas estudadas. A propriedade de Rickart está relacionada à projetividade dos ideais principais à direita; módulos semissimples produzem anéis de endomorfismos Baer; a propriedade de Baer é caracterizada pela propriedade de Rickart juntamente com a completude de um reticulado de ideais; e, sob a hipótese de finitude ortogonal, a propriedade de Rickart já implica a propriedade de Baer.

Referências

[1] BIRKENMEIER, Gary; PARK, J. Keol; RIZVI, S. Tariq. **Extensions of Rings and Modules**. New York: Springer, 2013.

[2] LAM, T. Y. **Lectures on Modules and Rings**. Berlin: Springer, 1999.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Aritmética Modular e Introdução à Criptografia

Estela de Cássia Valentim *
estelacassiavalentim@gmail.com

Marciano Pereira (Orientador)†
marciano@uepg.br

Resumo

Códigos secretos e mensagens codificadas remontam aos primórdios da comunicação escrita e estão relacionados a contextos militares e de investigação. Porém, nas últimas décadas, houve um aumento de interesse no tema devido à necessidade de proteger as informações enviadas em ambientes digitais, como comunicações pela internet e serviços bancários, tornando a criptografia cada vez mais importante. A criptografia RSA é um dos principais sistemas de criptografia assimétrica, desenvolvido por Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman em 1977. Seu funcionamento se fundamenta em conceitos da Aritmética Modular, como a congruência e o inverso multiplicativo módulo n. Neste trabalho, compreenderemos os fundamentos matemáticos do algoritmo RSA e sua aplicação na codificação de mensagens. Como aplicação prática dos conhecimentos adquiridos, foi desenvolvido um programa na linguagem Python capaz de automatizar as etapas de pré-codificação, criptografia e descriptografia de mensagens. Os resultados demonstraram a importância da Aritmética Modular como base da criptografia RSA, bem como sua aplicação na segurança digital.

Palavras-chave: congruência modular, linguagem Python, criptografia RSA.

Introdução

A criptografia RSA é um dos principais sistemas de criptografia assimétrica, desenvolvido por Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman em 1977. Atualmente, é amplamente utilizada para garantir a confidencialidade e a autenticidade das informações enviadas em ambientes digitais, como comunicações pela internet, serviços bancários e lojas on-line. O funcionamento do algoritmo RSA se fundamenta em conceitos da Aritmética Modular. Sua construção envolve propriedades de congruência,

*Colégio e Curso Dynâmico. Estudante do Ensino Médio. Voluntária do programa PIBIC-JR.
†UEPG. Professor doutor em Matemática, DEMAT.

VERSÃO PROVISÓRIA

inverso multiplicativo módulo n, números primos, Pequeno Teorema de Fermat e o Teorema Chinês dos Restos. Esses possibilitam a geração de um par de chaves: uma pública, utilizada para a criptografia das mensagens, e uma chave privada, empregada na recuperação da mensagem original. A segurança do sistema está relacionada à dificuldade computacional de fatorar números inteiros muito grandes obtidos pelo produto de dois números primos. Além do estudo teórico, foi desenvolvido um programa na linguagem Python para implementar o algoritmo RSA, automatizando as etapas de pré-codificação, criptografia e descriptografia de mensagens, proporcionando uma aplicação prática dos conceitos estudados.

Aritmética Modular

Iniciamos nosso estudo introduzindo os conceitos de Aritmética Modular e congruência [3] por meio de exemplos cotidianos, como o calendário e a prova dos nove. Em seguida, definimos que um inteiro a é congruente a um inteiro b módulo n, $n > 1$, quando a diferença entre a e b é um múltiplo de n, denotado por $a \equiv b \bmod n$.

Em seguida, estabelecemos o conceito de inverso multiplicativo [1, 3], onde um inteiro a admite um inverso multiplicativo módulo n se existe um inteiro a' tal que $a \cdot a' \equiv 1 \bmod n$, sendo a' o inverso de a módulo n. Além disso, demonstramos que a possui inverso multiplicativo se, e somente se, a e n forem primos entre si, isto é, não possuírem nenhum divisor comum maior do que 1, $\mathrm{mdc}(a, n) = 1$. Nesse contexto, também estudamos os teoremas clássicos da Aritmética Modular, como o Pequeno Teorema de Fermat e o Teorema Chinês dos Restos [1, 3], que simplificam a resolução das congruências e possuem um papel importante no algoritmo RSA.

Criptografia RSA

Com base nessas propriedades da Aritmética Modular, demos início ao estudo do sistema de criptografia RSA [1, 2], analisando como os conceitos de congruência e inverso multiplicativo são empregados na construção do algoritmo. Inicialmente, a mensagem passa por uma etapa de pré-codificação, na qual é convertida em uma sequência numérica de acordo com um alfabeto previamente estabelecido. Na Figura 1, é apresentada a tabela de conversão utilizada neste trabalho, na qual cada letra é associada ao respectivo valor numérico utilizado na etapa de codificação.

Figura 1: Tabela de Conversão.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35

Fonte: COUTINHO, S. C.

Em seguida, são escolhidos dois números primos distintos, p e q, ambos congruentes a 5 módulo 6. A partir desses valores, define-se $n = p \cdot q$, que determina o módulo utilizado na criptografia e o limite superior dos valores dos blocos b, para os quais $0 < b < n$. Concluída a etapa de pré-codificação, inicia-se o processo de codificação propriamente dito.

Para realizar a codificação da mensagem, utilizam-se os parâmetros n e e, sendo e o expoente de codificação, fixado em $e = 3$ a fim de simplificar os cálculos. O par (n, e) constitui a chave pública do sistema RSA, podendo ser divulgado a qualquer usuário que deseje enviar uma mensagem criptografada. Para cada bloco b, tal que $0 < b < n$, calcula-se o resto da divisão de b^3 por n, obtendo-se o bloco criptografado $C(b)$.

Concluída a etapa de codificação, iniciamos o processo de decodificação das mensagens. Para isso, utiliza-se a chave privada, composta pelo par (n, d). O valor de d corresponde ao inverso multiplicativo do expoente de codificação $e = 3$ módulo $(p-1) \cdot (q-1)$, isto é, satisfaz a congruência $3d \equiv 1 \bmod (p-1) \cdot (q-1)$. Diferente da chave pública, a chave privada deve ser mantida em sigilo, pois seu conhecimento permite a recuperação da mensagem original. A segurança do algoritmo RSA nasce da dificuldade computacional de fatorar o número n em seus fatores primos p e q, tornando computacionalmente difícil obter a chave privada a partir da chave pública.

A decodificação é realizada individualmente sobre cada bloco criptografado $C(b)$. Para recuperar o bloco original, calcula-se o resto da divisão de $C(b)^d$ por n. Após a decodificação de todos os blocos, a sequência numérica resultante é transformada novamente em letras por meio da tabela de conversão utilizada na etapa de pré-codificação, reconstruindo a mensagem original.

Implementação da Criptografia em Python

Como aplicação dos conceitos estudados, desenvolvemos um programa na linguagem Python [5] capaz de automatizar o processo de criptografia e descriptografia de mensagens, usando conhecimentos de Python que aprendemos quando participamos do Projeto de Extensão Programa de Pensamento Matemático e Computacional [4], oferecido pelo DEMAT – UEPG em 2025. O sistema permite ao usuário inserir uma mensagem em texto, convertê-la para a representação numérica correspondente, escolher os números primos p e q, realizar a codificação dos blocos e decodificar utilizando a chave privada, retomando a mensagem original.

Dessa forma, foi possível aplicar, de maneira prática, os conceitos de Aritmética Modular estudados ao longo da pesquisa, demonstrando sua importância na área da criptografia.

Conclusão

Com este trabalho, pudemos compreender a relevância da Aritmética Modular para a implementação da criptografia RSA. Além de ampliar os conhecimentos sobre os conceitos matemáticos envolvidos, a pesquisa permitiu estabelecer uma conexão entre a Matemática e a Computação por meio da programação do algoritmo RSA na linguagem Python. Dessa forma, vimos que conceitos matemáticos que eram abstratos possuem aplicações práticas de grande importância no nosso cotidiano digital, especialmente no contexto da segurança das comunicações e da proteção de dados.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] COUTINHO, S. C. **Criptografia**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Apostila 7 Programa de Iniciação Científica OBMEP)

[2] COUTINHO, S. C. **Números Inteiros e Criptografia RSA**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Coleção Matemática e Aplicações)

[3] HEFEZ, A. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Apostila 1 Programa de Iniciação Científica OBMEP)

[4] SANTOS, M. A.; BRANDELERO, V.; PEREIRA, M. **Programa de Pensamento Matemático e Computacional**. Anais do 44º SEURS. A Extensão em defesa da vida: territórios em diálogo. Curitiba: UTFPR, 2026.

[5] VALENTIM, E. C. **Criptografia RSA: Aplicação em Python**. Google Colab, 2026. Disponível em: `https://colab.research.google.com/drive/11y5MdODdKgdmncBqzrmcljUCggVIPR_R?usp=sharing`. Acesso em: 31 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Caracteres de Representações

Felipe Monteiro Kiotheka*
felipe.kiotheka@ufpr.br

Marcelo Muniz Silva Alves (Orientador)†
marcelomsa@ufpr.br

Resumo

A teoria das representações de grupos constitui uma importante área da álgebra, pois permite estudar estruturas abstratas por meio de transformações lineares e matrizes. Nesse contexto, os caracteres de representações surgem como ferramentas capazes de concentrar informações relevantes sobre uma representação em funções definidas sobre o grupo em um corpo. O objetivo deste trabalho é apresentar os conceitos fundamentais relacionados aos caracteres de representações de grupos finitos.

Palavras-chave: representações de grupos, caracteres, representações irredutíveis, ortogonalidade, funções de classe.

Introdução

As representações de grupos nos ajudam a trazer a estrutura de um grupo para um ambiente mais controlado e conhecido. Nesse caso, o ambiente são os operadores lineares de um espaço vetorial que, quando é de dimensão finita, identificamos com o espaço de matrizes. A seguir, definimos representações e seus morfismos.

Definição. Dado um corpo $\mathbb{K}$ e um grupo G, um homomorfismo de grupos $\varphi : G \to GL(V)$ é chamado de *representação* se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. A dimensão de V é chamada de *dimensão da representação*.

Definição. Dadas $\mathbb{K}$-representações $\varphi : G \to GL(V)$ e $\psi : G \to GL(W)$, chamamos $f : V \to W$ de *morfismo de representação* se, para todo $g \in G$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad f \quad} & U \\ {\scriptstyle \varphi_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_g} \\ V & \xrightarrow[\quad f \quad]{} & U \end{array} .$$

*UFPR. Discente da graduação. Bolsista do PET Matemática UFPR.
†UFPR. Docente do Departamento de Matemática UFPR.

Quando f admite um morfismo $g : W \to V$ tal que $gf = id_V$ e $fg = id_W$ dizemos que f é uma *equivalência*, que φ e ψ são *equivalentes* e denotamos $\varphi \sim \psi$.

Nosso objetivo nesse trabalho é estudar as representações de dimensão finita de grupos finitos. Vamos enunciar um resultado importante que reduz o estudo dessas representações para finitas representações irredutíveis de dimensão finita.

Em geral, dizer que uma representação é irredutível não necessariamente implica que podemos decompor ela em soma direta de representações irredutíveis. A volta é sempre verdade. Mas, sob hipóteses específicas, essas condições são equivalentes.

Teorema (Teorema de Maschke). Se G é grupo finito e $\mathbb{K}$ é um corpo tal que $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ ou $\operatorname{char} \mathbb{K} \nmid |G|$, então toda representação é *completamente redutível*, isto é, podemos escrever ela como soma direta de representações irredutíveis.

Esse teorema pode ser demonstrado usando as ferramentas de representações (Rezk, 2020, p. 7) mas também decorre de uma situação mais geral. A cada representação de grupo corresponde uma álgebra que, sobre essas hipóteses, é semissimples (Drozd, 1980, p. 118). E, usando o Teorema de Wedderburn-Artin, mostra-se esse resultado.

A partir daqui, todos os corpos $\mathbb{K}$ citados serão subcorpos algebricamente fechados de $\mathbb{C}$ e os grupos vamos supor finitos. Então, pelo Teorema de Maschke, todas as representações de grupos finitos em $\mathbb{K}$-espaços vetoriais são completamente redutíveis. E esse é o nosso ponto de partida.

Definição. Dada uma representação $\varphi : G \to GL(V)$ de dimensão finita, definimos o caracter $\chi_\varphi : G \to \mathbb{K}$ dela por $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g)$

Por exemplo, se $\varphi : G \to GL(V)$ é uma representação de dimensão 1, então $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = [\varphi_g]$, em que os colchetes são as coordenadas em uma base de V. É fácil ver que $\chi_\varphi = [\varphi] : G \to \mathbb{K}^\times$ é um homomorfismo de grupos e, nessa situação, o caracter é equivalente à própria representação.

Apesar de no exemplo anterior, a soma de homomorfismos não ser um homomorfismo de grupos e, logo, falhar em ser uma representação, o resultado ainda é o caracter de alguma representação. Basta notar que as propriedades de linearidade do traço nos da uma ótima candidada de representação que admite tal caracter. Essa observação sugere definirmos o seguinte conjunto.

Definição. Denotamos por $L(G) = \{f : G \to \mathbb{K}\}$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido do produto hermitiano

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

E chamamos de $L^C(G) = \{f : G \to \mathbb{K} \mid f(hgh^{-1}) = f(g), \forall g, h \in G\}$ o subespaço das *funções de classe*.

Note que, em particular, caracteres são funções de classe pois o traço de um operador é preservado por conjugação.

Resultados Principais

Com isso, enunciamos a primeira relação de ortoganalidade entre caracteres.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema (Primeira Relação de Ortogonalidade). Sejam φ e ψ representações irredutíveis de G, então

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\psi \rangle = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \varphi \sim \psi; \\ 0 & , \text{ se } \varphi \nsim \psi. \end{cases}$$

Ou seja, os caracteres de representações irredutíveis não equivalentes forma um subespaço ortogonal de $L^C(G)$. Já, com isso, conseguimos concluir que existem apenas finitas representações dessa forma, visto que $L^C(G)$ tem dimensão finita e limitada por $|G|$.

E um resultado direto da aplicação do teorema. Dada uma representação qualquer, a relação de ortogonalidade nos da uma forma de calcular a quantidades de fatores de um certo irredutível que essa representação admite.

Proposição. Se φ é uma representação e $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^s$ é uma lista completa de representações irredutíveis não equivalentes entre si de G, então

$$\varphi \sim m_1\lambda^1 \oplus m_2\lambda^2 \oplus \cdots \oplus m_s\lambda^s$$

onde $m_k = \langle \chi_\varphi, \chi_{\lambda^k} \rangle$.

Aqui, o caracter se mostra como um invariante completo por isomorfismos. Esse resultado também vale mais geralmente para álgebras semissimples (Drozd, 1980, p. 41).

Corolário. Se φ e ψ são representações então $\chi_\varphi = \chi_\psi$ se, e somente se, $\phi \sim \psi$.

A primeira relação de ortogonalidade já nos diz que os caracteres dessas representações formam um conjunto ortonormal. Agora, o próximo teorema nos diz exatamente a quantidade de representações e que são o suficiente para que o conjunto de seus caracteres se torne uma base.

Teorema. Seja $\lambda^1, \ldots, \lambda^s$ lista completa de representações irredutíveis não equivalentes entre si de G e escreva $\chi_k = \chi_{\lambda^k}$. Então $\chi_1, \ldots, \chi_s$ é uma base ortonormal de $L^C(G)$ e s é a quantidade de classes de conjugação de G.

Com isso, concluímos que o estudo de representações de dimensão finita de grupos finitos se reduz a estudar as finitas representações irredutiveis não equivalentes que ele admite. E essa quantidade também é bem conhecida.

Referências

DROZD, Y. A.; KIRICHENKO, V. V. **Finite Dimensional Algebras**. Kiev: Kiev State University, 1980.

REZK, C. **NOTES ON FINITE GROUP REPRESENTATIONS**. Illinois: University of Illinois, 2020.

VERSÃO PROVISÓRIA

Classificações de Álgebras de Cluster e Mutações de Quivers

Kaue Novaki João*
kauenovaki2@gmail.com

Ana Clara Garcia Elsener (Orientadora)†
ana.elsener@ufpr.br

Resumo

Neste trabalho, serão exploradas classificações de álgebras de cluster, estruturas algébricas geradas por um processo de mutação, partindo de uma dupla formada por um conjunto de variáveis e um quiver, essa dupla é chamada de seed inicial. Mais especificamente, o foco do trabalho reside em explorar álgebras de cluster onde o quiver da seed inicial é extraído de diagramas de uma família específica de nós.

Palavras-chave: Álgebras de Cluster, Quivers, Nós, Mutações.

Introdução

As álgebras de cluster surgiram no início dos anos 2000, a partir do trabalho de Fomin e Zelevinsky (2002). A motivação inicial veio do estudo de sistemas de raízes de grupos de Coxeter, em particular da tentativa de entender as bases duais canônicas e as variedades de Flag.

Fomin e Zelevinsky perceberam que, ao definir um processo combinatório de *mutação* que transforma conjuntos de variáveis (chamados "clusters") por meio de algumas relações polinomiais, era possível gerar estruturas algébricas com propriedades interessantes; em particular, garante-se que todas as variáveis geradas pelo processo de mutação podem ser expressas como polinômios de Laurent com coeficientes inteiros em um cluster inicial.

O processo de mutação mencionado é definido do seguinte modo: uma seed inicial é uma dupla $(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$ que consiste de:

- $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, chamada de *cluster inicial*, é a n-upla de variáveis de $\mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$.

*UFPR. Estudante do curso de bacharelado em matemática e Bolsista do Programa de Educação Tutorial.
†UFPR. Professora Doutora do Departamento de Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

- **Q** é um quiver de n vértices sem loops nem 2-cíclos.

Uma *mutação de seed* μ_k na direção k transforma a seed $(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$ numa nova seed $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) = (\mathbf{x}', \mathbf{Q}')$ da seguinte maneira:

- **x**′ é obtido de **x** ao substituir a variável de cluster associada a k por uma nova variável, ou seja, **x'** $= (\mathbf{x} - \{x_k\}) \cup \{x'_k\}$, onde x'_k é dado por

$$x_k x'_k = \prod_{i \to k} x_i + \prod_{k \to i} x_i$$

  em que o primeiro produtório passa pelas flechas de Q que terminam em k e o segundo passa pelas flechas de Q que começam em k.

- O quiver **Q**′ é obtido de **Q** seguindo os passos:

  1. para cada caminho $i \to k \to j$, adicione um caminho $i \to j$;
  2. inverta a orientação de todas as flechas que começam ou terminam em k;
  3. remova qualquer 2-ciclo que o passo 1 criou.

Definição: Seja $\mathcal{X}$ o conjunto de todas as variáveis de cluster obtidas por mutações de $(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$. A *álgebra de cluster* $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$ é a $\mathbb{Z}$-subálgebra de $\mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$ gerada por $\mathcal{X}$.

Definição: Dizemos que dois quivers **Q** e **Q**′ são *mutação equivalentes* se existe uma sequência finita de mutações que transforma um no outro. Nesse caso, escrevemos $\mathbf{Q} \sim \mathbf{Q}'$.

Definição: Uma álgebra de cluster $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$ é dita:

- de tipo finito se o número de variáveis de cluster geradas pelo processo de mutação em $(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$ é finito;
- de tipo mutação finito se o número de quivers que são mutação equivalentes à **Q** é finito;
- de tipo acíclico se **Q** for mutação equivalente a um quiver sem ciclos orientados.

Resultados Principais

Nesse trabalho, iremos explorar classificações de álgebras de cluster, começaremos com exemplos relacionados com a teoria clássica como os casos Dynkin e de superfície (SCHIFFLER, 2018). Finalmente, como resultado inédito na literatura, estudaremos as classes de mutação onde o quiver da seed inicial é extraído de um nó. Para isso, vamos exibir definições básicas sobre nós:

Definição: Um nó é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ que é homeomorfo a um círculo. Um diagrama K de um nó é a projeção do nó no plano. Essa projeção é injetiva a menos de finitos pontos, chamados de *cruzamentos*.

Dado um diagrama K de um nó, chamemos de K_0 o conjunto dos cruzamentos e K_1 o conjunto dos segmentos. Queremos definir uma álgebra de cluster associada ao

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

diagrama, e para isso precisamos definir o quiver associado ao diagrama. Usaremos a definição adotada por Schiffler e Banzier-Matte (2022).

Defina o quiver $\mathbf{Q}$ de adjacência a de um diagrama K de um nó da seguinte maneira: o conjunto de vértices $\mathbf{Q}_0$ de $\mathbf{Q}$ é o conjunto de segmentos K_1 de K, e o conjunto de flechas $\mathbf{Q}_1$ de $\mathbf{Q}$ é definido como segue. Existe uma flecha $i \to j$, onde $i, j \in \mathbf{Q}_0$ se e somente se:

- os segmentos i e j se encontram em um cruzamento p;
- os segmentos i e j delimitam a mesma região R;
- seguindo no sentido horário em p, passamos por i, então R e então j.

Dada essa definição do quiver de adjacência, o foco do trabalho se volta a família dos nós 2-bridge, definidos por Adams e Laudghlini (2002) como segue.

Definição: Um nó é um nó 2-bridge que tem um diagrama onde existem dois arcos distintos, cada um passando por sequências de cruzamentos, e qualquer cruzamento do diagrama está em uma dessas sequências. Esses arcos são chamados de pontes do diagrama.

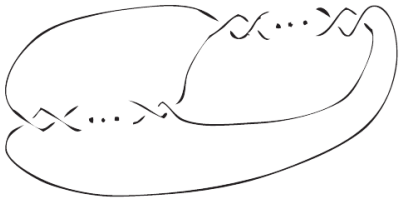


Figura 1: Exemplo de nó 2-bridge

O objetivo do trabalho é explorar a classificação das álgebras de cluster onde o quiver da seed inicial é o quiver de adjacência de um diagrama de um nó 2-bridge.

1 Referências

ADAMS, F.; LAUDGHLINI, G. **On the Classification of Rational Knots**. 2002. Disponível em: https://arxiv.org/abs/math/0212011.

FOMIN, S.; ZELEVINSKY, A. **Cluster Algebras I**: Foundations. Journal of the American Mathematical Society, v. 15, n. 2, p. 497-529, 2002.

SCHIFFLER, R.; BANZIER-MATTE, V. **Knot theory and cluster algebras**. Advances in Mathematics, v. 408, 108609, 2022.

SCHIFFLER, R. **Cluster Algebras from Surfaces**. In: ASSEM, I.; TREPODE, S. (Eds.). Homological Methods, Representation Theory, and Cluster Algebras. Cham: Springer, 2018. (CRM Short Courses). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-74585-5_3.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Curvas Planas e o Teorema de Bézout

João Vitor Roseira*
24001709@uepg.br

Giuliano Gadioli La Guardia (Orientador)†
gguardia@uepg.br

João Vinícius Zuaretch‡
25002509@uepg.br

Resumo

O Teorema de Bézout é um resultado fundamental na Geometria Algébrica que estabelece uma estimativa precisa para a cardinalidade da intersecção entre curvas algébricas planas. No plano afim K^2, o teorema garante que duas curvas de graus n e m sem componentes comuns se intersectam em no máximo $n \cdot m$ pontos. Ao estender o estudo para o plano projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sobre o corpo dos números complexos e considerar a multiplicidade de intersecção, o resultado atinge a igualdade estrita $\sum I(P, F \cap G) = n \cdot m$. Este trabalho apresenta a formalização algébrica do Teorema de Bézout por meio do uso de resultantes de polinômios, motivando a construção do plano projetivo e exemplificando sua aplicação na demonstração do Teorema do Hexágono de Pascal.

Palavras-chave: Geometria Algébrica, Teorema de Bézout, Curvas Planas, Plano Projetivo, Resultante de Polinômios, Teorema de Pascal.

Introdução

O estudo das curvas algébricas planas constitui um dos pilares da geometria moderna. Ao analisar a intersecção de curvas no plano afim real $\mathbb{R}^2$, deparamos-nos frequentemente com limitações geométricas e algébricas: retas paralelas não se encontram e certas equações não possuem soluções reais. Para contornar essas assimetrias, introduzem-se o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ adicionando os pontos no infinito e o fechamento algébrico do corpo base.

*Universidade Estadual de Ponta Grossa. Graduando do Bacharelado em Matemática Aplicada. Bolsista PROPet e Voluntário PROVIC.

†Universidade Estadual de Ponta Grossa, Professor Doutor do departamento de matemática e estatística.

‡Universidade Estadual de Ponta Grossa. Graduando do Bacharelado em Matemática Aplicada. Voluntário PROVIC.

Do ponto de vista algébrico, uma curva afim é definida como o conjunto de zeros $V_K(f) \subseteq K^2$ de um polinômio $f(X,Y) \in K[X,Y]$. A determinação da cardinalidade do conjunto $V_K(f) \cap V_K(g)$ para polinômios de graus n e m exige ferramentas estruturais do anel de polinômios, em especial o conceito de resultante de dois polinômios, que traduz a existência de fatores comuns ao determinante de Sylvester.

O Teorema de Bézout unifica tais conceitos ao demonstrar que, na ausência de componentes irredutíveis comuns, a quantidade de pontos de intersecção afins é limitada superiormente pelo produto dos graus $n \cdot m$. Quando formulado no plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, o teorema estabelece uma igualdade exata ao somar as multiplicidades de intersecção de todos os pontos, inclusive os do infinito. O objetivo deste trabalho é apresentar a formalização do Teorema de Bézout via teoria de resultantes e destacar sua relevância prática através da demonstração do Teorema do Hexágono de Pascal.

Resultados Principais

A formalização do Teorema de Bézout requer a introdução da resultante de polinômios, ferramenta chave para detectar fatores comuns.

Definição 1 (Resultante de Polinômios)**.** *Seja D um domínio e sejam $f(X) = a_0X^n + \cdots + a_n$ e $g(X) = b_0X^m + \cdots + b_m$ polinômios em $D[X]$ com $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$ de graus $n, m \geq 1$. A resultante de f e g, denotada por $R_{f,g}$, é o determinante da matriz de Sylvester de ordem $(m+n) \times (m+n)$ formada pelos coeficientes de f e g.*

A propriedade central da resultante estabelece que $R_{f,g} = 0$ se, e somente se, $f(X)$ e $g(X)$ possuem um fator comum de grau ≥ 1 no corpo de frações de D.

Definição 2 (Plano Projetivo)**.** *O plano projetivo $\mathbb{P}^2(K)$ sobre um corpo K é o conjunto de todas as retas de K^3 que passam pela origem. Um ponto em $\mathbb{P}^2(K)$ é representado por coordenadas homogêneas $[x:y:z] \neq [0:0:0]$, onde $[x:y:z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ para qualquer $\lambda \in K^*$.*

Com esses conceitos preliminares, enunciamos o Teorema de Bézout no ambiente afim.

Teorema 1 (Teorema de Bézout no Plano Afim)**.** *Seja K um corpo e sejam $f(X,Y), g(X,Y) \in K[X,Y]$ polinômios de graus $n \geq 1$ e $m \geq 1$, respectivamente. Se $f(X,Y)$ e $g(X,Y)$ não possuem fator comum em $K[X,Y]$, então:*

$$\#(V_K(f) \cap V_K(g)) \leq n \cdot m$$

A demonstração consiste em efetuar uma mudança linear de coordenadas $f_1(X,Y) = f(X, Y+\beta X)$ e $g_1(X,Y) = g(X, Y+\beta X)$ para garantir que ordenadas distintas correspondam a pontos distintos. Em seguida, a resultante $R_{f_1,g_1}(Y)$ produz um polinômio não nulo em $K[Y]$ de grau no máximo $n \cdot m$, cujas raízes limitam o número de intersecções.

No plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, utilizando os polinômios homogeneizados $F(X,Y,Z)$ e $G(X,Y,Z)$, o Teorema de Bézout toma sua forma completa:

$$\sum_{P \in V_{\mathbb{C}}(F) \cap V_{\mathbb{C}}(G)} I(P, F \cap G) = n \cdot m$$

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

onde $I(P, F \cap G)$ denota a multiplicidade de intersecção no ponto P.

Como aplicação direta do teorema na geometria projetiva, apresenta-se a demonstração do clássico resultado de Pascal.

Teorema 2 (Teorema do Hexágono de Pascal)**.** *Sejam $P_1, \ldots, P_6$ seis pontos distintos sobre uma cônica irredutível C. Se as retas P_1P_2 e P_4P_5 se intersectam em Q_1, as retas P_2P_3 e P_5P_6 em Q_2, e as retas P_3P_4 e P_6P_1 em Q_3, então os pontos Q_1, Q_2, Q_3 são colineares.*

A demonstração utiliza uma combinação linear de equações de retas $g(X, Y) = l_1l_3l_5+\mu l_2l_4l_6$ de grau 3, ajustando μ para conter um ponto auxiliar $A \in C$. Pelo Teorema de Bézout, como a cônica f (de grau 2) e g compartilham 7 pontos, f deve dividir g, resultando em $g = f \cdot h$, onde h é uma reta de grau 1 contendo necessariamente os pontos Q_1, Q_2, Q_3.

Referências

[1] ROTMAN, Joseph J. **Advanced Modern Algebra.** Providence: American Mathematical Society, 2010.

[2] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de Álgebra.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[3] VAINSENCHER, Israel. **Introdução às Curvas Algébricas Planas.** Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Dois (Teoremas) em Teoria Algébrica dos Números: Minkowski, e Unidades de Dirichlet

Kaue Novaki João*
kauenovaki2@gmail.com

Miguel Augusto Vialich†
miheelt@gmail.com

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)
giseleteixeira@ufpr.br

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é entender como estruturas algébricas e construções geométricas podem ser utilizadas para explorar propriedades dos corpos numéricos e seus inteiros. Nesta apresentação, pretendemos abordar dois teoremas clássicos da teoria algébrica de números que estão fortemente relacionados, o Teorema de Minkowski e o Teorema das Unidades de Dirichlet, além de oferecer alguns exemplos de aplicações em curvas algébricas e problemas de aritmética. Estes resultados revelam, de modo por vezes inesperado, como reticulados no $\mathbb{R}^n$ estão atrelados a problemas aritméticos e à estrutura do grupo das unidades de um anel de inteiros de um corpo numérico, mostrando o quão despretensiosamente bela pode ser a teoria algébrica de números.

Palavras-chave: reticulados; Teorema de Minkowski; Teorema das Unidades de Dirichlet.

Introdução

A teoria algébrica de números pode ser entendida tanto como a aplicação de conceitos e métodos de diversas estruturas algébricas na Teoria de Números quanto como o estudo dos *números algébricos*, isto é, os elementos de uma extensão algébrica sobre $\mathbb{Q}$.

Naturalmente, entender mais acerca das estruturas algébricas internas de um corpo numérico revela relações entre os elementos que o compõem, ou seja, números algébricos e, em particular, aqueles que possuem um papel parecido com o

*UFPR. Graduando em bacharelado em matemática. Bolsista do Programa de Educação Tutorial.
†UFPR. Graduando em bacharelado em matemática. Bolsista do projeto PICME.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

dos inteiros na reta real, os *inteiros algébricos*. Os números algébricos, por sua vez, revelam como os números complexos se distribuem, construindo uma teoria que tem impacto sobre diversas áreas da matemática.

Este trabalho direciona a atenção ao grupo das unidades do anel dos inteiros de um corpo numérico que, pelo teorema central a ser apresentado, é um grupo abeliano finitamente gerado.

Resultados Principais

Definição 1. Sejam $e_1, ...e_m$ vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^n$, com $m \leq n$. O subgrupo aditivo de $(\mathbb{R}^n, +)$ gerado por $e_1, ..., e_m$ é dito um *reticulado* de dimensão m gerado por $e_1, ..., e_m$.

Um conjunto de muita importância associado a um reticulado é seu domínio fundamental, definido como segue.

Definição 2. Seja R um reticulado de dimensão m no $\mathbb{R}^n$, com $m \leq n$, gerado por $e_1, ..., e_m$. O *domínio fundamental* correspondente T consiste de todos os elementos $a_1e_1 + ... + a_me_m, a_i \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a_i < 1$.

Teorema 1 (Minkowski). Seja R um reticulado n-dimensional no $\mathbb{R}^n$ com domínio fundamental T, e seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, simétrico e convexo. Se

$$v(X) > 2^n v(T)$$

onde v denota o volume do conjunto, então X contém um ponto não nulo de R.

O Teorema de Minkowski nos fornece uma ferramenta muito poderosa para argumentar sobre a existência de pontos de um reticulado dentro de um conjunto. Esse argumento é uma peça fundamental na demonstração do Teorema das Unidades de Dirichlet, mas, para enunciarmos esse teorema, precisamos definir alguns conceitos adicionais, como por exemplo o dos espaços $\mathbb{L}^{st}$.

Definição 3. Seja $K = \mathbb{Q}(\theta)$ um corpo numérico de grau n, onde θ é um inteiro algébrico e sejam $\sigma_1, ..., \sigma_n$ os monomorfismos de K para $\mathbb{C}$. Se $\sigma_i(K) \subset \mathbb{R}$, ou seja, se $\sigma_i(\theta) \in \mathbb{R}$, dizemos que σ_i é um *monomorfismo real*. Caso contrário, dizemos que σ_i é um *monomorfismo complexo*.

Como a conjugação nos complexos é um automorfismo de $\mathbb{C}$, segue que se $\sigma_i : K \to \mathbb{C}$ é um monomorfismo, então o mapa $\overline{\sigma}_i : K \to \mathbb{C}$ também é um monomorfismo, ou seja, $\overline{\sigma}_i = \sigma_j$ para algum j. Como $\sigma_i = \overline{\sigma}_i$ se e somente se σ_i for real, sempre teremos um número par de conjugados complexos. Assim,

$$n = s + 2t$$

onde s é o número de monomorfismos reais e $2t$ é o número de monomorfismos complexos. Vamos padronizar a numeração de modo que o conjunto dos monomorfismos $K \to \mathbb{C}$ seja

$$\sigma_1, ..., \sigma_s; \sigma_{s+1}, \overline{\sigma}_{s+1}, ..., \sigma_{s+t}, \overline{\sigma}_{s+t}$$

onde $\sigma_1, ..., \sigma_s$ são monomorfismos reais e o resto complexos.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Com isso, defina

$$\mathbb{L}^{st} = \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t,$$

ou seja, seus elementos são as $(s+t)$-uplas $(x_1, ..., x_s; x_{s+1}, ..., x_{s+t})$, onde $x_1, ..., x_s \in \mathbb{R}$ e $x_{s+1}, ..., x_{s+t} \in \mathbb{C}$. Considere também o mapa $\sigma : K \to \mathbb{L}^{st}$ da seguinte forma:

$$\sigma(a) = (\sigma_1(a), ..., \sigma_s(a); \sigma_{s+1}(a), ..., \sigma_{s+t}(a)), \forall a \in K.$$

Definimos $l : \mathbb{L}^{st} \to \mathbb{R}^{s+t}$ da seguinte maneira. Se $x = (x_1, ..., x_s; x_{s+1}, ..., x_{s+t}) \in \mathbb{L}^{st}$, escreva

$$l_k(x) = \begin{cases} \log |x_k|, \ k = 1, ..., s \\ \log |x_k|^2, k = s+1, ..., s+t \end{cases}$$

Então $l(x) = (l_1(x), l_2(x), ..., l_{s+t}(x))$.

Agora, seja U o grupo das unidades de $\mathcal{O}$, o anel dos inteiros de um corpo numérico K. Restringindo o homomorfismo definido anteriormente a um homomorfismo $l : U \to \mathbb{R}^{s+t}$, pode-se provar o seguinte teorema:

Teorema 2. O kernel W do mapa $l : U \to \mathbb{R}^{s+t}$ é o conjunto de todas as raízes da unidade em U. Além disso, esse é um grupo cíclico finito de ordem par.

E, finalmente:

Teorema 3 (Teorema das Unidades de Dirichlet). Seja $\mathcal{O}$ o anel dos inteiros de um corpo numérico K. O grupo U das unidades de $\mathcal{O}$ é isomorfo a

$$W \times \mathbb{Z}^r$$

onde W é o kernel do mapa $l : U \to \mathbb{R}^{s+t}$, e tem-se $r = s + t - 1$ produtos diretos de $\mathbb{Z}$.

Referências

[1] MILNE, J. S. **Algebraic Number Theory**. Disponível em: https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ant.html. Acesso em: 02/09/2026.

[2] STEWART, I.; TALL, D. **Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem**. Boca Raton: CRC Press, 2025.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

DOS NÚMEROS COMPLEXOS AOS QUATÉRNIOS E SUAS APLICAÇÕES EM ROTAÇÕES

Ana Paula Duda *
24001401@uepg.br

Gustavo Neves †
23002401@uepg.br

Marciano Pereira (Orientador)‡
marciano@uepg.br

Resumo

As rotações constituem transformações fundamentais em diferentes áreas da Matemática, podendo ser representadas por diferentes estruturas algébricas. As rotações no plano podem ser representadas naturalmente por meio dos números complexos, cuja estrutura algébrica motiva a construção dos quatérnios para o estudo de rotações no espaço tridimensional. Este trabalho investiga a representação de rotações no espaço tridimensional por meio de quatérnios, relacionando sua construção algébrica à descrição geométrica por eixo e ângulo. Em particular, para uma rotação em torno de um eixo unitário, é construído o quatérnio associado e estudada sua ação sobre vetores. Como aplicação, considera-se a utilização de quatérnios na descrição e composição de movimentos de um cubo mágico.

Palavras-chave: quatérnios, rotações, números complexos, eixo, ângulo.

Introdução

As rotações podem ser descritas por diferentes representações algébricas e geométricas. No plano, os números complexos $\mathbb{C}$ fornecem uma forma natural de representar rotações. Se $z \in \mathbb{C}^*$, então sua forma trigonométrica é dada por $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, em que $r = |z|$ e θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) são o módulo e o argumento de z, respectivamente. A multiplicação por um número complexo de módulo unitário $e^{i\theta}$ corresponde geometricamente a uma rotação de ângulo θ [4]. Essa relação entre uma operação algébrica e uma transformação geométrica motiva a busca por uma construção análoga para rotações no espaço tridimensional.

*UEPG. Graduanda de Licenciatura em Matemática. Voluntária do PROVIC.
†UEPG. Graduando de Licenciatura em Matemática. Voluntário.
‡UEPG. Professor Doutor, DEMAT.

Os Quatérnios

A construção dos quatérnios está relacionada à extensão dos números complexos. Os quatérnios, propostos por William Rowan Hamilton [1, 2], formam um conjunto denotado por $\mathbb{H}$, que é escrito na forma

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

em que as unidades imaginárias i, j e k satisfazem as relações fundamentais

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{2}$$

A partir disso, tem-se em $\mathbb{H}$ duas operações naturalmente bem definidas, a soma e a multiplicação. Entretanto, diferentemente dos números complexos, segue da relação acima que a multiplicação nos quatérnios não é comutativa.

Um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ pode ser decomposto em sua parte real $q_0 = \mathrm{Re}(q) \in \mathbb{R}$, e sua parte imaginária $\mathbf{q} = \mathrm{Im}(q) = q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Assim, escrevemos

$$q = q_0 + \mathbf{q}. \tag{3}$$

O *conjugado* de q é definido por

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k = q_0 - \mathbf{q}, \tag{4}$$

e sua *norma* é dada por

$$\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \tag{5}$$

Para um quatérnio q unitário ($\|q\| = 1$), pode-se mostrar que $\overline{q} = q^{-1}$, ou seja, seu conjugado é igual ao seu inverso multiplicativo.

Um quatérnio $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}^*$ pode ser representado na sua forma trigonométrica. De

$$\left(\frac{q_0}{\|q\|}\right)^2 + \left(\frac{\|\mathbf{q}\|}{\|q\|}\right)^2 = 1,$$

segue que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\cos\theta = \frac{q_0}{\|q\|} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\|\mathbf{q}\|}{\|\mathrm{q}\|}.$$

Então

$$q = \|q\|\cos\theta + \frac{\|q\|\operatorname{sen}\theta}{\|\mathbf{q}\|}\mathbf{q} = \|q\|\left(\cos\theta + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\operatorname{sen}\theta\right).$$

Essa estrutura algébrica permite que um quatérnio q, $\|q\| = 1$, possa ser utilizado para representar uma rotação no espaço tridimensional.

Rotações por Quatérnios

É bem conhecido o uso de matrizes para fazer rotações tanto no plano como no espaço [2]. Neste seção vamos descrever como fazer rotações em $\mathbb{R}^3$ por meio de quatérnios puros.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Pode-se considerar que um vetor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ pode ser tratado como um quatérnio $p \in \mathbb{H}$ cuja parte real é zero, isto é, p é um quatérnio puro. De fato, denotando por $\mathcal{I}(\mathbb{H})$ o subespaço vetorial dos quatérnios puros, pode-se provar [2] que a aplicação $\varphi : \mathcal{I}(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(q_1 i + q_2 j + q_3 k) = (q_1, q_2, q_3)$ é um isomorfismo linear.

Assim, dado um quatérnio $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos\theta + \mathbf{u}\,\mathrm{sen}\,\theta$ um quatérnio unitário, em que $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$, define-se o operador $L_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por

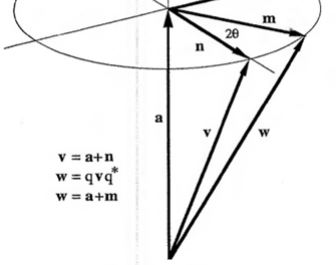
$$L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^{-1}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Mostra-se que L_q fica bem definido e tem as seguintes propriedades [2, 3]:

1. é linear;
2. preserva a norma, ou seja, $\|L_q(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$, $\forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$;
3. representa uma rotação, isto é, a ação de L_q em $\mathbf{v}$ pode ser interpretada geometricamente como a rotação do vetor $\mathbf{v}$ em torno de $\mathbf{q}$ como eixo de rotação e segundo o ângulo 2θ.

A Figura 1 apresenta a interpretação geométrica do efeito do operador $L_q(\mathbf{v})$.

Figura 1: Interpretação geométrica da rotação $L_q(\mathbf{v})$, em que $\mathbf{v}$ está decomposto como $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$, sendo $\mathbf{a}$ paralelo a $\mathbf{q}$ e $\mathbf{n}$ normal a $\mathbf{q}$.



Fonte: Retirado de [2].

Como aplicação, considerou-se a rotação de uma face de um cubo mágico, interpretando o movimento como uma rotação em torno do eixo associado à face movimentada. A partir do eixo e do ângulo de rotação, construiu-se o quatérnio correspondente e analisou-se sua ação sobre os vetores que representam posições no cubo.

Os resultados obtidos mostram que os quatérnios estendem ao espaço tridimensional a relação entre representação algébrica e rotação geométrica observada nos números complexos no plano. A expressão $q\mathbf{v}q^{-1}$ permite representar uma rotação a partir de seu eixo e ângulo. A aplicação ao cubo mágico evidencia essa correspondência em uma situação geométrica concreta, relacionando o movimento de suas faces à representação algébrica das rotações.

Referências

[1] ARAÚJO, F. M. **Rotações em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e a Álgebra dos Quatérnios**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de São Paulo, 2019.

[2] KUIPERS, J. B. **Quaternions and Rotation Sequences**: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality. Princeton: Princeton University Press, 1999.

[3] MARINHO, A. M. L. T. G. **Os quaterniões e suas aplicações**. 2012. 140 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Lusíada de Lisboa, Lisboa, 2012.

[4] SANTOS, M. V. **Números Complexos, Quatérnios e Rotações**. 2012. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Equivalência categórica entre conjuntos pré-ordenados e espaços de Alexandrov

Ana Carla de Carvalho Honório*
anahonorio@ufpr.br

Edson Ribeiro Alvares (Orientador)†
rolo1rolo@gmail.com

Resumo

Um espaço de Alexandrov é um espaço topológico em que a interseção arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto. O objetivo deste trabalho é apresentar a correspondência biunívoca que existe entre estes espaços e conjuntos pré-ordenados, bem como exibir um dicionário que faz corresponder as propriedades T_0, T_1, etc., do espaço topológico com o seu correspondente no conjunto pré-ordenado. Indo mais além, definiremos a categoria $\mathbf{PreOrd}$, cujos objetos são conjuntos pré-ordenados, e a categoria $\mathbf{Alex}$, cujos objetos são espaços topológicos de Alexandrov. Provaremos que existe uma equivalência entre estas categorias, exibindo explicitamente os funtores que realizam esta equivalência.

Palavras-chave: topologia de Alexandrov, pré-ordem, upper set, equivalência categórica, espaços topológicos.

Introdução

Em 1937, no artigo intitulado *Diskrete Räume*, o matemático russo Pavel Alexandroff introduziu os espaços topológicos chamados espaços (discretos) de Alexandrov, os quais conectam a topologia geral com a teoria das pré-ordens [1]. Essencialmente, antes mesmo do surgimento da noção de categoria, Alexandroff exibiu uma correspondência biunívoca entre o que hoje entendemos como a categoria dos conjuntos pré-ordenados e a categoria dos espaços de Alexandrov [2]. Tal correspondência pode ser vista como uma equivalência de categorias.

Tecnicamente, duas categorias são equivalentes quando existem funtores entre estas categorias cujas composições são naturalmente isomorfas aos respectivos funtores identidade [3]. Intuitivamente, podemos ver uma equivalência como um "isomorfismo fraco" entre categorias — de fato, um isomorfismo de categorias é um caso

*UFPR. Graduanda em bacharelado em matemática. Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática UFPR.
†UFPR. Doutor em Matemática.

particular de equivalência. Da mesma forma que isomorfismos de anéis ou grupos preservam determinadas informações algébricas da estrutura em jogo, os funtores de equivalência carregam consigo determinadas informações que estão codificadas na categoria. Sendo assim, um dos principais interesses em saber se duas categorias são equivalentes está no fato de que podemos obter informações sobre uma categoria ao estudarmos uma categoria equivalente, podendo esta última ser mais simples e/ou dispor de ferramentas mais poderosas.

Este trabalho se propõe a apresentar uma equivalência entre a categoria dos conjuntos pré-ordenados e a categoria dos espaços de Alexandrov, exibindo explicitamente os funtores que realizam esta equivalência.

Resultados Principais

Definição 1. *Um **conjunto pré-ordenado** é um par $(X, \leq)$, onde X é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma relação que satisfaz:*

1. $a \leq a, \forall a \in X$;
2. $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \implies a \leq c$.

*Nessas condições, dizemos que $\leq$ é uma **pré-ordem**.*

Definição 2. *Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ conjuntos pré-ordenados. Uma **aplicação crescente** $f : (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ é uma função $f : X \to Y$ tal que*

$$x \leq y \implies f(x) \preceq f(y).$$

Denotamos por $\mathbf{PreOrd}$ a categoria cujos objetos são os conjuntos pré-ordenados e cujos morfismos são as aplicações crescentes entre eles [3].

Definição 3. *Seja X um conjunto e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dizemos que o par (X, τ) é um **espaço de Alexandrov** (e que τ é uma **topologia de Alexandrov** sobre X) se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $\emptyset \in \tau$ *e* $X \in \tau$;
2. *A união arbitrária de elementos de τ pertence a τ; isto é, dado um conjunto de índices arbitrário J, se $\{U_j\}_{j \in J} \subseteq \tau$, então $\bigcup_{j \in J} U_j \in \tau$;*
3. *A interseção arbitrária de elementos de τ pertence a τ; isto é, dado um conjunto de índices arbitrário J, se $\{U_j\}_{j \in J} \subseteq \tau$, então $\bigcap_{j \in J} U_j \in \tau$.*

*Nessas condições, os elementos de τ são chamados de **conjuntos abertos** de X.*

Denotamos por $\mathbf{Alex}$ a categoria cujos objetos são espaços de Alexandrov e cujos morfismos são funções contínuas entre espaços de Alexandrov.

Espaços de Alexandrov são casos particulares de espaços topológicos em que a interseção arbitrária de abertos é um aberto [2]. Mais ainda, $\mathbf{Alex}$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{Top}$.

Definição 4. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto pré-ordenado. Dizemos que um conjunto U é um **upper set** de X se vale a implicação:*

$$(x \in U) \wedge (x \leq y) \implies y \in U. \tag{1}$$

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Proposição 5. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto pré-ordenado. A coleção*

$$\tau := \{U \mid U \text{ é um upper set de } X\} \tag{2}$$

é uma topologia de Alexandrov para X. Além disso, se $U_k := \{j \in X \mid k \leq j\}$, então U_k é um upper set e a coleção

$$\{U_k \mid k \in X\} \tag{3}$$

forma uma base para a topologia τ.

Nesse contexto, como a interseção arbitrária de abertos é um aberto, então o seguinte conjunto é aberto para cada $k \in X$:

$$U(k) := \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \in \tau \\ k \in \mathcal{U}}} \mathcal{U}, \tag{4}$$

ou seja, $U(k)$ é a interseção de todos os abertos que contêm k.

Teorema 6. *Se (X, τ) é um espaço de Alexandrov, então a relação*

$$x \leq y \iff y \in U(x) \tag{5}$$

define uma pré-ordem em X.

Isso mostra que é possível associar um espaço de Alexandrov (X, τ) a um conjunto pré-ordenado $(X, \leq)$. Além disso, vale a igualdade $U(k) = U_k$ para todo $k \in X$.

Na definição de [3] a seguir, o símbolo "$\cong$" denota um isomorfismo natural entre funtores:

Definição 7. *Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são **equivalentes**, e denotamos $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$, se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$ e $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$.*

Teorema 8. *Existe uma equivalência de categorias $\mathbf{PreOrd} \approx \mathbf{Alex}$.*

Referências

[1] ALEXANDROFF, P. **Diskrete Räume**. Moscou: Matematicheskii Sbornik, v. 2, n. 3, p. 501-519, 1937.

[2] MANCERO MOSQUERA, M. I. **Alexandroff Spaces**. Dissertação (Mestrado em Pesquisa Matemática). Valência: Universitat Politècnica de València, 2024.

[3] ASSEM, I. **Introduction au langage catégorique**. Paris: Calvage et Mounet, 2022.

[4] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Generalizando ternos pitagóricos

Roger Henrique Maldaner*
rogerhm@outlook.com

Felipe Vieira (Orientador)†
f.vieira@ufsc.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma nova parametrização para as soluções inteiras de equações diofantinas do tipo pitagóricas generalizadas com mais de três variáveis, da forma $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + y^2 = z^2$. A proposta parte de uma parametrização conhecida, mas buscamos um método alternativo capaz de obter todas as soluções inteiras por meio de uma redução do problema à determinação de pontos racionais de uma equação pitagórica modificada. Uma vez encontrados os pontos racionais da equação reduzida, podemos multiplicar todas as coordenadas por um fator $k \in \mathbb{N}$, de forma a alcançar soluções naturais para o problema original.

Palavras-chave: equações diofantinas; ternos pitagóricos generalizados; parametrização racional.

Introdução

Durante pesquisas para a escrita do TCC, encontramos uma generalização para os Ternos Pitagóricos com mais de 3 variáveis, isto é, soluções naturais para equações pitagóricas generalizadas do tipo: $x_1^2 = x_2^2 + \cdots x_n^2 + x_{n+1}^2$, da forma

$$x_i = \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2 \text{ , se } i = 1 \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - a_n^2 \text{ , se } i = 2 \\ 2a_{i-2}a_n \text{ , se } 3 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

com todos a_i naturais não-nulos.

Propomo-nos, aqui, a apresentar outra parametrização capaz de encontrar todas as soluções naturais da equação pitagórica, utilizando uma redução de variáveis ao simplificar o problema à procura de soluções racionais de uma equação pitagórica modificada.

*Licenciatura em Matemática - UFSC - campus Blumenau
†Departamento de Matemática - UFSC - campus Blumenau

Resultados Principais

Reescreveremos a equação pitagórica apresentada anteriormente para

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 + y^2 = z^2$$

e buscaremos soluções naturais para essa equação, descritas como

$$(A_1, A_2, \cdots, A_n, B, C) \in \mathbb{N}^{n+2}.$$

As chamaremos de $n+2$-uplas pitagóricas.

Teorema 1. *Seja* $(A_1, A_2, \cdots, A_n, B, C) \in \mathbb{N}^{n+2}$ *uma* $n+2$*-upla pitagórica, e* $k \in \mathbb{Q}$*. Então,*

$$(kA_1, kA_2, \cdots, kA_n, kB, kC)$$

é solução de $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 + y^2 = z^2$*.*

Teorema 2. *Todos os pontos racionais da equação*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + y^2 = (y+1)^2$$

podem ser escritos como

$$\left(t_1, t_2, \cdots t_n, \frac{t_1^2 + t_2^2 + \cdots t_n^2 - 1}{2}\right)$$

com $(t_1, t_2, \cdots t_n) \in \mathbb{Q}^n$*.*

Com os resultados acima, é possível mostrar o seguinte teorema:

Teorema 3. *Para toda* n*-upla* $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left(|kt_1|, |kt_2|, \cdots, |kt_n|, \left|k \cdot \frac{t_1^2 + t_2^2 + \cdots t_n^2 - 1}{2}\right|, \left|k \cdot \frac{t_1^2 + t_2^2 + \cdots t_n^2 + 1}{2}\right|\right)$$

é uma $n+2$*-upla pitagórica. Além disso, toda* $n+2$*-upla pitagórica pode ser encontrada por uma* n*-upla* $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$ *por meio desta parametrização.*

Referências

[1] BURTON, D. M. **Elementary Number Theory.** 7. ed. New York: Mc Graw Hill, 2011.

[2] SILVA FILHO, J. F.; FELIX, E. S. **Uma Nova Generalização dos Ternos Pitagóricos.** REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, v. 10, n. 2, p. e3009, 2024.

[3] VIEIRA, F.; CARVALHO, R. A. de. **Elementos de Aritmética e Álgebra.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE CÓDIGO

Samuel Henrique Gomes Velez Benito*
samuelbenito@ufpr.br

Maria Eugênia Martin (Orientadora)†
eugenia@ufpr.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

Este trabalho investiga a estrutura das álgebras de código, uma classe de álgebras comutativas e não associativas definidas a partir de um código linear binário. Em particular, estudamos sob quais condições essas álgebras são simples, analisamos a decomposição de Peirce associada aos seus elementos idempotentes e estabelecemos as propriedades necessárias para caracterizá-las como álgebras axiais de tipo Jordan.

Palavras-chave: álgebras de código; código linear binário; álgebras axiais.

Introdução

Em 1948, no artigo "A Mathematical Theory of Communication", publicado na revista The Bell System Technical Journal, Claude Shannon mostrou que, dado um canal de comunicação com ruído, existe um número, chamado capacidade do canal, tal que a comunicação confiável pode ser alcançada a qualquer taxa abaixo dessa capacidade, desde que sejam utilizadas técnicas adequadas de codificação e decodificação. Essa contribuição foi o estopim para o surgimento de uma nova área na Álgebra, a Teoria dos Códigos, que versa sobre a transmissão de mensagens em um canal com interferência, bem como a reconstituição de dados corrompidos. Ferramentas algébricas são amplamente utilizadas no estudo da codificação de canal, a saber:

Definição 1. *Seja $A = \{a_1, a_2, ..., a_q\}$ um conjunto com q elementos, denominado **alfabeto** do código e cujos elementos são **símbolos** do código. Definimos uma **palavra** q-ária de tamanho n sobre A como uma lista $w_1w_2...w_n$, com $w_i \in A$, para todo $1 \leq i \leq n$. Além disso, denominamos **código** q-ário de comprimento n sobre A um conjunto C não-vazio de palavras q-árias de mesmo comprimento n.*

*UFPR. Graduando em Bacharelado em Matemática. Programa de Voluntariado Acadêmico.
†UFPR. Doutora em Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

Definimos duas operações em A de modo que o conjunto se torne um corpo. Claro que, nesse caso, A será um corpo com apenas um número finito de elementos, isto é, $A = \mathbb{F}_q$ em que q é uma potência de um número primo.

A partir dessa fundamentação, é possível iniciar o estudo da teoria dos **códigos lineares**, os quais são definidos como sendo subespaços vetoriais de $\mathbb{F}_q^n$. A principal vantagem da utilização de códigos lineares é que os procedimentos de codificação e decodificação são mais rápidos e simples do que aqueles associados a códigos não lineares arbitrários. Para um maior aprofundamento no assunto, consulte [3].

Neste trabalho, aplicamos esses conhecimentos ao estudo das chamadas álgebras de código, uma classe de álgebras comutativas e não associativas definidas a partir de um código linear binário (i.e., sobre $\mathbb{F}_2$), introduzidas em 2019 por A. Castillo-Ramirez, J. McInroy e F. Rehren em [1].

Definição 2. *Sejam $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ um código linear binário de comprimento n, $\mathbb{F}$ um corpo e Λ um conjunto de parâmetros de estrutura*

$$\Lambda := \{a_{i,\alpha}, b_{\alpha,\beta}, c_{i,\alpha} \in \mathbb{F} \mid i \in \mathit{supp}(\alpha); \alpha, \beta \in C^*, \beta \neq \alpha, \alpha^c\}$$

*em que $C^* := C - \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, com $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ e $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1)$, $\mathit{supp}(\alpha) := \{1 \leq i \leq n \mid \alpha_i = 1\}$ e $\alpha^c = \mathbf{1} + \alpha$. A **álgebra de código** $A_C(\Lambda)$ é uma álgebra comutativa não associativa sobre o corpo $\mathbb{F}$ com base $\{t_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{e^\alpha \mid \alpha \in C^*\}$ e produto:*

$$t_i \cdot t_j = \delta_{i,j} t_i \qquad t_i \cdot e^\alpha = \begin{cases} a_{i,\alpha} e^\alpha, & \text{se } \alpha_i = 1, \\ 0, & \text{se } \alpha_i = 0 \end{cases} \qquad e^\alpha \cdot e^\beta = \begin{cases} b_{\alpha,\beta} e^{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha \neq \beta, \beta^c \\ \sum\limits_{i \in \mathit{supp}(\alpha)} c_{i,\alpha} t_i, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha = \beta^c \end{cases}.$$

Uma álgebra de código $A_C(\Lambda)$ é dita **não degenerada** se $\bigcup_{\alpha \in C} \mathrm{supp}(\alpha) = \{1, \ldots, n\}$, $|C^*| > 0$ e nenhum dos parâmetros de estrutura em Λ é zero. Ao longo deste texto, vamos assumir que a álgebra código $A_C(\Lambda)$ é não degenerada.

O objetivo deste trabalho é investigar as propriedades das álgebras de código. Analisamos as condições de não degenerescência necessárias para que essas álgebras sejam simples, mostrando que, exceto em casos restritos, não possuem ideais próprios não triviais. Estudamos também o comportamento do operador adjunto associado aos elementos idempotentes da base, obtendo a decomposição de Peirce e as respectivas leis de fusão. Por fim, estabelecemos as condições de Seress, que determinam sob quais exigências estruturais uma álgebra de código pode ser classificada como uma álgebra axial de tipo Jordan.

Resultados Principais

O primeiro resultado que apresentamos relacionado à estrutura das álgebras de código mostra que, em geral, essas álgebras são simples. Lembramos que uma álgebra A é dita **simples** se não possui ideais próprios não triviais.

Teorema 1. *[1] Uma álgebra de código $A_C(\Lambda)$ é simples a menos que $C = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \alpha, \alpha^c\}$. Neste último caso, a álgebra possui ideais próprios não triviais, a saber:*

$$\Big\langle \sum_{i \in \mathit{supp}(\alpha)} t_i, e^\alpha \Big\rangle, \quad \Big\langle \sum_{i \in \mathit{supp}(\alpha^c)} t_i, e^{\alpha^c} \Big\rangle.$$

Para aprofundarmos o estudo das álgebras de código, é fundamental estabelecer a conexão dessas estruturas com as chamadas *álgebras axiais*. Para isso, considere $\mathbb{F}$ um corpo com char$\mathbb{F} \neq 2$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$ um subconjunto, e $\star : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to 2^{\mathcal{F}}$ uma operação binária simétrica. Chamamos o par $(\mathcal{F}, \star)$ de **lei de fusão** sobre $\mathbb{F}$. Além disso, se A é uma álgebra comutativa e não associativa sobre $\mathbb{F}$, definimos para cada $a \in A$ o **operador adjunto** ad_a como sendo $\mathrm{ad}_a(v) := av$, para todo $v \in A$. Denotamos por Spec(a) o conjunto de autovalores de ad_a, e para $\lambda \in$ Spec(a), $A_\lambda(a)$ denota o autoespaço de ad_a associado a λ.

Definição 3. *Seja $(\mathcal{F}, \star)$ uma lei de fusão sobre $\mathbb{F}$. Um elemento $a \in A$ é um **eixo**-$\mathcal{F}$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *a é idempotente (isto é, $a^2 = a$);*
2. *a é semissimples (isto é, o operador adjunto ad_a é diagonalizável);*
3. *Spec$(a) \subseteq \mathcal{F}$ e $A_\lambda A_\mu \subseteq \bigoplus_{\gamma \in \lambda \star \mu} A_\gamma$, para todo $\lambda, \mu \in$ Spec(a).*

Definição 4. *Uma **álgebra axial** é um par (A, X), em que A é uma álgebra comutativa não associativa e X é um conjunto de eixos-$\mathcal{F}$ que geram A.*

Definição 5. *Dizemos que uma álgebra axial (A, X) é de **tipo Jordan** se o operador adjunto ad_a, $a \in X$, possuir autovalores $\{0, 1, \eta\}$ e obedecer à seguinte lei de fusão:*

$$A_i A_i \subseteq A_i \quad A_1 A_0 = \{0\} \quad A_i A_\eta \subseteq A_\eta \quad A_\eta A_\eta \subseteq A_1 \oplus A_0 \quad i = 0, 1.$$

O próximo resultado diz respeito ao comportamento do operador de adjunto associado aos elementos idempotentes da base de uma álgebra de código, permitindo obter a decomposição de Peirce e as respectivas leis de fusão para esses elementos.

Teorema 2. *(Decomposição de Peirce, [1]) Seja $A_C(\Lambda)$ uma álgebra de código. Para todo $1 \leq i \leq n$, o operador ad_{t_i} é semissimples com autovalores 1, 0 e o conjunto $\{a_{i,\alpha} : i \in$ supp$(\alpha), \alpha \in C^*\}$. Suponha que $a_{i,\alpha} \neq 1$ para todo $\alpha \in C^*$ com $\alpha_i = 1$, então a álgebra $A_C(\Lambda)$ admite a decomposição em autoespaços*

$$A_C(\Lambda) = A_1 \oplus A_0 \oplus \bigoplus A_{a_{i,\alpha}}$$

em que $A_1 = \langle t_i \rangle$, $A_0 = \langle t_j, e^\alpha : j \in \{1, \ldots, n\}, j \neq i, \alpha_i = 0 \rangle$ e $A_{a_{i,\alpha}} = \langle e^\beta : \beta_i = 1, a_{i,\beta} = a_{i,\alpha} \rangle$. Se denotamos os autovalores de t_i por $\{1, 0, a_1, \ldots, a_k\}$, então a lei de fusão com respeito a t_i é dada por:

$$A_1 A_1 \subseteq A_1 \quad A_0 A_0 \subseteq A_0 \quad A_1 A_0 = \{0\} \quad A_1 A_{a_j} \subseteq A_{a_j} \quad A_{a_j} A_{a_i} \subseteq A_0$$

$$A_0 A_{a_j} \subseteq \oplus_{l=1}^{k} A_{a_l} \quad A_{a_j} A_{a_j} \subseteq A_1 \oplus A_0 \quad i, j = 1, \ldots, k;\ i \neq j.$$

Por último, introduzimos a condição de Seress, que será fundamental para estabelecer sob quais condições uma álgebra de código é uma álgebra axial de tipo Jordan.

Definição 6. *Dizemos que a lei de fusão para um idempotente e satisfaz a **condição de Seress** se $1, 0 \in \mathcal{F}$ e $A_0 A_\lambda \subseteq A_\lambda$, para todos os autovalores $\lambda \neq 1$.*

Teorema 3. *Suponha que $a_{i,\alpha} \neq 1$ para todo $i \in$ supp(α), $\alpha \in C^*$. Então, a lei de fusão para t_i satisfaz a condição de Seress se, e somente se, t_i possui no máximo um autovalor que não é 0 ou 1.*

Concluimos que, se existe exatamente um autovalor a de t_i que é diferente de 1 ou 0, então a lei de fusão é a mesma que a das álgebras axiais de tipo Jordan.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] CASTILLO-RAMIREZ, A.; MCINROY, J.; REHREN, F. **Code algebras, axial algebras and VOAs**. Journal of Algebra, v. 518, p. 146-176, 2019.

[2] HALL, J.I.; REHREN F.; SHPECTOROV S. **Primitive axial algebras of Jordan Type**. Journal of Algebra, v. 437, p. 79-115, 2015.

[3] LING, S.; XING, C. **Coding Theory:** A First Course. Estados Unidos: Cambridge University Press, 2004.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

O Teorema de Lagrange

Daniel Gottardi Peres*
danielperes@alunos.utfpr.edu.br

Lilian Cordeiro Brambila (Orientadora)†
lilianc@utfpr.edu.br

Resumo

Dado um grupo finito G qualquer, o Teorema de Lagrange garante que a ordem de qualquer subgrupo de G divide a ordem de G. Este trabalho tem como objetivo explorar a demonstração desse resultado apresentada em [1], assim como algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: ordem de grupo, subgrupos, grupos finitos, teorema de Lagrange.

Introdução

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) foi um matemático francês que produziu obras que vieram a influenciar diversas áreas da Matemática, como a Análise, a Álgebra e a Teoria dos Números, servindo como base teórica e referência para profissionais e pesquisadores dessas áreas, como Évariste Galois (1811-1832), um dos pioneiros no campo da Teoria de Grupos.

Como pode ser visto em [2], Lagrange lançou, na segunda metade do século XVIII, a obra "Réflexions la résolution algébrique des équations", onde buscava utilizar métodos de resolução de equações de 3º e de 4º grau para chegar a soluções de equações de 5º grau. Apesar de não chegar a uma resposta, o matemático trouxe uma forma possível de resolução chamada "teoria das permutações", que viria a inspirar Galois a começar seu trabalho na Teoria de Grupos.

Dessa forma, seria anacrônico associar a demonstração do Teorema de Lagrange a Lagrange, uma vez que seus trabalhos foram desenvolvidos décadas anteriores à primeira demonstração, de fato, apresentada. Como mostrado em [3], Lagrange utilizou esse resultado para uma situação particular no seu estudo sobre as equações de 5º grau, porém não veio a demonstrá-lo. Alguns resultados prévios são importantes para a compreensão da relação entre a ordem de grupos distintos, e o Teorema de Lagrange garante alguns resultados de forma trivial.

Neste trabalho apresentaremos as ferramentas necessárias para compreender o enunciado e a demonstração do Teorema de Lagrange, apresentado em [1].

*Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
†Universidade Tecnológica Federal do Paraná

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

Para o desenvolvimento desta pesquisa, precisamos de alguns conceitos da Teoria de Grupos como grupos finitos, subgrupos, classes laterais, ordem de grupo e de subgrupo.

Como será possível verificar, toda classe lateral de um subgrupo H de um grupo G tem o mesmo número de elementos de H. A partir desse resultado, temos o principal teorema do trabalho que consiste no seguinte:

Teorema 1 (Teorema de Lagrange)**.** *Seja H um subgrupo de um grupo finito G. A ordem de H divide a ordem de G.*

Uma das consequências do Teorema de Lagrange, explorada por este trabalho, é a de que todo grupo de ordem prima é cíclico.

Referências

[1] FRALEIGH, J.B. **A First Course in Abstract Algebra.** Boston: Pearson Education, 2003.

[2] OLIVEIRA, Marciel Santiago de. **Grupos finitos e o teorema de Lagrange**. Cuité: CES/UFCG, 2016.

[3] XAVIER, Gustavo Santos. **Teorema de Lagrange: exemplos e aplicações da Teoria de Grupos**. Araguaína: Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2022.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Os Teoremas de Sylow: Um Estudo na Teoria de Grupos

Vinícios Gabriel Positz Haiduk *
vinicioshaiduk@alunos.utfpr.edu.br

Mateus Eduardo Salomão (Orientador)†
mateussalomao@utfpr.edu.br

Resumo

Um dos pilares da Teoria de Grupos é o Teorema de Lagrange, que afirma que a ordem de um subgrupo divide a ordem do grupo em questão. A recíproca deste resultado, em geral, não é verdadeira. Entretanto, existem resultados nesta direção, e os mais gerais são os três Teoremas de Sylow. Neste trabalho, as condições de existência, conjugação e quantidade de determinados subgrupos de um grupo serão abordadas através dos Teoremas de Sylow.

Palavras-chave: grupos, teorema de Lagrange, p-grupos, teoremas de Sylow, subgrupos conjugados.

Introdução

A Álgebra é um ramo da Matemática voltado ao estudo das Estruturas Algébricas, que generalizam as propriedades matemáticas de conjuntos numéricos e suas operações, para conjuntos mais abstratos. Entre essas estruturas, destacam-se os Grupos.

Acerca da Teoria de Grupos, que tem como objetivo estudar propriedades de conjuntos munidos de uma operação binária, um resultado de grande destaque é o Teorema de Lagrange. Neste contexto, se H é um subgrupo de um grupo finito G , o teorema exibe uma relação entre o número de elementos de H e o número de elementos de G, mais precisamente, o resultado garante que a ordem de H divide a ordem de G.

De modo natural, surge o questionamento se a recíproca deste teorema é verdadeira. Isto é, busca-se uma resposta para o seguinte problema: Dado um número natural k que divide a ordem de G, existe um subgrupo H de G de ordem k?

A recíproca do Teorema de Lagrange não é válida em geral. Um exemplo disso é o grupo alternado A_4, que possui ordem 12 e não contém subgrupos de ordem 6. Diante

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Pato Branco. Graduando do curso de Licenciatura em Matemática. Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).
†Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Pato Branco. Doutor em Matemática.

disso, temos os Teoremas de Sylow. Formulados pelo matemático norueguês Peter Ludwig Mejdell Sylow em 1872, três teoremas estabelecem uma recíproca parcial do Teorema de Lagrange, sendo o primeiro a respeito da existência dos chamados p-subgrupos de Sylow, o segundo sobre a conjugação destes p-subgrupos e o terceiro para a quantidade de p-subgrupos.

Neste texto, assumiremos como conhecidos os seguintes conceitos e resultados da Teoria de Grupos: grupos, subgrupos, classes lateriais, subgrupos normais e grupo quociente, homomorfismos e ação de grupos. As referências utilizadas para a elaboração deste trabalho e as quais indicamos para consulta bibliográfica são [1] e [2].

Resultados Principais

Para tratar dos Teoremas de Sylow, inicialmente definiremos uma classe de grupos chamada p-grupos.

Definição 1. *Seja p um número primo. Um grupo G é chamado de p-**grupo** se a ordem de cada elemento de G é uma potência de p. Um subgrupo H de G é dito p-**subgrupo** de G, se H é um p-grupo.*

O Primeiro Teorema de Sylow dá uma resposta positiva para a recíproca do Teorema de Lagrange, no caso de uma potência de primo dividir a ordem de um grupo finito.

Teorema 1 (Primeiro Teorema de Sylow)**.** *Sejam G um grupo de ordem $p^n m$, onde p é um número primo, $m, n \in \mathbb{N}$ e $mdc(p, m) = 1$. Então, G contém um subgrupo de ordem p^i, para cada $1 \leq i \leq n$.*

Dessa forma, o Primeiro Teorema de Sylow garante a existência de subgrupos de certas ordens, as quais são determinadas pela decomposição da ordem do grupo em fatores primos.

Exemplo 1. *Se G é um grupo com ordem $|G| \leq 11$ e $d \mid |G|$, então existe um subgrupo de G de ordem d. Com efeito, se $|G| = 1$ o resultado é óbvio. Agora, se $2 \leq |G| \leq 11$, temos as seguintes decomposições em fatores primos:*

$$2,\ 3,\ 4 = 2^2,\ 5,\ 6 = 2 \cdot 3,\ 7,\ 8 = 2^3,\ 9 = 3^2,\ 10 = 2 \cdot 5,\ 11.$$

O resultado segue aplicando o Primeiro Teorema de Sylow.

Uma classe relevante de subgrupos será definida a seguir.

Definição 2. *Seja G um grupo finito de ordem $p^n m$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onde p é primo e $p \nmid m$. Um p-**subgrupo de Sylow** de G é um subgrupo de G com ordem p^n.*

Exemplo 2. *Considere o grupo $(\mathbb{Z}_{100}, +)$. Este grupo possui ordem $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Assim, um 2-subgrupo de Sylow é um subgrupo de ordem 4, bem como um 5-subgrupo de Sylow é um subgrupo de ordem 25.*

Daí, temos que o Primeiro Teorema de Sylow garante a existência de ao menos um p-subgrupo de Sylow de G.

Como motivação para o Segundo Teorema de Sylow, temos a seguinte proposição.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Proposição 1. *Seja G um grupo de ordem $p^n m$, com p primo, $n \in \mathbb{N}$ e $mdc(m,p) = 1$. Cada conjugado de um p-subgrupo de Sylow é um p-subgrupo de Sylow.*

A proposição anterior admite como recíproca o Segundo Teorema de Sylow, que enunciaremos na sequência.

Teorema 2 (Segundo Teorema de Sylow)**.** *Sejam P_1 e P_2 dois p-subgrupos de Sylow de um grupo finito G. Então, P_1 e P_2 são subgrupos conjugados de G.*

Como consequência, se G é um grupo finito e p um número primo, um p-subgrupo de Sylow S de G é normal se, e somente se, S é o único p-subgrupo de Sylow de G.

Para o Terceiro Teorema de Sylow, denotaremos o número de p-subgrupos de Sylow de um grupo finito G por n_p.

Teorema 3 (Terceiro Teorema de Sylow)**.** *Se G é um grupo finito e p um número primo, então o número de p-subgrupos de Sylow de G divide $|G|$ e é da forma $kp + 1$, para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Em outros termos, é válido que:*

(i) $n_p \mid |G|$;

(ii) $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

O Terceiro Teorema de Sylow estabelece restrições aritméticas para a quantidade de p-subgrupos de Sylow em um grupo finito, ao determinar que o número n_p deve, simultaneamente, dividir a ordem do grupo e ser congruente a $1 \pmod{p}$.

Exemplo 3. *Não existe grupo simples de ordem 15. De fato, seja G um grupo tal que $|G| = 15 = 3 \cdot 5$. Vamos analisar os 5-subgrupos de Sylow. De acordo com o Terceiro Teorema de Sylow $n_5 \mid 15$. Os divisores de 15 são $1, 3, 5, 15$. Também, como $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$, temos que $n_5 \in \{1, 6, 11, 16, \dots\}$. O único valor que satisfaz ambas as condições é $n_5 = 1$. Como existe um único 5-subgrupo de Sylow, ele deve ser normal em G. Como a ordem deste subgrupo é 5, ele é um subgrupo próprio e não trivial, e portanto G não é simples.*

Finalmente, os resultados apresentados neste texto evidenciam que os Teoremas de Sylow desempenham um papel central na Teoria de Grupos, uma vez que analisam a existência, a conjugação e a quantidade de determinados subgrupos.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999.

[2] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. New York: Springer, 1974.

VERSÃO PROVISÓRIA

Torne-se livre e seja adjunto do esquecimento

Ana Carla de Carvalho Honório*
anahonorio@ufpr.br

Juan Sebastián Herrera Carmona (Orientador)†
sebastianherrera@ufpr.br

Resumo

Ao se relacionar diferentes estruturas por meio de funtores, nota-se que nem sempre esses mapeamentos possuem um inverso. Diante disso, a busca por um funtor que atue como um "quase-inverso" culmina no conceito de adjunção. Funtores adjuntos podem ser estudados no contexto de categorias cujos objetos são conjuntos com alguma estrutura adicional, como é o caso da categoria $\mathbf{Grp}$, onde a noção de adjunção está atrelada à existência de grupos livres. Neste trabalho, apresenta-se uma caracterização para funtores adjuntos via morfismos universais e estabelece-se que, se uma categoria concreta $(\mathcal{C}, U)$ possui U-objetos livres, então existe um funtor $F : \mathbf{Set} \to \mathcal{C}$ tal que $F \dashv U$. Por fim, tem-se uma caracterização categórica para grupos livres, mostrando que o funtor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ que associa cada conjunto ao grupo livre gerado por seus elementos é adjunto esquerdo do funtor esquecimento U.

Palavras-chave: funtor, adjunção, categoria concreta, funtor livre, funtor esquecimento.

Introdução

A teoria de categorias fornece ferramentas que permitem transportar um problema de uma área para outra, onde esta última geralmente dispõe de um aparato mais poderoso e que gera soluções mais simples [1]. Este transporte se dá por meio dos funtores, que são mapeamentos entre categorias que levam objetos em objetos e morfismos em morfismos, "preservando", de certo modo, as identidades e as composições.

Semelhantemente ao que ocorre com funções entre conjuntos, nem sempre existe o inverso de um funtor. Ainda assim, dado qualquer funtor entre categorias, seria possível encontrar um funtor que, ao menos, agisse como um "quase-inverso", levando cada objeto da segunda categoria ao "melhor" objeto associado a ele na primeira? A

*UFPR. Graduanda em bacharelado em matemática. Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática UFPR.
†UFPR. Professor de Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

resposta é que, se determinadas hipóteses forem satisfeitas, é de fato possível garantir a existência de tal funtor [2]. Essa busca pelo "melhor" representante deságua no conceito de adjunção.

Funtores adjuntos podem ser estudados em contextos mais específicos, como no caso de categorias cujos objetos são conjuntos com alguma estrutura adicional. Em particular, no caso da categoria $\mathbf{Grp}$, a noção de adjunção está atrelada à existência de grupos livres gerados por conjuntos arbitrários.

Resultados Principais

Definimos funtores adjuntos como em [3]:

Definição 1. *Sejam $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ categorias e funtores. Dizemos que F é **adjunto esquerdo** de G e que G é **adjunto direito** de F, e escrevemos $F \dashv G$, se*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \tag{1}$$

naturalmente em $A \in \mathcal{A}_0$ e $B \in \mathcal{B}_0$.

Neste trabalho, utiliza-se a definição de morfismo universal dada por [4]:

Definição 2. *Seja $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ um funtor e $A \in \mathcal{A}_0$. Um par (B, u), com $B \in \mathcal{B}_0$ e $(u : A \to G(B)) \in \mathcal{A}_1$, é chamado de um **morfismo universal de A para G** se satisfaz a seguinte propriedade universal:*

$$\forall B' \in \mathcal{B}_0,\ \forall (f : A \to G(B')) \in \mathcal{A}_1,\ \exists! (\bar{f} : B \to B') \in \mathcal{B}_1\ :\ G(\bar{f}) \circ u = f.$$

A proposição a seguir fornece uma caracterização para funtores adjuntos via morfismos universais, garantindo a equivalência entre as definições dadas por [3] e [2]:

Proposição 3. *Um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um adjunto esquerdo para o funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ se, e somente se, existe uma transformação natural*

$$\eta : 1_{\mathcal{A}} \implies GF \tag{2}$$

tal que, para todo $A \in \mathcal{A}_0$, o par $(F(A), \eta_A)$ é um morfismo universal de A para G.

Em vista da Definição 2, introduzimos os *objetos livres* [3]:

Definição 4. *Sejam $X \in \mathbf{Set}_0$ e $S : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ um funtor. Se o par (A, i) é um morfismo universal de X para S, então dizemos que $A \in \mathcal{A}_0$ é um S**-objeto livre sobre** X e que $(i : X \to S(A)) \in \mathbf{Set}_1$ é a **injeção dos geradores** X **em** A. Além disso, dizemos que a categoria $\mathcal{A}$ **possui S-objetos livres** quando todo $X \in \mathbf{Set}_0$ possui um S-objeto livre.*

Uma *categoria concreta* pode ser descrita como uma categoria em que cada objeto possui um conjunto subjacente e em que cada morfismo é uma função, considerando a composição usual de funções [5]. Mais formalmente:

Definição 5. *Uma **categoria concreta** é um par $(\mathcal{C}, U)$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria e $U : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ é um funtor fiel.*

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Nesse caso, o funtor U é chamado de *funtor esquecimento*. O resultado a seguir relaciona adjunção com a existência de objetos livres em uma categoria concreta:

Teorema 6. *Seja $(\mathcal{C}, U)$ uma categoria concreta. Se $\mathcal{C}$ possui U-objetos livres, então existe um funtor $F : \mathbf{Set} \to \mathcal{C}$ tal que $F \dashv U$.*

Nessas condições, chamamos F, o adjunto esquerdo do funtor esquecimento U, de *funtor livre*. Como exemplo, mostrando que os U-objetos livres de $\mathbf{Grp}$ são exatamente os grupos livres [4], garantimos:

Proposição 7. *Sejam $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ um funtor esquecimento e $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ um funtor que associa cada $X \in \mathbf{Set}_0$ ao grupo livre gerado pelos elementos de X. Então, $F \dashv U$.*

Referências

[1] RIBEIRO, M. F. S. **Teoria das Categorias para Matemáticos:** Uma breve introdução. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.

[2] BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra 1:** Basic Category Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[3] LEINSTER, T. **Basic Category Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[4] HERRLICH, H.; STRECKER, G. E. **Category Theory**. Lemgo: Heldermann Verlag, 2007.

[5] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer, 1978.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

UMA CARACTERIZAÇÃO PARA DUAS CLASSES DE FUNÇÕES DEFINIDAS SOBRE ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS

Camilly Silva dos Anjos *
camillyanjos@ufpr.br

Tanise Carnieri Pierin †
tanise@ufpr.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

A expansão dos sistemas numéricos dos complexos para os quatérnios e octônios resulta na perda gradual da comutatividade e da associatividade. Contudo, os octônios preservam uma forma restrita de associatividade, o que fundamenta o estudo das álgebras alternativas. Este trabalho tem como objetivo apresentar o comportamento de funções mapeadas sobre essas estruturas, utilizando a decomposição de Peirce como ferramenta central. A justificativa para este estudo reside na necessidade de compreender se funções do tipo $*$-Lie ou $*$-Jordan multiplicativas ainda preservam a aditividade. Analisaremos quais condições devem ser admitidas sobre a álgebra para que uma n-função $*$-Lie ou $*$-Jordan multiplicativa unital φ seja caracterizada como $*$-aditiva e, consequentemente, como um $*$-isomorfismo.

Palavras-chave: álgebras alternativas, octônios, decomposição de Peirce, funções $*$-Lie e $*$-Jordan multiplicativas.

Introdução

No estudo das estruturas algébricas, a construção de Cayley-Dickson [2] ilustra como a expansão dos conjuntos numéricos resulta na perda de propriedades bem comportadas. Ao passarmos dos números complexos ($\mathbb{C}$) para os quatérnios ($\mathbb{H}$), perdemos a propriedade de comutatividade da operação produto. O passo seguinte, que estende a estrutura para os octônios ($\mathbb{O}$), resulta na perda da associatividade. No entanto, esta é uma perda parcial, uma vez que para algumas triplas de elementos a associatividade ainda é mantida. Além disso, qualquer subálgebra gerada por apenas dois elementos dentro dessa estrutura é, necessariamente, associativa (Teorema de

*UFPR. Discente da graduação em Matemática da UFPR
†UFPR. Docente do Departamento de Matemática da UFPR

Artin [2]). Puxando esse gancho teórico, define-se a classe das álgebras alternativas, que são estruturas não associativas que generalizam esse comportamento dos octônios. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita alternativa quando satisfaz as identidades à esquerda e à direita: $a(ab) = a^2b$ e $(ba)a = ba^2$, para todos $a, b \in \mathcal{A}$.

O foco deste trabalho é analisar como algumas classes de funções mapeadas entre álgebras alternativas se comportam. Para contornar a ausência da associatividade e realizar análises estruturais da álgebra, a principal ferramenta utilizada é a Decomposição de Peirce [2].

Resultados Principais

Em uma álgebra alternativa com unidade $1_{\mathcal{A}}$, a existência de idempotentes simétricos não triviais (como e_1 e $e_2 = 1_{\mathcal{A}} - e_1$) permite que a álgebra seja expressa como a soma direta de subespaços vetoriais

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{12} \oplus \mathcal{A}_{21} \oplus \mathcal{A}_{22},$$

que têm regras de multiplicação bem conhecidas e bastante similares àquelas disponíveis no caso associativo. Antes de prosseguirmos com a caracterização das funções mapeadas sobre tais estruturas, é necessário fixar a notação sobre involuções. Uma função $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma involução se $(a + b)^* = a^* + b^*$, $(a^*)^* = a$, e $(ab)^* = b^*a^*$, para todos $a, b \in \mathcal{A}$. Uma álgebra $\mathcal{A}$ munida de uma involução é chamada de $*$-álgebra [1].

É com base nessa estrutura que avaliamos o comportamento de funções chamadas de $*$-Lie e $*$-Jordan multiplicativas. Dadas duas $*$-álgebras alternativas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, uma função $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ é chamada de n-função $*$-Lie multiplicativa se

$$\varphi(p_{n_*}(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)) = p_{n_*}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_j), \ldots, \varphi(a_n)),$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, com $n \geq 2$ inteiro, em que os polinômios p_{i_*} são definidos indutivamente via

$$p_{1_*}(a_1) = a_1 \quad \text{e} \quad p_{n_*}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = [p_{(n-1)_*}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n]_*,$$

com $[a, b]_* = ab - ba^*$, para $a, b \in \mathcal{A}$.

De maneira análoga, uma função $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ é dita uma n-função $*$-Jordan multiplicativa se

$$\varphi(q_{n_*}(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)) = q_{n_*}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_j), \ldots, \varphi(a_n)),$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, com $n \geq 2$ inteiro, em que

$$q_{1_*}(a) = a \quad \text{e} \quad q_{n_*}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{q_{(n-1)_*}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n\}_*,$$

com $\{a, b\}_* = ab + ba^*$, para $a, b \in \mathcal{A}$.

Seguindo as ideias apresentadas por Martindale, uma pergunta natural é quais condições adicionais devem ser assumidas sobre as $*$-álgebras alternativas envolvidas, a fim de que essas funções sejam aditivas. O teorema central abordado neste trabalho, baseado nos resultados de Andrade [1], é o seguinte.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema 1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ duas $*$-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathcal{A}}$ e $1_{\mathcal{A}'}$, respectivamente. Consideramos e_1 e $e_2 = 1_{\mathcal{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em $\mathcal{A}$. Assuma que $\mathcal{A}$ satisfaz a seguinte condição: para $x \in \mathcal{A}$,*

$$(e_j\mathcal{A})x = \{0\} \text{ para todo } j \in \{1,2\} \Rightarrow x = 0.$$

Se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ é uma função bijetiva unital que satisfaz

$$\varphi(p_{n*}(a,b,\zeta,\ldots,\zeta)) = p_{n*}(\varphi(a),\varphi(b),\varphi(\zeta),\ldots,\varphi(\zeta)),$$

para todos $a, b \in \mathcal{A}$ e $\zeta \in \{e_1, e_2, 1_{\mathcal{A}}\}$, então φ é $*$-aditiva.

Uma consequência direta deste teorema é que, ao assumirmos a hipótese de que φ é uma bijeção multiplicativa escalar sobre os complexos ($\mathbb{C}$), a condição de $*$-aditividade garantida pelo resultado complementa a estrutura. Como φ preserva, assim, a adição, a multiplicação e a involução, conclui-se que φ é um $*$-isomorfismo de álgebras.

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste resumo, foram expostas as condições estruturais que garantem a aditividade de funções, com foco principal nas aplicações $*$-Lie multiplicativas. Contudo, conforme delineado ao longo do texto, resultados de caracterização análogos também são verificados para a classe das funções $*$-Jordan multiplicativas. Como desdobramento natural e passos futuros desta pesquisa, pretende-se estender o estudo para a caracterização de derivações $*$-Jordan não lineares definidas sobre $*$-álgebras alternativas.

Referências

[1] ANDRADE, Aline Jaqueline de Oliveira. **Aditividade de funções em estruturas alternativas**. Tese (Doutorado em Matemática) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2025.

[2] SCHAFER, Richard D. **An introduction to nonassociative algebras**. Nova Iorque: Courier Corporation, 2017.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Análise e Equações Diferenciais

Comissão Científica:

Em breve!

Banca Avaliadora:

Em breve!

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

A Compacidade das Bolas Fechadas em Espaços Normados de Dimensão Infinita

Gileade Trentin Detogni*
gileade.2005@alunos.utfpr.edu.br

Mateus Eduardo Salomão (Orientador)†
mateussalomao@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo trazer uma breve apresentação de como a compacidade das bolas fechadas em espaços normados com a topologia induzida pela norma se comporta a depender da dimensão do espaço, além de introduzir duas novas topologias e caracterizar a compacidade de tais bolas nas mesmas.

Palavras-chave: topologia, compacidade, funcional, reflexividade, dual.

Introdução

Em espaços métricos, todo subconjunto compacto é fechado e limitado. Além disso, a recíproca é verdadeira em espaços normados de dimensão finita (com a topologia induzida pela norma), ou seja, todo subconjunto fechado e limitado é compacto.

Acontece que se a dimensão do espaço é infinita, então a bola fechada $\overline{B(0,1)}$ *nunca* é compacta na topologia da norma, e isso motiva a seguinte pergunta: é possível obter uma topologia com menos abertos, de forma a tornar compactas as bolas fechadas e limitadas, mas sem perder propriedades "agradáveis" da topologia usual?

Pensando nisso, este trabalho apresenta duas novas topologias, uma em espaços normados E quaisquer, e outra em espaços duais E^*, as quais são construídas de forma a manter contínuos todos ou alguns funcionais lineares definidos no espaço e contínuos na topologia usual. Além disso, definimos a injeção canônica, uma aplicação com um papel fundamental no desenvolvimento dos resultados.

Finalizamos com dois teoremas que estabelecem precisamente as condições para que as bolas fechadas sejam compactas nas duas topologias aqui definidas.

Por fim, mencionamos que serão assumidos como conhecidos conceitos básicos de topologia, espaços métricos, espaços normados e seus duais com norma usual. As principais referências utilizadas para elaboração do trabalho são [1], [2] e [3], as quais recomendamos ao leitor para aprofundamento do tema.

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Pato Branco. Graduando do curso de Licenciatura em Matemática. Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).

†Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Pato Branco. Doutor em Matemática.

Resultados Principais

Iniciamos o desenvolvimento do estudo sobre compacidade de bolas fechadas com a definição de uma topologia que é necessária neste contexto.

Definição 1. *Sejam X um conjunto dado, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de espaços topológicos e $\{\varphi_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de funções. A menor topologia de X tal que φ_λ é contínua para todo $\lambda \in \Lambda$ é chamada de* ***topologia inicial*** *de X associada a família de funções $\{\varphi_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.*

A definição abaixo aplica o conceito de topologia inicial no caso em que o conjunto dado é um espaço normado E e a família de funções é o seu dual E^*.

Definição 2. *Seja E um espaço normado. A topologia inicial de E associada a família de funcionais lineares contínuos E^* é chamada de* ***topologia fraca*** *em E.*

A seguir, definimos uma função importante para esse trabalho, além de trazermos algumas propriedades fortes que a mesma possui.

Definição 3. *Seja E um espaço normado. A função $J_E : E \to E^{**}$ definida de forma que para cada $x \in E$, o funcional $J_E(x) : E^* \to \mathbb{R}$ é dado por $J_E(x)(f) = f(x)$ para cada $f \in E^*$, é chamada de* ***injeção canônica*** *de E em E^{**}.*

Proposição 1. *A injeção canônica $J_E : E \to E^{**}$ é linear, isométrica e injetiva.*

A injeção canônica nem sempre é sobrejetiva, mas essa propriedade caracteriza uma classe especial de espaços normados, os chamados espaços reflexivos.

Definição 4. *Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um espaço* ***reflexivo*** *se a injeção canônica $J_E : E \to E^{**}$ é sobrejetiva.*

Até então, o espaço dual E^* possui a topologia forte (induzida pela norma) e a topologia fraca. Introduziremos agora uma terceira topologia, a qual também é essencial no estudo da compacidade das bolas fechadas. Em seguida, a importância dessa definição será justificada pelo Teorema 1.

Definição 5. *Seja E um espaço normado. A topologia inicial de E^* associada a família de funcionais lineares contínuos $J_E(E)$ é chamada de* ***topologia fraca**** *em E^*.*

Teorema 1 (**Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki**)**.** *Se E é um espaço normado, então a bola fechada $B_{E^*} = \{f \in E^* / \ \|f\| \leq 1\}$ é compacta em E^* na topologia fraca*.*

Em seguida, os próximos dois resultados servem como lemas com o objetivo de auxiliar a demonstração do Teorema 2, o qual estabelece uma forte conexão entre a reflexividade de um espaço e a compacidade de suas bolas fechadas.

Proposição 2. *Seja E um espaço normado e $J_E : E \to J(E)$ a injeção canônica sobre a sua imagem. Se E possui a topologia fraca e E^{**} possui a topologia fraca*, então J_E é um homeomorfismo entre E e $J(E)$ como subespaço de E^{**}.*

Proposição 3. *Se E é um espaço normado, então $\overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E^{**}}$, ou seja, o fecho da imagem da bola fechada B_E pela injeção canônica J_E com relação a topologia fraca* em E^{**} é igual a bola fechada $B_{E^{**}}$.*

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema 2 (**Teorema de Kakutani**)**.** *Seja E um espaço normado. A bola fechada B_E é compacta na topologia fraca se, e somente se, E é um espaço reflexivo.*

Demonstração. ($\implies$) Suponha que B_E seja compacta na topologia fraca. Utilizando a Proposição 2, vem que $J_E(B_E)$ é compacto em E^{**} na topologia fraca*. Como espaços com a topologia fraca* são espaços de Hausdorff, segue que $J_E(E)$ é fechado, pois compactos de Hausdorff são fechados. Da Proposição 3, $B_{E^{**}} = \overline{J_E(B_E)}^{w^*} = J_E(B_E)$, e utilizando a linearidade da injeção canônica J_E, a igualdade acima pode ser expandida ao espaço todo, concluindo que $J_E(E) = E^{**}$, como queríamos demonstrar.
($\impliedby$) Suponha que E seja um espaço reflexivo. Temos que J_E é uma bijeção, e como J_E preserva a norma pela Proposição 1, segue que J_E^{-1} também preserva a norma, e portanto $J_E^{-1}(B_{E^{**}}) = B_E$, da sobrejetividade de J_E. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, a bola $B_{E^{**}}$ é compacta em E^{**} na topologia fraca*, e como J_E^{-1} é um homeomorfismo entre esse espaço e E com a topologia fraca vide Proposição 2, segue que B_E é compacta em E com relação à topologia fraca. □

Por fim, condensamos os três resultados principais do trabalho na Tabela 1, a qual traz condições que caracterizam a compacidade das bolas fechadas com respeito às topologias forte, fraca e fraca*.

No espaço	com a topologia	a bola	é compacta
E	forte	B_E	$\iff \dim E < \infty$
E	fraca	B_E	$\iff E$ é reflexivo
E^*	fraca*	B_{E^*}	sempre

Tabela 1: Compacidade da bola fechada conforme a topologia

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Textos Universitários).

[2] BRÉZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

[3] OLIVEIRA, C. R. d. **Introdução à Análise Funcional**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

A Extensão Analítica da Função ζ de Riemann

Pedro Lascowski Laguna*
pedro.laguna@ufpr.br

Prof. Dr. Wagner A. A. de Moraes (Orientador)†
wagnermoraes@ufpr.br

Resumo

A teoria analítica de números é uma área da matemática que estuda propriedades dos inteiros utilizando ferramentas de análise. Nessa área, busca-se estudar resultados relacionados ao Teorema dos Números Primos e à função Zeta de Riemann que nos ajudam a entender a distribuição dos números primos.

Palavras-chave: Hipótese de Riemann, Teoria Analítica de Números, Zeta de Riemann.

Introdução

Em 1859, Bernhard Riemann publicou um artigo [5] sobre a função $\pi(x)$, que conta a quantidade de primos menores ou iguais a x, e conjecturou que os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ pertencem a reta $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Neste trabalho, veremos quais são os zeros conhecidos dessa função por meio de sua continuação analítica.

Resultados Principais

Utilizaremos a notação $s = \sigma + it$ para $s \in \mathbb{C}$ da mesma maneira que é utilizada em [3].
Antes de descobrirmos quais são os zeros de $\zeta(s)$, precisamos definir certos conceitos.
Definição 1: Para $\sigma > 1$, temos que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

*Universidade Federal do Paraná (UFPR). Graduando em bacharelado em matemática. Bolsista do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).
†Universidade Federal do Paraná (UFPR). Doutor em Matemática.

Definição 2: Para $\sigma > 1$ e $a \in (0, 1]$ definimos

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

e nos referimos a ela como a função *zeta de Hurwitz*, já que $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$.

Definição 3: Para $\sigma > 0$, definimos

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

Teorema 1: A função Γ satisfaz as seguintes equações funcionais para todo $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_{\leq 0}$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Com isso, conseguimos alguns resultados que nos ajudam a descobrirmos os zeros triviais de $\zeta(s)$.

Teorema 2: Se $\sigma > 1$, então $\zeta(s, a)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}$

Teorema 3: Se $a \in (0, 1]$, então a função definida pela integral de contorno em torno do eixo real negativo

$$I(s, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}e^{az}}{1-e^z} dz$$

é uma função inteira. Além disso, $\zeta(s, a) = \Gamma(1-s)I(s, a)$ se $\sigma > 1$.

Definição 4: Para $\sigma \leq 1$ definimos $\zeta(s, a) = \Gamma(1-s)I(s, a)$.

Dessa maneira, conseguimos uma continuação analítica de $\zeta(s, a)$ em todo o plano complexo.

Teorema 4 (Fórmula de Hurwitz): Se $a \in (0, 1]$ e $\sigma > 1$, então

$$\zeta(1-s, a) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e^{-i\pi s/2} F(a, s) + e^{i\pi s/2} F(-a, s) \right)$$

em que $F(a, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n a}}{n^s}$.

Nos referimos a $F(a, s)$ como a *função zeta periódica*.

Aplicando a fórmula de Hurwitz conseguimos encontrar os zeros triviais de $\zeta(s)$.

Teorema 5: Para todo s temos

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$$

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Note que ao tomarmos $s = 2n+1$ com $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ o fator $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ se torna zero. Portanto, $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Porém, não são apenas esses zeros que nos interessam. Queremos analisar os pontos em que $\zeta(s) = 0$ em todo o plano complexo.

Teorema 6: Se $\sigma > 1$ temos

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

Este teorema impede que $|\zeta(\sigma + it)|$ se aproxima de zero quando $\sigma \to 1^+$, levando ao seguinte resultado:

Teorema 7: Temos que $\zeta(1 + it) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, para $\sigma \geq 1$, temos que $\zeta(s)$ não se anula.

Analisando a equação do **Teorema 5**, e substituindo s por $1 - s$, vemos que $\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)$. Então, se $\sigma < 0$, temos que $\zeta(1-s) \neq 0$, pois $1-\sigma > 1$ e o fator $2(2\pi)^{s-1}$ também é não nulo. Logo, a única possibilidade de termos zeros para $\zeta(s)$ é tendo $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$. Porém, não queremos os zeros da forma $s = -2n$ em que $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Assim, a função ζ não possui zeros não triviais para $\sigma < 0$.

Logo, se ζ possui zeros, eles estão na faixa $0 \leq \sigma \leq 1$, que chamamos de *faixa crítica*.

Hipótese de Riemann: Os zeros não-triviais de ζ tem a forma $s = \frac{1}{2} + ti$.
Chamamos a reta em que $\sigma = \frac{1}{2}$ de *reta crítica*.

Caso essa afirmação seja verdade, conseguimos alguns resultados interessantes sobre a distribuição dos números primos.

Referências

[1] AHLFORS, L. V. **Complex Analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable**. 2.ed. New York: McGraw-Hill, 1966.

[2] ARTIN, Emil. **The Gamma Function**. New York: Dover Publications, Inc., 2015.

[3] APOSTOL, T. M. **Introduction to Analytic Number Theory** . New York: Springer, 1976.

[4] CONWAY, John B. **Functions of One Variable Complex**. New York: Springer, 1978.

[5] RIEMANN, B. **Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse**. Berlin: Monatsber. Akad. 1859

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

A Transformada Discreta de Fourier e uma aplicação em processamento de imagens digitais

Lucas dos Santos*
24000209@uepg.br

Marcos Calçada (Orientador)†
mcalcada@uepg.br

Resumo

Este trabalho investiga a Transformada Discreta de Fourier (TDF) em $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como uma mudança de base para o domínio da frequência. Analisam-se os Operadores Lineares Invariantes por Translação (OLITs), sua equivalência com a convolução e, pelo Teorema da Convolução, a diagonalização simultânea desses operadores pela base de Fourier. Estendendo a teoria a $\ell^2(\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N)$, imagens digitais são modeladas como funções e submetidas à filtragem espectral. Filtros passa-baixas reduzem ruídos ao preservar baixas frequências, enquanto filtros passa-altas destacam bordas e descontinuidades. Assim, evidencia-se a fundamentação matemática da filtragem de imagens na decomposição em frequências e na diagonalização de operadores de convolução.

Palavras-chave: Transformada Discreta de Fourier, Teorema da Convolução, Filtros

Introdução

Neste trabalho, investigamos a Transformada Discreta de Fourier (TDF), uma ferramenta matemática fundamental para a análise e o processamento de dados digitais, com particular aplicação ao processamento de imagens. A TDF permite decompor uma função em componentes de diferentes frequências, fornecendo uma representação na qual determinadas operações, como a convolução, assumem uma forma significativamente mais simples. Essa propriedade estabelece a ligação entre a estrutura algébrica da TDF e aplicações concretas de filtragem e análise de imagens.

Consideramos o espaço $\ell^2(\mathbb{Z}_N) = \{f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}\}$, munido do produto interno definido por $\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\overline{g(n)}$. Esse espaço possui dimensão finita N e é isomorfo a $\mathbb{C}^N$. Podemos estender cada função $f \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ para uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, impondo

*Universidade Estadual de Ponta Grossa. Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado.
†Universidade Estadual de Ponta Grossa. Doutorado em Física Teórica.

a condição de N-periodicidade, isto é, $f(n+kN) = f(n)$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{Z}$. Não faremos distinção entre $f \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ e sua extensão $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, a menos que seja explicitamente indicado.

Definimos $E_k(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i k n/N}$, para $k, n = 0, \ldots, N-1$. A família $\{E_k\}_{k=0}^{N-1}$ é uma base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. A TDF é o operador $\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dado por $(\mathcal{F}f)(m) = \hat{f}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i m n/N} = \sqrt{N}\langle f, E_m\rangle$. Sua inversa (TDFI) é o operador $\mathcal{F}^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ definido, para qualquer $g \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, por $(\mathcal{F}^{-1}g)(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{2\pi i m n/N}$, com $m = 0, \ldots, N-1$ em ambas as fórmulas. Assim, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$ e $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g$; em particular, $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$. Definindo $F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} E_k$, obtemos a base ortogonal de Fourier $F = \{F_k\}_{k=0}^{N-1}$ e a reconstrução $f(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) F_n(m)$. Logo, $\hat{f} = [f]_F$ fornece as coordenadas de f nessa base.

Para valores de k próximos a 0 e a $N-1$, a função $e^{2\pi i k n/N}$ oscila lentamente, descrevendo variações suaves e graduais no domínio espacial (baixas frequências). Em contrapartida, para valores de k próximos a $N/2$, a função apresenta oscilações rápidas (altas frequências).

Resultados Principais

As demonstrações dos teoremas apresentados a seguir encontram-se omitidas neste resumo, mas podem ser verificadas integralmente na obra de Frazier [1].

Definição 1. *Seja $f \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ e $k \in \mathbb{Z}$. Defina $(R_k f)(n) = f(n-k)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. $R_k f$ é a translação de f por k.*

Definição 2. *Seja $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ um operador linear. Dizemos que T é um operador linear invariante por translação (OLIT) se $T(R_k f) = R_k(Tf)$, para todo $f \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ e todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 1. *Seja $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ um OLIT. Então, cada vetor da base de Fourier F é um autovetor de T. Em particular, T é diagonalizável.*

Esse resultado garante que a base de Fourier diagonaliza todo e qualquer OLIT, propriedade central para aplicações em processamento de dados digitais.

Definição 3. *Para $f, g \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, a convolução $f * g \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ é dada por $(f*g)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(n-m)g(m)$ para $n = 0, \ldots, N-1$. Em particular, para um vetor $h \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ fixo, definimos o operador de convolução $T_h : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por $T_h(f) = f * h$.*

Teorema 2. *Um operador $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ é um OLIT se, e somente se, T é um operador de convolução T_b para algum vetor $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.*

Teorema 3 (Teorema da Convolução)**.** *Para quaisquer $f, g \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, tem-se que: $\widehat{(f*g)}(m) = \hat{f}(m)\hat{g}(m)$.*

Em virtude do Teorema da Convolução e do fato de os vetores de Fourier serem autovetores, a matriz associada à TDF provê exatamente a mudança de base capaz de diagonalizar simultaneamente todos os OLITs. Tais resultados admitem extensão natural para o espaço bidimensional $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ por meio de um produto separável, no qual a base de Fourier 2D é dada por $F_{m_1,m_2}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} e^{2\pi i m_1 n_1/N_1} e^{2\pi i m_2 n_2/N_2}$.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Essa extensão estabelece a fundamentação matemática para a aplicação da TDF ao processamento de imagens digitais, uma vez que uma imagem pode ser modelada como uma função $f \in \ell^2(\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N)$, na qual cada ponto da grade representa um pixel. A TDF 2D permite, então, representar a imagem em termos de suas componentes de frequência espacial, separando variações lentas e graduais de oscilações rápidas.

Nesse contexto, o filtro linear considerado atua por convolução e, pelo Teorema 2, é um OLIT. Pelo Teorema da Convolução, essa operação no domínio espacial equivale à multiplicação pontual das transformadas da imagem e do filtro no domínio da frequência. Assim, a filtragem pode ser realizada pela seleção ou atenuação de determinadas componentes espectrais da imagem, estabelecendo uma relação direta entre os resultados teóricos obtidos e uma operação concreta de processamento digital.

Na aplicação apresentada na Figura 1, considera-se uma imagem sintética contendo ruído e realiza-se sua transformação para o domínio da frequência por meio da TDF 2D. Como a TDF assume periodicidade circular, a convolução pode interpretar pixels próximos a bordas opostas como vizinhos, produzindo efeitos de *wrap-around*, nos quais informações de uma borda podem aparecer artificialmente na borda oposta. Emprega-se, portanto, *padding* (preenchimento de zeros) para reduzir esses efeitos, conforme discutido em [2]. No domínio espectral, utiliza-se um filtro passa-baixas Gaussiano, que preserva as componentes de baixa frequência e atenua as de alta frequência. Como estas estão associadas a variações espaciais rápidas, sua atenuação produz uma imagem suavizada e reduz a influência do ruído. Uma discussão mais detalhada sobre filtragem no domínio da frequência e processamento de imagens pode ser encontrada em [2].

De forma complementar, emprega-se um filtro passa-altas Gaussiano, que atenua as componentes de baixa frequência e preserva as oscilações rápidas. O resultado é o realce de bordas e descontinuidades estruturais presentes na imagem, permitindo evidenciar características que podem estar pouco perceptíveis no domínio espacial. A Figura 1 ilustra, portanto, a utilização da TDF como ferramenta efetiva de filtragem espectral: a partir da mesma representação matemática no domínio da frequência, diferentes componentes da imagem podem ser seletivamente preservadas ou atenuadas, produzindo operações de suavização, redução de ruído e realce de estruturas.

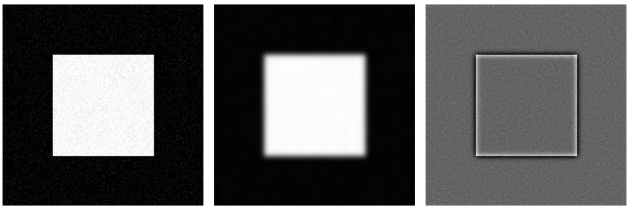


Figura 1: Processamento de imagem no domínio da frequência através da TDF 2D com procedimento de *padding*: imagem sintética com ruído (esquerda), suavização por filtro passa-baixas Gaussiano (centro) e destaque de bordas por filtro passa-altas Gaussiano (direita).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Referências

[1] FRAZIER, M. W. **An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra**. New York: Springer-Verlag, 1999.

[2] GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Digital Image Processing**. 4. ed. New York: Pearson, 2018.

[3] FOLLAND, G. B. **Fourier Analysis and Its Applications**. Pacific Grove: Brooks/Cole, 1992.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

A Trasformada de Fourier de Distribuições Periódicas

Daniel Thiago Ivanchechen*
daniel.ivanchechen@ufpr.br

Fernando de Ávila Silva (Orientador)†
fernando.avila@ufpr.br

Resumo

Neste trabalho, estudamos a regularidade de distribuições periódicas através das propriedades de decaimento de seus coeficientes de Fourier. Esses resultados fornecem ferramentas para o estudo de regularidade das soluções periódicas de certas equações diferenciais parciais periódicas.

Palavras-chave: Distribuições, Equações Diferenciais Parciais, Transformada de Fourier.

Introdução

O estudo de equações diferenciais parciais envolve, em muitos casos, a busca por soluções que possuam determinada regularidade. Para o estudo de soluções periódicas de equações diferenciais parciais, uma ferramenta importante é a Análise de Fourier, que permite representar funções por meio de séries e transformar operações diferenciais em relações algébricas entre seus coeficientes.

Considere, por exemplo, o operador diferencial

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ao procurar uma solução u para $Lu = f$, podemos utilizar a representação de Fourier para transformar essa equação diferencial em uma equação algébrica envolvendo os coeficientes de Fourier de u e f.

Entretanto, essa abordagem leva a uma questão natural:

As soluções dessas equações algébricas descrevem distribuições abstratas, ou funções suaves?

*Universidade Federal do Paraná (UFPR). Graduando em Bacharelado em Matemática. Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).
†Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Para responder a essa questão, faz-se então um estudo preciso do comportamento dos coeficientes de Fourier de distribuições e funções suaves. Para uma breve descrição deste processo, denote por $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$ o toro n-dimensional e seja $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ espaço das funções infinitamente diferenciáveis $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$.

O dual topológico de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, denotado por $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, consiste de todas os funcionais lineares

$$u : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$$

que são contínuos com respeito à topologia padrão de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Em particular, usaremos a notação $u(\theta) = \langle u, \theta\rangle$, para $\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por exemplo, dada uma função localmente integrável $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, mostra-se que o funcional linear $u_f : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\langle u_f, \theta\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\theta(x)dx, \tag{1}$$

pertence a $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Entretanto, ressalta-se que nem toda distribuição pode ser definida de tal forma como, por exemplo, $\delta : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle \delta, \theta\rangle = \theta(0).$$

Assim, uma distribuição não precisa ser uma função no sentido clássico. Desta forma uma das perguntas centrais desta teoria é como saber se uma distribuição é definida através de (1). Para responder essa pergunta, considere a seguinte definição.

Definição 1. *Os coeficientes de Fourier de distribuições periódicas são definidos da seguinte forma:*

- *Para $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, define-se*

$$\widehat{f}(m) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-im\cdot x}\, dx,\ m \in \mathbb{Z}^n.$$

- *Para $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ têm-se*

$$\widehat{u}(m) = (2\pi)^{-n}\langle u, e^{-im\cdot x}\rangle,\ m \in \mathbb{Z}^n.$$

Considere agora a seguinte definição que diz respeito ao comportamento de sequências de números complexos.

Definição 2. *Seja $c = \{c_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ sequência. Dizemos que*

- *c é rapidamente decrescente se, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k},\ \forall m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

- *c tem crescimento lento se existem $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tais que*

$$|c_m| \leq M|m|^k,\ \ \forall m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Princípais

O resultado a seguir estabelece a relação entre o comportamento dos coeficientes de Fourier e a regularidade da série.

Teorema 1. *Sejam $c = \{c_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ sequência e considere a série*

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} c_m e^{im\cdot x}. \tag{2}$$

Nestas condições, têm-se:

(a) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, c é uma sequência de crescimento lento.

(b) $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, c é uma sequência rapidamente decrescente.

Em ambos os casos, têm-se $\widehat{u}(m) = c_m$, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$.

Dessa forma, a análise dos coeficientes de Fourier permite distinguir os comportamentos associados a funções suaves e a distribuições: enquanto a suavidade está relacionada ao decaimento rápido dos coeficientes, as distribuições periódicas são caracterizadas por coeficientes de crescimento lento.

Referências

[1] BOBKO, N., **Hipoeliticidade Global no Toro bidimensional**, Cadernos PET-Matemática-UFPR, 2007.

[2] NASCIMENTO, L. C., **Distribuições Periódicas e Propriedades Globais de Operadores**, Monografia, 2025.

[3] GREENFIELD, S.; WALLACH, N., **Global Hypoellipticity and Liouville Numbers**, Proc. Amer. Math. Soc., 252, 112–114, 1972.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Exponencial de Matrizes e o Método de Putzer

Ruan Eneias Ferreira*
reneiasferreira@gmail.com

Luiz Henrique Bahls†
luizhenriquebahls03@gmail.com

Marciano Pereira (Orientador)‡
marciano@uepg.br

Resumo

O estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares com coeficientes constantes está diretamente relacionado ao cálculo da exponencial de matrizes. Uma EDO linear de ordem superior pode ser transformada em um sistema de primeira ordem, cuja solução é expressa em termos da exponencial da matriz associada. Embora métodos tradicionais baseados em diagonalização ou na Forma Canônica de Jordan forneçam alternativas para o cálculo da exponencial, podem exigir procedimentos algébricos adicionais. Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo estudar a exponencial de matrizes e investigar o método de Putzer como uma alternativa para seu cálculo. Pretende-se compreender a construção do método, baseado no teorema de Cayley-Hamilton, suas propriedades e sua aplicação à determinação da exponencial de matrizes. Por fim, busca-se utilizar os resultados obtidos na resolução de sistemas de equações diferenciais lineares e, consequentemente, de equações diferenciais de ordem superior.

Palavras-chave: Exponencial de matrizes, método de Putzer, sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares, Cayley-Hamilton.

Introdução

O estudo de EDOs lineares com coeficientes constantes é fundamental na matemática aplicada. Consideremos uma EDO linear de ordem n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = R(t),$$

*UEPG. Acadêmico do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada. Voluntário do PICME
†UEPG. Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática.
‡UEPG. Professor doutor em Matemática, DEMAT.

em que $y = y(t)$, $a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais e $R(t)$ é contínua em um intervalo J. Para resolver tal equação, podemos transformá-la num sistema, e para isso, introduzimos novas variáveis, que representam as derivadas sucessivas da função original: $y_1 = y$, $y_2 = y_1'$, $\cdots$, $y_n = y_{n-1}'$; o que resulta no sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \cdots - a_1 y_n + R(t). \end{cases} \tag{1}$$

Isso nos permite escrever (1) na forma matricial

$$Y' = AY + Q(t), \tag{2}$$

em que

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R(t) \end{bmatrix}.$$

No caso particular unidimensional ($n = 1$), a equação linear $y' = ay + q(t)$ com condição inicial $y(0) = y_0$ possui solução via o método do Fator Intregrante, dada por

$$y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} q(s) ds.$$

Para generalizar essa expressão para sistemas de dimensão $n \geq 2$, define-se a exponencial de uma matriz quadrada A de ordem n, por meio da série

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \tag{3}$$

que é absolutamente convergente [1]. Mostra-se que $Y(t) = e^{tA} B$, em que A e B são matrizes quadradas $n \times n$ com entradas constantes, é a única solução do problema de valor inicial $Y'(t) = AY(t)$, $Y(0) = B$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Da mesma forma, a única solução de (2) em J, com condição inicial $Y(0) = Y_0$, é dada por

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Q(s) ds.$$

Então, resolver o sistema diferencial reduz-se ao problema de calcular explicitamente a matriz exponencial e^{tA}, o que descrevemos abaixo via o método de Putzer [2, 3].

O Teorema de Cayley-Hamilton

Se a matriz A é diagonalizável ($A = SDS^{-1}$), o cálculo da exponencial é direto: $e^{tA} = Se^{tD}S^{-1}$. Entretanto, se A não for diagonolizável, então a abordagem exige a determinação da Forma Canônica de Jordan (FCJ), um procedimento pouco prático e trabalhoso. A ferramenta matemática que permite contornar a FCJ e que fundamenta o método de Putzer é o seguinte teorema.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema 1 (Cayley-Hamilton)**.** *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ seu polinômio característico. Então $f(A) = 0$. Ou seja, A satisfaz a equação*

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0.$$

O Teorema de Cayley-Hamilton [1, 3] permite escrever qualquer potência A^m, $m \geq n$, como combinação linear de $\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}$. Assim, a série (3) pode ser simplificada e escrita como uma soma finita de potências de A menores do que n,

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) A^j,$$

em que $p_j(t)$ são funções escalares. O método de Putzer destaca-se como um algoritmo bastante prático para determinar os coeficientes $p_j(t)$.

O Método de Putzer

Em seu artigo de 1966, E. J. Putzer [2] propôs duas fórmulas explícitas para o cálculo de e^{tA} válidas para qualquer matriz quadrada A de entradas constantes. Apresentamos aqui a segunda fórmula de Putzer (Teorema 2 em [2]), cuja formulação é descrita pelo teorema abaixo.

Teorema 2 (Putzer)**.** *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A, matriz de ordem n (não necessariamente distintos), em ordem arbitrária. Então*

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) P_j,$$

em que as matrizes P_j são definidas por $P_0 = I$ e $P_j = \prod_{k=1}^{j}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_j I)P_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, e as funções escalares $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ são soluções do sistema triangular

$$\begin{cases} r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t), \\ r_j'(t) = r_{j-1}(t) + \lambda_j r_j(t), \quad j = 2, \ldots, n, \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $r_1(0) = 1$ e $r_j(0) = 0$, $j \geq 2$.

O método de Putzer simplifica sensivelmente o cálculo da exponencial de matrizes. Ao conectar o polinômio característico e o Teorema de Cayley-Hamilton à resolução de um sistema triangular simples, ele evita o uso da Forma Canônica de Jordan. A abordagem é rica por consolidar noções de Álgebra Linear com equações diferenciais sob uma perspectiva prática e analítica.

Referências

[1] APOSTOL, T. M. **Calculus, Volume II**: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability. 2. ed. Danvers: John Wiley & Sons, 1969.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

[2] PUTZER, E. J. Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients. **The American Mathematical Monthly**, v. 73, n. 1, pp. 2–7, jan., 1966.

[3] RAFFOUL, Y. N. **Advanced Differential Equations**. San Diego: Academic Press, 2023.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Números Racionais e Irracionais. Irracionalidade e Transcendência de π

Daniel Galvão Tibães*
daniel.tibaes@ufpr.br

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)†
wagnermoraes@ufpr.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar e compreender as demonstrações da irracionalidade e da transcendência do número π. Mormente, começamos pela demonstração da irracionalidade dessa constante por meio de propriedades polinomiais e trigonométricas, para que posteriormente, com o uso de funções complexas analíticas, pudéssemos provar a transcendência de π. A abordagem utiliza polinômios auxiliares, além de derivadas e integrais destes polinômios, combinando conceitos de Análise Real e Análise Complexa para se compreender a natureza aritmética do número π.

Palavras-chave: Número Pi, Números Irracionais, Números Transcendentes, Números Reais, Números Algébricos.

Introdução

No estudo dos números reais, duas questões fundamentais podem ser levantadas a respeito das constantes matemáticas. A primeira consiste em determinar se um número é irracional, isto é, se não pode ser representado como uma razão a/b, em que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. A segunda questão, de natureza mais profunda, refere-se à possibilidade de esse número ser raiz de algum polinômio não nulo cujos coeficientes sejam inteiros. Ou seja, a segunda questão refere-se à possibilidade desse número ser algébrico. Caso não exista tal polinômio, o número é denominado transcendente. Nesse contexto, o número π ocupa uma posição de grande relevância, estando presente em diversos resultados da análise e da geometria, além de possuir aplicações fundamentais na Física e nas engenharias. Desse modo, o estudo de suas propriedades aritméticas constitui uma questão de significativa importância matemática.

*UFPR. Graduando em bacharelado em Filosofia
†UFPR. Doutor em Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

As referências utilizadas, Niven [1] e Figueiredo [2], buscam elucidar essas propriedades combinando ferramentas da Análise Real, Teoria dos Números e Análise Complexa.

O objetivo deste trabalho é estudar as demonstrações da irracionalidade de π e de sua transcendência. Para construir as ideias passo a passo, começamos pela prova de irracionalidade e, em seguida, passamos para a demonstração da transcendência.

Resultados Principais

Lema 1. *Dada a função* $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$*, sendo* n *um inteiro positivo,* $D^k f(0), D^k f(1) \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, ...$

Lema 2. *Seja* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *uma função analítica e sejam* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*. Então* $|h(z_2) - h(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup\{|h'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : \lambda \in [0, 1]\}$*, para* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x + iy \in \mathbb{C}$*.*

Lema 3. *Sejam* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *números algébricos tais que os polinômios simétricos elementares* $s_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$*,* $s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j$*, ...,* $s_n = \alpha_1 ... \alpha_n$*, sejam números racionais. Considere agora os* $\binom{n}{j}$ *números algébricos* $\beta_{k_1 ... k_j} = \alpha_{k_1} + ... + \alpha_{k_j}, 1 \leq k_1 < ... < k_j \leq n$*. Então, os polinômios simétricos elementares associados a esses* $\beta' s$ *são também números racionais.*

Lema 4. *Se os* $\alpha' s$ *do Lema 3 são raízes de um polinômio de grau* n*, com coeficientes racionais, então os* $\beta' s$ *são raízes de um polinômio de grau* $\binom{n}{j}$*, com coeficientes racionais.*

Lema 5. *O produto de dois números algébricos é algébrico.*

Teorema 1. π *é irracional.*

Suponha por absurdo que $\pi^2 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $mdc(p, q) = 1$. Defina

$$G(x) = q^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \pi^{2(n-i)} D^{2i} f(x), f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Assim, pelo Lema 1, temos que $G(0), G(1) \in \mathbb{Z}$. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo à função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = G'(x) \sin(\pi x) - \pi G(x) \cos(\pi x)$, temos que:

$$\int_0^1 g'(x) = g(1) - g(0) \implies \pi p^n \int_0^1 f(x) \sin(\pi x)\, dx = G(1) + G(0) \in \mathbb{Z}.$$

Mas, como $0 < p^n \pi f(x) \sin(\pi x) < \frac{p^n \pi}{n!} \sin(\pi x)$ e $\lim_{n \to \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$, podemos escolher n suficientemente grande de tal modo que $G(0) + G(1)$ seja dito um inteiro compreendido entre 0 e 1, o que é evidentemente um absurdo.

Teorema 2. π *é transcendente.*

Suponha por absurdo que π seja algébrico. Assim, pelo Lema 5, $i\pi$ é algébrico. Logo, π é raiz de um polinomio com coeficientes inteiros $P(x)$. Representando as raízes de $P(x)$ por $\alpha_1 = i\pi, ..., \alpha_n$, temos que $\prod_{j=1}^{n} (1 + e^{\alpha_j}) = 0$. Expandindo o produto,

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

obtemos uma expressão da forma 1 + somatório de exponenciais cujos expoentes são:

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \text{ (1.1.1)}$$

$$\alpha_i + \alpha_j, i < j \text{ (1.1.2)}$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, i < j < k \text{ (1.1.2)}$$

$$...$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \text{ (1.1.n)}$$

Pelo Lema 3 e pelo Lema 4, (1.1.1),..., (1.1.n) serão, respectivamente, raízes de polinomios de grau n, $\binom{n}{2}$,..., $\binom{n}{n}$, digamos, $P_1(x), P_2(x), ...P_n(x)$. Logo, (1.1.1),..., (1.1.n) serão raízes da equação polinomial $P_1(x)P_2(x)P_3(x)...P_n(x) = 0$ que, por sua vez, podemos supor que possui m raízes não nulas $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$. Simplificando os fatores $x^q, q > 0$, temos que $\beta_1, ..., \beta_m$ são raízes de uma equação polinominal $R(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + ... + c_0$ e que $k + e^{\beta_1} + ... + e^{\beta_m} = 0$.

Considere as funções $P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}x^{p-1}(R(x))^p$ e $F(x) = \sum_{j=0}^{s+p} P^{(j)}(x)$, sendo $s = mp - 1$ e p um número primo. Assim, aplicando o Lema 2 à função $k(z) = e^{-z}F(z)$ e definindo $\varepsilon_j = 2|\beta_j| \sup\{|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : \lambda \in [0, 1]\}$, temos que $|\sum_{j=1}^m F(\beta_j) + kF(0)| \leq \sum_{j=1}^m \varepsilon_j$. Por fim, mostraremos que $|\sum_{j=1}^m F(\beta_j) + kF(0)|$ é um inteiro não nulo e que $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j$ é menor do que 1, chegando-se, assim, no absurdo de que afirmar que há um inteiro entre 0 e 1.

Referências

[1] NIVEN, I. **Números:** Racionais e Irracionais. Tradução de Renate Watanabe. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1984.

[2] FIGUEIREDO, D. G. **Números Irracionais e Transcendentes**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção Matemática Universitária, 2002.

VERSÃO PROVISÓRIA

Um Estudo Sobre a Irracionalidade e Transcendência de e

Gustavo Guimarães de Souza*
gustavogsouza@ufpr.br

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)
wagnermoraes@ufpr.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar e compreender as demonstrações da irracionalidade e da transcendência da constante de Euler (e). Iniciamos pelo estudo da irracionalidade a partir da expansão em séries de potências e, em seguida, aprofundamos a questão da transcendência através do método clássico introduzido por Charles Hermite em 1873. A abordagem utiliza polinômios auxiliares e integrais com a função exponencial, combinando conceitos de Análise Real e propriedades básicas de divisibilidade inteira para caracterizar a natureza aritmética de e.

Palavras-chave: Constante de Euler, Números Irracionais, Números Transcendentes, Teorema de Hermite, Números Algébricos.

Introdução

Ao estudar os números reais $\mathbb{R}$, duas perguntas fundamentais surgem sobre as constantes matemáticas. A primeira é saber se um número é irracional, ou seja, se não pode ser escrito na forma a/b, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. A segunda, mais profunda, é saber se ele é raiz de algum polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Quando isso não acontece, dizemos que o número é transcendente. A constante de Euler, denotada por e, é central no cálculo e na análise, e entender a sua natureza aritmética é um problema clássico essencial.

Compreender a irracionalidade e a transcendência de e nos ajuda a entender melhor a própria estrutura da reta real. Além de provar que e não é racional, é fundamental mostrar que ele também não pode ser obtido como raiz de equações algébricas. As referências que utilizamos, Niven [1] e Figueiredo [2], tratam esses problemas combinando ferramentas da Análise Real e da Teoria dos Números.

O objetivo deste trabalho é estudar as demonstrações da irracionalidade de e e de sua transcendência, tendo como resultado principal o método analítico desenvolvido

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

por Charles Hermite em 1873. Para construir as ideias passo a passo, começamos pela prova de irracionalidade por séries de potências e, em seguida, passamos para a demonstração da transcendência.

Resultados Principais

Definição 1. *Dizemos que um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ se existirem $n \in \mathbb{N}$ e inteiros $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$, com $c_n \neq 0$, tais que:*

$$c_n\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0 = 0.$$

Caso não exista tal polinômio não nulo, α é dito transcendente.

O primeiro passo é estabelecer a irracionalidade de e.

Teorema 1. *O número $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é irracional .*

A ideia da demonstração consiste em supor, por redução ao absurdo, que $e = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Definindo a soma parcial $s_b = \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}$ e avaliando a quantidade $b!(e - s_b)$, mostra-se que tal termo resulta em um número inteiro estritamente compreendido entre 0 e 1, resultando em uma contradição que conclui a prova.

Para a prova da transcendência, Hermite introduziu uma família de polinômios e integrais ponderadas pela função exponencial.

Definição 2. *Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $p > m$ um número primo. Definimos o polinômio auxiliar $f(x)$ de grau $N = (m+1)p - 1$ e a função $F(x)$ por:*

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-m)^p, \qquad F(x) = \sum_{j=0}^{N} f^{(j)}(x).$$

As propriedades básicas dessas funções são dadas a seguir.

Lema 1. *Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, temos a identidade integral:*

$$I_k = \int_0^k e^{k-t} f(t)\, dt = e^k F(0) - F(k).$$

Lema 2. *Para um número primo p suficientemente grande, temos que:*

(a) *$F(0)$ é um número inteiro divisível por $(p-1)!$, mas não é divisível por p;*

(b) *$F(k)$ é um número inteiro divisível por p, para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$;*

(c) *As integrais satisfazem $\lim_{p\to\infty} I_k = 0$, para cada $k \in \{0, \ldots, m\}$.*

Com esses lemas, obtemos a demonstração da transcendência da constante de Euler.

Teorema 2 (Hermite, 1873)**.** *O número e é transcendente.*

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Para a prova da transcendência, o caminho é supor, por absurdo, que e é algébrico. Nesse caso, existem inteiros $a_0, \ldots, a_m$, com $a_0 \neq 0$, tais que $\sum_{k=0}^{m} a_k e^k = 0$. Aplicando o Lema 1, obtemos a relação:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k I_k = -\sum_{k=0}^{m} a_k F(k).$$

A contradição é obtida confrontando o comportamento dos dois lados para um número primo p suficientemente grande:

- Pelo Lema 2(a)-(b), tomando $p > |a_0|$, a soma $-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k)$ é um número inteiro não nulo;
- Pelo Lema 2(c), como $\lim_{p\to\infty} I_k = 0$, temos que $|\sum_{k=0}^{m} a_k I_k| < 1$ para p grande.

Como os dois lados são iguais e não nulos, a expressão resulta em um número inteiro que satisfaz:

$$0 < \left|\sum_{k=0}^{m} a_k I_k\right| < 1,$$

o que é impossível e encerra a prova, mostrando que e não é algébrico, logo é transcendente.

O método de Hermite mostra como a combinação entre cálculo integral e propriedades aritméticas elementares de divisibilidade fornece um caminho sólido para analisar a estrutura dos números transcendentes na reta real.

Referências

[1] NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Tradução de Renate Watanabe. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1984.

[2] FIGUEIREDO, D. G. de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção Matemática Universitária, 2002.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Uma Introdução ao Oscilador de Duffing

Celestia Piccioni *
cely42piccioni@gmail.com

Ailin Ruiz de Zarate Fabregas (Orientadora)†
ailin@ufpr.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o oscilador de Duffing, dado pela equação diferencial $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t$, que é utilizado para modelar vibrações, propriedades eletromagnéticas em circuitos, dentre outras aplicações. Iremos entender o papel dos parâmetros e termos, a aplicação do plano de van der Pol quando uma força externa fraca é aplicada, e os atratores no caso caótico.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Oscilador de Duffing.

Introdução

Em um sistema de massa-mola clássico, temos que a força restauradora da mola é dada por $F(x) = -kx$, onde k é a constante elástica da mola e x é a deformação. Se tivermos uma massa unitária, então $\ddot{x} = -kx$, ou seja,

$$\ddot{x} + kx = 0. \tag{1}$$

Agora, se a mola for não linear, então podemos aproximar a força restauradora por $F(x) = -kx - \alpha x^3$ e com o mesmo procedimento obtemos $\ddot{x} + kx + \alpha x^3 = 0$. Por fim, adicionando um fator de amortecimento $\delta\dot{x}$, com $\delta \geq 0$, e uma força externa harmônica $\gamma \cos \omega t$, obtemos o oscilador de Duffing:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t. \tag{2}$$

*Universidade Federal do Paraná. Discente de Bacharelado em Física. Bolsista do PICME.
†Universidade Federal do Paraná. Doutora em Matemática.

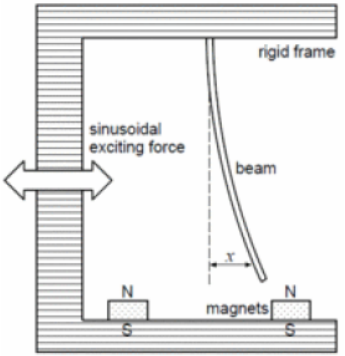
VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

Para interpretar melhor a equação, vamos primeiro supor que $\beta > 0$. Nesse caso podemos ver a Equação 2 como um sistema cuja mola possui uma força restauradora igual a $F(x) = -\beta x - \alpha x^3$. Assim, quando $\alpha > 0$ temos uma mola com endurecimento, enquanto que $\alpha < 0$ nos entrega uma mola com amolecimento.

Por outro lado, quando $\beta < 0$, podemos interpretar o sistema como uma viga metálica com uma das extremidades fixa, enquanto a outra está livre para oscilar entre dois ímãs, enquanto que todo o aparato recebe uma força externa harmônica, conforme Figura 1.

Figura 1: Viga metálica oscilando entre dois ímãs, enquanto todo o aparato sofre uma força harmônica



Fonte: Scholarpedia [3]

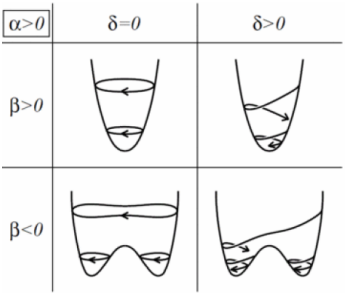
Em seguida podemos avaliar o sistema quando não há força externa aplicada. Quando $\delta = 0$, podemos integrar a equação e obter a função hamiltoniana

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4 = \texttt{constante}. \tag{3}$$

Podemos então estudar o comportamento dessa função para diferentes valores dos parâmetros, conforme descrito na Figura 2.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Figura 2: Formato da função hamiltoniana $E(t)$



Fonte: Scholarpedia [3]

Adicionamos, então, uma força fraca externa periódica. Escrevendo $\beta \to \omega_0^2$, $\alpha \to \epsilon\alpha$, $\gamma \to \epsilon\gamma$ e $\delta \to \epsilon\delta$, temos

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon(-\delta\dot{x} - \alpha x^3 + \gamma\cos\omega t). \tag{4}$$

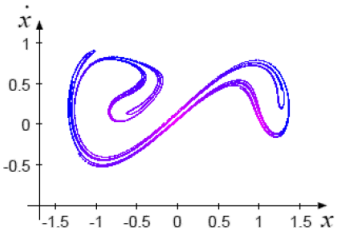
Como ω_0^2 é positivo, a Equação 4 pode ser interpretada como a resposta de uma mola fracamente não linear para uma força periódica fraca, que podemos estudar através de uma transformação de van der Pol.

Por fim, se quisermos analisar a resposta do sistema a uma força periódica qualquer, podemos reescrever a Equação 2 como:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\delta\dot{x} - \beta x - \alpha x^3 + \gamma\cos\psi \\ \omega \end{pmatrix}, \tag{5}$$

em que $\psi(0) = 0$. Se plotamos o plano $(x, \dot{x})$, quando o sistema cruza pela seção de Poincaré $\psi(x) = \psi(\texttt{constante})$, então para certos valores dos parâmetros aparece um atrator, conforme Figura 3.

Figura 3: Atrator caótico de Duffing



Fonte: Scholarpedia [3]

A diversidade dos comportamentos relatados revela a complexidade dos modelos não lineares e motiva o aprofundamento no seu estudo.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear Oscilations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vectors Fields**. New York: Springer, 1983.

[2] BRENNAN, M. J.; KOVACIC, I. **The Duffing Equation Nonlinear Oscillators and their Behaviour**. Chichester: Wiley, 2011.

[3] KANAMARU, T., Scholarpedia, 3(3):6327. Disponível em: http://scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator. Acesso em: 2 de setembro de 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Uma Introdução às Séries de Fourier

Luiza Soethe Avila[1]
luizaavilasa@gmail.com

Bruno de Lessa Victor (Orientador)[2]
bruno.lessa@ufsc.br

Resumo

O principal propósito deste projeto consiste em uma introdução às Séries de Fourier, sob um ponto de vista matemático. Para isso, após o estudo das ferramentas necessárias da Análise Real, aplicamos esses conceitos na investigação das principais propriedades das Séries de Fourier, com enfoque na convergência e na aplicação em algumas Equações Diferenciais Parciais.

Palavras-chave: Séries de Fourier, Análise Real, Convergência, Equações Diferenciais Parciais.

Introdução

A *Análise Real* é um campo de estudo que surgiu inicialmente com a ideia de formalizar o *Cálculo*, sendo de extrema importância para a Matemática e para outras áreas da Ciência. Com o seu desenvolvimento ao longo dos séculos, tornou-se uma ferramenta essencial para praticamente todos os ramos da Matemática e uma linguagem fundamental para o desenvolvimento de teorias em áreas como Física, Probabilidade e Estatística, Química, Biologia e Economia.

De forma semelhante, a ideia da expansão de uma função periódica em uma série trigonométrica possui grande relevância histórica e moderna. Nesse sentido, o surgimento das Séries de Fourier motivaram a formalização de conceitos como *função*, *integral*, *convergência* e *convergência uniforme*. Atualmente, representam um dos maiores pilares da Teoria de Equações Diferenciais Parciais, sendo uma técnica utilizada nos estudos, por exemplo, da equação do Calor, das equações de Laplace e da Onda. Além disso, as Séries de Fourier possuem aplicações, por exemplo, no processamento de imagens e sinais, no estudo de circuitos elétricos e no estudo de ondas em Óptica e Acústica, na Mecânica Quântica, na Teoria de Controle, na Teoria de Probabilidade e Mecânica Estatística.

[1]Universidade Federal de Santa Catarina. Graduanda em Matemática - Licenciatura. Bolsista do CNPq-Brasil.
[2]Universidade Federal de Santa Catarina. Doutor em Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

Teorema de Fourier. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período 2L. Então a série de Fourier da função f, dada por $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)$, converge, em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é, $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)$ (DE FIGUEIREDO, 1997, pág. 21).

Teorema sobre a Integração de Séries de Fourier. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2L e seccionalmente contínua e seja $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)$ sua série de Fourier. Então: (i) a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de f; mais precisamente, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_a^b cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n \int_a^b sen\frac{n\pi x}{L}dx\right)$ (DE FIGUEIREDO, 1997, pág. 33).

Teorema 3.3 (primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier) ([3]). Seja f uma função periódica de período 2L, contínua e com derivada primeira integrável e absolutamente integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f. (DE FIGUEIREDO, 1997, pág. 69).

Referências

APOSTOL, T. M. Mathematical Analysis. 1974.

BEALS, R. Advanced mathematical analysis: periodic functions and distributions, complex analysis, Laplace transform and applications (Vol. 12). Springer Science & Business Media, 2013.

DE FIGUEIREDO, D. G. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

LIMA, E. L. Curso de Análise, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

VERSÃO PROVISÓRIA

Versões Multidimensionais do Teorema de Rolle e a Conjectura de Furi e Martelli

Ana Caroline da Silva*
23000409@uepg.br

Dr. Marciano Pereira (Orientador)†
marciano@uepg.br

Resumo

Este trabalho investiga extensões multidimensionais do clássico Teorema de Rolle, resultado fundamental da Análise Real. Inicialmente, apresentam-se contraexemplos que mostram a impossibilidade de sua generalização direta para dimensões superiores. Em seguida, são estudadas versões adaptadas do teorema em espaços euclidianos e no plano complexo, com demonstrações e aplicações. Por fim, analisa-se a conjectura proposta por Furi e Martelli, segundo a qual fenômenos análogos ao Teorema de Rolle falham em espaços de Banach de dimensão infinita, resultado posteriormente confirmado por Ferrer.

Palavras-chave: Teorema de Rolle, Espaços Euclidianos, Plano Complexo, Dimensão Infinita.

Introdução

O Teorema de Rolle, desenvolvido pelo matemático francês Michel Rolle (1652-1719), é um resultado clássico da Análise Matemática e possui um papel fundamental para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real. Sua formulação estabelece que, sob certas hipóteses de continuidade e diferenciabilidade, toda função real que assume valores iguais em dois pontos possui ao menos um ponto intermediário no qual a derivada se anula.

Devido à sua importância, uma questão natural é investigar se o Teorema de Rolle permanece válido para funções definidas em espaços de dimensões maiores, motivo pelo qual sua generalização despertou grande interesse. Entretanto, existem contraexemplos [3] que evidenciam a não validade direta do teorema em contextos multidimensionais. Sendo assim, reformulações, obtidas por modificações em suas hipóteses e conclusões, foram propostas [2, 3]. Além disso, M. Furi e M. Martelli conjecturaram a não extensão do Teorema de Rolle em um espaço de dimensão infinita, sendo sua validade demonstrada por J. Ferrer [1].

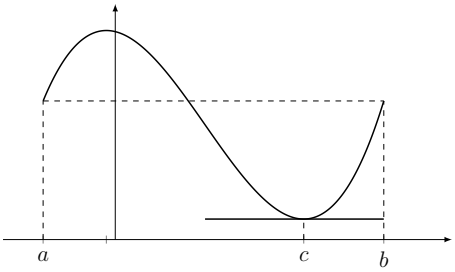
*Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Bacharelado em Matemática Aplicada. Bolsista PIBIC/UEPG.
†Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG).

VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

O Teorema de Rolle garante que uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e diferenciável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, possui derivada nula em pelo menos um ponto c de (a, b). Ou seja, $f'(c) = 0$. Geometricamente, concluí-se que existe uma reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ paralela a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ quando as hipóteses acima são satisfeitas. Tal resultado é garantido pelo fato de que a imagem de um compacto por uma função contínua é compacto e pelo Teorema de Weierstrass.

Figura 1: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle.



Fonte: A autora.

Para motivar a modificação do teorema acima, considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função dada por $f(x, y) = (x^3 + xy^2 - x, yx^2 + y^3 - y)$. Note que f é contínua na bola fechada $B[(0, 0), 1]$, diferenciável na bola aberta $B((0, 0), 1)$ e, além disso, para todo $(x, y) \in S((0, 0), 1)$, tem-se $f(x, y) = (0, 0)$. A matriz Jacobiana de f num ponto (x, y) é da forma

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 - 1 & 2xy \\ 2xy & x^2 + 3y^2 - 1 \end{bmatrix},$$

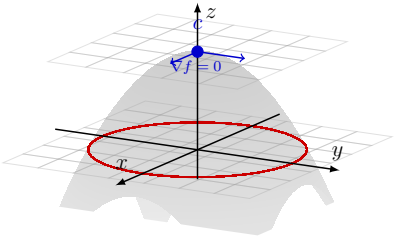
a qual é diferente da matriz nula de ordem 2×2 para qualquer $(x, y) \in B((0, 0), 1)$. Ou seja, o Teorema de Rolle não vale diretamente e a seguinte reformulação é apresentada.

Teorema 1 ([2, 3])**.** *Seja $f : B[x_0, r] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua em $B[x_0, r]$ e diferenciável em $B(x_0, r)$. Assumindo que existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $v \cdot f(x) = 0$, para todo $x \in S(x_0, r)$, então existe $c \in B(x_0, r)$ tal que $v \cdot f'(c)u = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.*

Geometricamente, isso significa que se $f(S(x_0, r))$ estiver contida no hiperplano $H = v^{\perp}$, então existe $c \in B(x_0, r)$ tal que $\mathrm{Im} f'(c)$ está contida em um hiperplano paralelo a H. Por exemplo, se $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, então $f(S(0, 1)) = \{0\}$. Pelo Teorema 1, a existência de $c \in B(0, 1)$ tal que $f'(c) = \nabla f(c) = 0$ é garantida. De fato, $c = (0, 0)$ e o plano tangente ao gráfico de f nesse ponto é o plano horizontal $z = 1$, paralelo ao plano $z = 0$ que contém $f(S(0, 1))$, conforme ilustra a Figura 2.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Figura 2: Interpretação geométrica do Teorema 1.



Fonte: A autora.

Agora, considere a função de uma variável complexa $f(z) = e^z - 1$. Note que f é analítica e, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $f(2k\pi i) = e^{2k\pi i} - 1 = 0$. No entanto, $f'(z) = e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, o Teorema de Rolle também não é válido diretamente e apresenta-se o seguinte resultado.

Teorema 2 ([2, 3])**.** *Seja f uma função analítica definida em um aberto convexo $D \subset \mathbb{C}$. Sejam $a, b \in D$, $a \neq b$, tais que $f(a) = 0 = f(b)$. Então existem complexos z_1 e z_2 no segmento de reta que liga a e b tais que*

$$\mathrm{Re}(f'(z_1)) = 0 \quad \textit{e} \quad \mathrm{Im}(f'(z_2)) = 0.$$

Por fim, M. Furi e M. Martelli conjecturaram a possibilidade de que o *Teorema 1* é falso quando o domínio de f, $\mathbb{R}^n$, é substituído por um espaço de Banach de dimensão infinita $\mathbb{E}$. Para demonstrar isso, considere o espaço $\mathbb{E} = \ell_2$, das sequências reais de quadrado somáveis, e a função $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - T(x)\|^2},$$

em que $T : \ell_2 \to \ell_2$ é definida por $T(x) = (1/2 - \|x\|^2)e_1 + Rx$, sendo R o operador *shift* à direita. J. Ferrer [1] prova a conjectura de Furi e Martelli através do fato $f|S(0,1) = 0$ e $f'(x) \neq 0$, para qualquer $x \in B(0,1)$. Portanto, conclui-se que existem diferenças profundas entre espaços de dimensão finita e infinita.

Referências

[1] Ferrer, J. **Rolle's Theorem Fails in l_2**. The American Mathematical Monthly, v. 103, n. 2, p. 161-165, 1996.

[2] Furi, M.; Martelli, M. **A Multidimensional Version of Rolle's Theorem**. The American Mathematical Monthly, v. 102, n. 3, p. 243-249, 1995.

[3] Sahoo, P. K.; Riedel, T. **Mean Value Theorems and Functional Equations**. Singapore: World Scientific, 1998.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Análise Numérica

Comissão Científica:

Em breve!

Banca Avaliadora:

Em breve!

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Fundamentos de Álgebra Linear para Análise de Componentes Principais (PCA)

Júlia Menegildo*
julia.menegildo@grad.ufsc.br

Profª Drª Maria Eduarda Pinheiro (Orientadora)†
maria.eduarda.pinheiro@ufsc.br

Resumo

A Análise de Componentes Principais (PCA) é uma técnica de redução de dimensionalidade que busca projetar um conjunto de dados em um subespaço de menor dimensão, minimizando a perda de informação. Neste trabalho, são desenvolvidos os conceitos de Álgebra Linear necessários à formulação desse problema. Para isso, assumindo dados centrados, apresentam-se os conceitos de bases ortonormais e projeções ortogonais, e introduzem-se a norma espectral e a norma de Frobenius. Como resultado principal, mostra-se que minimizar o erro de reconstrução $\|X - WW^\top X\|_F^2$ equivale a maximizar $\mathrm{tr}(W^\top XX^\top W)$, reduzindo a PCA a um problema de autovalores de $XX^\top$.

Palavras-chave: Álgebra Linear, PCA, projeção ortogonal, norma de Frobenius.

Introdução

A Análise de Componentes Principais (PCA) é uma técnica utilizada para reduzir a dimensionalidade de conjuntos de dados, preservando a maior quantidade possível de informação relevante. Considere n observações, cada uma descrita por m variáveis reais, organizadas em

$$X = [x_1 \ \cdots \ x_n] \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

em que cada coluna $x_j \in \mathbb{R}^m$ representa uma observação. Sem perda de generalidade assumimos que os dados estão centrados na média.

Quando m é grande, manipular e interpretar X diretamente torna-se custoso. A PCA procura um subespaço de dimensão $r < m$ no qual as observações possam ser projetadas, minimizando a perda de informação. Para fundamentar essa construção, serão utilizados conceitos fundamentais de Álgebra Linear, como ortogonalidade, projeções ortogonais e normas matriciais, necessários à formulação do problema.

*Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Campus Blumenau. Graduanda em Licenciatura em Matemática.

†Departamento de Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Blumenau. Doutora.

VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

Fixada uma dimensão $r < m$, buscamos uma matriz $W = [w_1 \cdots w_r] \in \mathbb{R}^{m\times r}$ tal que cada observação x_j possa ser aproximada por uma combinação linear das colunas de W:

$$x_j \approx \sum_{i=1}^{r} h_{ij}\, w_i = W h_j, \tag{1}$$

onde $h_j = [h_{1j}, \ldots, h_{rj}]^\top \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de coordenadas reduzidas. Nesse ponto ocorre a redução de dimensionalidade: em vez de armazenar $x_j \in \mathbb{R}^m$, passa-se a representá-lo por $h_j \in \mathbb{R}^r$. Denotando $H = [h_1 \cdots h_n] \in \mathbb{R}^{r\times n}$, a aproximação (1) assume a forma matricial

$$X \approx WH. \tag{2}$$

Para determinar W e H de forma ótima, exige-se que as colunas de W sejam ortonormais, isto é, $W^\top W = I_r$. Sob essa condição, a projeção ortogonal de cada observação x_j sobre o subespaço gerado pelas colunas de W fornece explicitamente as coordenadas $h_j = W^\top x_j$, de modo que $H = W^\top X$ e a aproximação de x_j é $\hat{x}_j = WW^\top x_j$.

Para medir a qualidade da aproximação (2), precisamos quantificar o "tamanho" da matriz de erro $X - WW^\top X$. Uma maneira natural é por meio de normas matriciais.

Definição 1. *A **norma espectral** (ou norma 2) de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é*

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

em que $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana, isto é, $\|y\| = \sqrt{y^\top y}$ para $y \in \mathbb{R}^m$.

Geometricamente, $\|A\|$ é o comprimento do maior semi-eixo da hiperelipse que é a imagem da esfera unitária pela transformação A. Pode-se mostrar que $\|A\|^2$ é o maior autovalor de $A^\top A$.

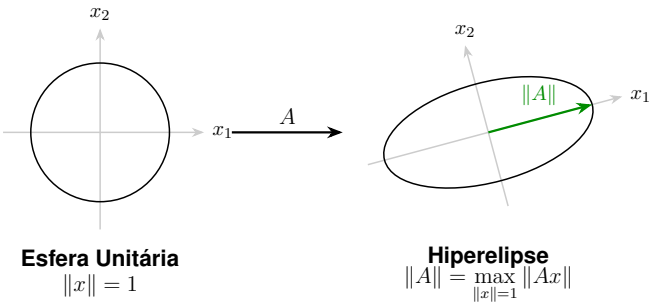


Figura 1: Interpretação geométrica da norma espectral $\|A\|$.

Como obter a norma espectral nem sempre é simples, também utilizamos a norma de Frobenius.

Definição 2. *A **norma de Frobenius** de uma matriz $A = [a_1 \cdots a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|a_j\|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\top A)},$$

onde tr *denota o traço, isto é, a soma dos elementos da diagonal.*

A norma de Frobenius mede o erro total de reconstrução sobre todas as observações simultaneamente: $\|X - WW^\top X\|_F^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j - WW^\top x_j\|^2$.

Assim, o problema da PCA consiste em encontrar W com colunas ortonormais que minimize o erro de reconstrução:

$$\min_{W^\top W = I_r} \|X - WW^\top X\|_F^2 = \min_{W^\top W = I_r} \sum_{j=1}^{n} \|x_j - WW^\top x_j\|^2. \tag{3}$$

Como $\hat{x}_j = WW^\top x_j$ é a projeção ortogonal de x_j sobre $\mathrm{Im}(W)$, o resíduo $x_j - \hat{x}_j$ é ortogonal a $\hat{x}_j$. Pelo teorema de Pitágoras, $\|x_j\|^2 = \|\hat{x}_j\|^2 + \|x_j - \hat{x}_j\|^2$ para cada j. Somando:

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j - \hat{x}_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \|\hat{x}_j\|^2. \tag{4}$$

Como $\sum_j \|x_j\|^2$ independe de W, minimizar o erro equivale a maximizar $\sum_j \|\hat{x}_j\|^2$. Usando $W^\top W = I_r$, calcula-se:

$$\sum_{j=1}^{n} \|\hat{x}_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|W^\top x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^\top WW^\top x_j = \mathrm{tr}(W^\top XX^\top W). \tag{5}$$

Portanto, o problema (3) é equivalente a

$$\max_{W^\top W = I_r} \mathrm{tr}(W^\top XX^\top W). \tag{6}$$

Sob a hipótese de centralização, a matriz $S = \frac{1}{n} XX^\top$ é a matriz de covariância dos dados, e $\mathrm{tr}(W^\top XX^\top W)$ mede a variância total capturada pela projeção. O resultado fundamental é que o máximo de (6) é atingido quando as colunas de W são os autovetores de $XX^\top$ associados aos r maiores autovalores, resultado garantido pelo Teorema Espectral para matrizes simétricas.

Referências

[1] STRANG, G. **Introduction to Linear Algebra.** 5. ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2016.

[2] LAY, D. C.; LAY, S. R.; McDONALD, J. J. **Álgebra Linear e suas Aplicações.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

[3] TREFETHEN, L. N.; BAU III, D. **Numerical Linear Algebra.** Philadelphia: SIAM, 1997.

VERSÃO PROVISÓRIA

Método de Newton: Formulação, Convergência e Aplicações em Múltiplas Dimensões

Gabriela Saki Kunii *
gabriela.saki@ufpr.br

Ailin Ruiz de Zarate Fabregas (Orientadora)†
ailin@ufpr.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise do Método de Newton aplicado à resolução de equações e sistemas não lineares. No domínio real ($\mathbb{R}$), destacam-se as condições de convergência local e global com taxa quadrática, fundamentadas na aproximação linear por reta tangente. Para sistemas de n equações não lineares ($\mathbb{R}^n$), a generalização se baseia na expansão em série de Taylor de primeira ordem, utilizando a matriz Jacobiana. Enfatiza-se a relevância de resolver o sistema linear resultante em cada ponto de iteração por métodos diretos, evitando a inversão explícita da matriz Jacobiana para mitigar custos computacionais e instabilidades numéricas. Por fim, estende-se o método ao plano complexo ($\mathbb{C}$) no qual a convergência para encontrar as raízes do sistema $f(z) = 0$ depende estritamente da estimativa inicial z_0. O estudo consolida a formulação matemática e o comportamento numérico do algoritmo nesses três contextos.

Palavras-chave: Método de Newton-Raphson, processos iterativos, convergência, série de Taylor

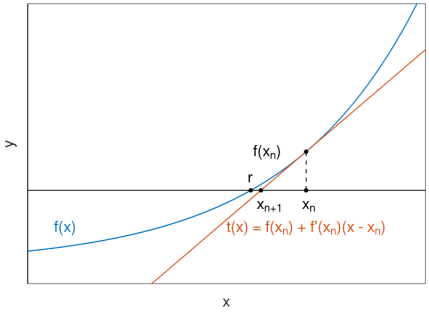
Introdução

Os métodos iterativos são uma alternativa na busca por raízes de equações, já que elas nem sempre podem ser obtidas de forma exata, ou o procedimento para encontrá-las é difícil ou trabalhoso demais. Formulado originalmente por Isaac Newton no século XVII e posteriormente formalizado por Joseph Raphson, o método de Newton-Raphson para equações no domínio real e as versões para sistemas englobados na denominação de métodos de Newton tornaram-se muito importantes na Matemática, servindo de base para algoritmos de otimização, engenharias e simulações científicas.

*UFPR. Discente bolsista do Programa de Educação Tutorial(PET).
†UFPR. Dra.

VERSÃO PROVISÓRIA

Figura 1: Representação geométrica do método de Newton-Raphson



Fonte: A autora.

O método de Newton-Raphson se baseia na linearização de funções: a partir de um ponto inicial x_0, a curva $f(x)$ é aproximada por sua reta tangente. O ponto onde essa tangente cruza o eixo das abscissas define o próximo ponto de iteração x_1, gerando uma sequência que avança em direção a uma raiz sob certas condições. Uma intuição geométrica do algoritmo é apresentada na Figura 1.

Garantida a convergência do método, outra característica que o torna especial é a forma como ele converge, pois a precisão do valor de aproximação da raiz dobra a cada iteração. Computacionalmente, a convergência quadrática torna o algoritmo extremamente rápido, pois exige menos iterações quando comparado a outros métodos iterativos. Também na aplicação do método para funções definidas no $\mathbb{R}^n$ busca-se diminuir o custo computacional, quando são utilizados métodos diretos para resolver um sistema associado ao problema.

O objetivo deste trabalho é analisar a formulação e o comportamento numérico do Método de Newton-Raphson nas dimensões univariada ($\mathbb{R}$), multivariada ($\mathbb{R}^n$) e complexa ($\mathbb{C}$).

Resultados Principais

0.1 Fórmula Iterativa

O Método de Newton-Raphson consiste em aproximar uma função $f(x)$ por meio de sua reta tangente no ponto $(x_n, f(x_n))$. Ao determinar a intersecção dessa reta tangente com o eixo das abscissas, obtém-se a relação iterativa que aproxima sucessivamente a raiz procurada [2]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

0.2 Teoremas de Convergência em $\mathbb{R}$

A convergência do método é garantida nas seguintes condições:

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema 1 ([1])**.** *Seja f'' contínua e seja r um zero simples de f. Então existe uma vizinhança de r e uma constante C tal que, se o Método de Newton for iniciado nessa vizinhança, os pontos sucessivos aproximam-se de r e satisfazem*

$$|x_{n+1} - r| \leqq C(x_n - r)^2 \quad (n \geqq 0).$$

Teorema 2 ([1])**.** *Se f pertence a $C^2(\mathbb{R})$, é crescente, é convexa e possui um zero, então esse zero é único, e a iteração de Newton-Raphson convergerá para ele a partir de qualquer ponto inicial.*

0.3 Generalização para Sistemas Não Lineares ($\mathbb{R}^n$)

Para encontrar a solução de um sistema de n equações não lineares com n variáveis, representado na forma vetorial $F(X) = 0$, a ideia do método de Newton permanece a mesma do caso para uma variável: aproxima-se a função por sua expressão linear em torno do ponto de iteração.

Para isso, utiliza-se a expansão em série de Taylor de primeira ordem $F(X + H) \approx F(X) + J(X)H$, onde $J(X)$ é a matriz Jacobiana (contendo as derivadas parciais de primeira ordem de cada equação). Impondo que essa aproximação linear seja nula, obtém-se o sistema que determina o vetor de correção H.

A cada passo, o novo ponto $X^{(k+1)}$ é atualizado somando-se a correção $H^{(k)}$ ao ponto anterior $X^{(k)}$. Em vez de calcular a inversa da matriz Jacobiana — o que seria computacionalmente custoso e instável —, o vetor de correção é obtido resolvendo diretamente o sistema linear

$$J(X^{(k)})H^{(k)} = -F(X^{(k)}),$$

por métodos diretos, como a eliminação gaussiana.

0.4 Extensão para o Domínio Complexo ($\mathbb{C}$)

A aplicação do Método de Newton para determinar raízes de equações complexas $f(z) = 0$, com $z \in \mathbb{C}$, segue a mesma estrutura algébrica da expressão para uma variável real [2]:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

A convergência para as raízes complexas depende fortemente da escolha da estimativa inicial z_0, a qual determina a qual zero da função o processo iterativo irá convergir.

Referências

[1] KINCAID, D.; CHENEY, W. **Numerical Analysis:** Mathematics of Scientific Computing. Pacific Grove: Brooks/Cole, 1991.

[2] CUNHA, C. **Métodos Numéricos.** 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

[3] RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Otimização Contínua:** aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VERSÃO PROVISÓRIA

Métodos ENO e WENO para Problemas Hiperbólicos

Lucas Bisoni*
lucas.bisoni@ufpr.br

Prof. Dr. Thiago de Oliveira Quinelato (Orientador)†
thiago.quinelato@ufpr.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo dos sistemas hiperbólicos de leis de conservação. Em especial, o interesse está direcionado para a análise e implementação de métodos de volumes finitos para a modelagem e resolução de tais problemas, com ênfase nos métodos do tipo *Essentially Non-Oscillatory* (ENO) e *Weighted Essentially Non-Oscillatory* (WENO). Nesse sentido, visa-se revisar a bibliografia referente à teoria das leis de conservação hiperbólicas, investigando fenômenos característicos para essa classe de problemas, como a formação de choques e leques de rarefação, além da aproximação numérica de soluções a partir da implementação computacional de um método do tipo ENO de ordem 3 e de um método do tipo WENO de ordem 5.

Palavras-chave: problemas hiperbólicos, leis de conservação, volumes finitos, ENO, WENO.

Introdução

As leis de conservação hiperbólicas são uma classe de sistemas de equações diferenciais parciais capazes de modelar diversos fenômenos relacionados à conservação de grandezas físicas e ao seu transporte advectivo, sendo aplicadas em áreas como a dinâmica dos gases, a acústica, a ótica e a geofísica. Algumas características desses sistemas, oriundas de sua natureza e descrição matemática, os tornam particularmente interessantes e geram desafios específicos para o desenvolvimento de métodos resolutivos. Um exemplo disso é a formação de descontinuidades nas suas soluções, que pode ocorrer mesmo quando as condições iniciais do problema são suaves.

*Universidade Federal do Paraná (UFPR). Graduando em Licenciatura em Matemática. Voluntário do Programa de Iniciação Científica (PIBIC) - Edição 2025.
†Universidade Federal do Paraná (UFPR). Doutor em Modelagem Computacional (LNCC).

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

O aparecimento de descontinuidades exige a utilização de métodos numéricos que sejam capazes de representar transições abruptas sem introduzir oscilações espúrias ou difusão excessiva, fator que é especialmente relevante nas investigações associadas ao problema de Riemann. Nesse âmbito, os métodos do tipo *Essentially Non-Oscillatory* (ENO) e *Weighted Essentially Non-Oscillatory* (WENO) representam algumas das principais estratégias numéricas para aproximar as soluções das leis de conservação hiperbólicas. Isso ocorre por duas razões principais: primeiramente, sua construção adaptativa permite selecionar ou formar, de acordo com o comportamento local da solução, reconstruções adequadas para regiões não suaves; em segundo lugar, quando incorporados a uma formulação de volumes finitos, eles permitem construir aproximações que respeitam as propriedades de conservação das grandezas de interesse.

Desse modo, o objetivo deste trabalho é estudar aspectos teóricos e computacionais relacionados às leis de conservação hiperbólicas, com ênfase na descrição matemática das leis de conservação e na formulação dos métodos de volumes finitos, em especial do tipo *Essentially Non-Oscillatory* (ENO) e *Weighted Essentially Non-Oscillatory* (WENO). Em particular, foram realizadas as implementações de um método ENO de ordem 3 e de um método WENO de ordem 5, ambas avaliadas por meio de experimentos numéricos envolvendo problemas clássicos de leis de conservação escalares.

Resultados Principais

Vamos iniciar com algumas discussões presentes em [2], [3] e [5]. Considere a seguinte definição:

Definição 1. *Uma lei de conservação unidimensional é um sistema de equações diferenciais parciais que pode ser escrito na forma*

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

em que $\mathbf{q} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é um vetor de* m *componentes que representa as variáveis conservadas, as quais buscamos determinar, e* $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ *é o vetor de fluxos.*

Através da regra da cadeia, para condições adequadas de suavidade, é possível verificar a equivalência de (1) com

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A(\mathbf{q})\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

em que $A(\mathbf{q}) := \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{q}$ é a matriz jacobiana do fluxo $\mathbf{f}(\mathbf{q})$. Em particular, o sistema (2) é dito *hiperbólico* quando $A(\mathbf{q})$ possui um conjunto de autovalores $\lambda_i(\mathbf{q}), 1 \leq i \leq m$, reais e um conjunto completo de autovetores $r_i(\mathbf{q})$ linearmente independentes.

Dessa maneira, nosso objetivo é investigar a caracterização dos sistemas hiperbólicos que apresentam como formulação (2). Em alguns casos, é possível determinar a solução analítica do problema. Por exemplo, considere $A(\mathbf{q}) = A$ uma matriz de entradas reais constantes. Pode-se definir o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \quad \text{com} \quad \mathbf{q}(x,0) = \mathbf{q_0}(x) \quad \text{e} \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Pela hiperbolicidade, A é diagonalizável e devem existir matrizes R, Λ tais que $A = R\Lambda R^{-1}$. Efetuando a substituição de variáveis $\mathbf{w} = R^{-1}\mathbf{q}$, chega-se no sistema

$$\mathbf{w}_t + \Lambda \mathbf{w}_x = 0, \quad \text{com} \quad \mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w_0}(x), \tag{4}$$

em que Λ é uma matriz diagonal, $\mathbf{w}(x,t) = (w^{(1)}(x,t), w^{(2)}(x,t), \ldots, w^{(m)}(x,t))$ e a condição inicial é dada por $\mathbf{w_0}(x) := R^{-1}\mathbf{q_0}(x)$. A partir dessa nova formulação, é possível obter a solução do problema (3) que é dada por

$$\mathbf{q}(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w_0^{(p)}(x - \lambda_p t) r_p, \tag{5}$$

em que $r_1, \ldots, r_m$ são os autovetores à direita e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são os correspondentes autovalores de A.

Assim, para o caso em que A é constante, obtém-se uma fórmula explícita para a solução. Entretanto, de modo geral, a matriz $A(\mathbf{q})$ apresenta uma dependência em relação ao vetor de variáveis conservadas $\mathbf{q}$, definindo um sistema não-linear. A não linearidade também pode promover a interação entre diferentes ondas e a formação de descontinuidades, tornando a obtenção de soluções analíticas um processo significativamente mais complexo.

Para contornar essa situação, nos voltamos ao estudo de estratégias resolutivas numéricas, com ênfase nos métodos de volumes finitos (MVFs). Esses métodos se fundamentam na discretização espacial do domínio em volumes de controle, chamados células, e na análise do fluxo de entrada e saída das quantidades conservadas nessas células ao longo do tempo.

Em particular, foi realizada a implementação de dois esquemas de volumes finitos: um do tipo *Essentially Non-Oscillatory* (ENO) de ordem 3 e um do tipo *Weighted Essentially Non-Oscillatory* (WENO) de ordem 5, apresentados em [1], ambos com discretização temporal baseada em um método de Runge-Kutta de ordem 3 *Strong Stability Preserving* (RK3 SSP), como proposto em [4]. A escolha desses métodos se deu principalmente devido a sua capacidade de reduzir o aparecimento de oscilações espúrias próximo a regiões de formação de descontinuidades nas soluções numéricas. Para o ENO, esse processo é feito a partir da escolha do estêncil associado à região mais suave da solução, enquanto para o WENO essa adaptação é realizada a partir de uma combinação ponderada das reconstruções com pesos não-lineares baseados em indicadores de suavidade.

A partir das implementações realizadas, foram conduzidos diferentes experimentos numéricos envolvendo problemas clássicos de leis de conservação escalares, isto é, aqueles para os quais $\mathbf{q} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Inicialmente, foi analisado o comportamento das aproximações numéricas para a equação de advecção linear e para a equação de Burgers invíscida. Para esta última, foram consideradas as condições iniciais do problema de Riemann (com a formação de choques e leques de rarefação), além de condições iniciais dadas por uma função seno associadas a condições de contorno periódicas. De modo geral, os resultados obtidos apresentaram comportamento compatível com o esperado para os problemas considerados, reproduzindo adequadamente as principais características das respectivas soluções.

Por fim, como etapa final deste trabalho, pretende-se estender os algoritmos desenvolvidos para a aplicação dos métodos ENO e WENO a outros sistemas de leis de conservação lineares e não-lineares da forma (2). Assim, a variável conservada passará a ser representada por um vetor $\mathbf{q}$, permitindo investigar o comportamento dos métodos em problemas que envolvem várias grandezas conservadas.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] QIANG, D.; ABGRALL, R.; SHU, C.-W.; GLOWINSKI, R.; HINTERMÜLLER, M.; SÜLI, E. **Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems:** Basic and fundamental issues. v. 17. Amsterdam: Elsevier, 2016.

[2] LEVEQUE, R. J. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[3] LEVEQUE, R. J. **Numerical Methods for Conservation Laws**. 2. ed. Berlim: Birkhauser, 1992.

[4] SHU, C.-W; OSHER, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. **Journal of Computational Physics**, Amsterdam, v. 77, n. 2, p.439 — 471, 1988.

[5] TORO, E. F. **Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics:** A practical introduction. 3. ed. Berlim: Springer, 2009

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Educação Matemática

Comissão Científica:

Em breve!

Banca Avaliadora:

Em breve!

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

“Em Fração”: Desenvolvimento de um jogo matemático com alunos de ensino médio

Guilherme de Lima Sampaio[1]
guilherme.sampaio@ufpr.br

Neila Tonin Agranionih (Orientadora)[2]
nagranionih@ufpr.br

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento, ainda em processo, do jogo matemático “Em Fração”, elaborado com o objetivo de explorar operações com frações em turmas do ensino médio que apresentam dificuldades em conhecimentos matemáticos elementares. A proposta parte do reconhecimento de defasagens de aprendizagem identificadas entre estudantes dessa etapa de ensino e da necessidade de repensar estratégias metodológicas capazes de promover o envolvimento dos alunos com a Matemática. Fundamentado na utilização de jogos pedagógicos como recurso para retomada de conhecimentos prévios, desenvolvimento de estratégias, comunicação e resolução de problemas, o jogo foi concebido a partir de três elementos principais: aleatoriedade, competitividade e realização de cálculos mentais.

Palavras-chave: educação matemática, jogos matemáticos, ensino médio, formação docente, metodologia de ensino.

Introdução

Qualquer professor com a oportunidade de pisar em uma sala de ensino médio rapidamente notará muitas coisas, mas algo que um professor de matemática notará em poucos minutos é a aversão que alguns alunos têm à disciplina em questão. Antes fosse apenas o desgosto, pois geralmente esse sentimento é acompanhado de medo e insegurança que fazem com que muitos alunos percam a esperança de um dia compreender o que se passa em uma aula de matemática. Adicione essa dificuldade de aprendizagem às políticas de não reprovação e aos “dois anos perdidos” decorrentes da pandemia de Covid-19 e chegamos a um cenário em que um aluno de ensino médio não compreende um conteúdo previsto para o sexto ano do fundamental.

Esse cenário pode soar fantasioso ou exagerado para alguns, porém, em 2025 foi constatado a partir de dados do Saeb que 58,6% dos alunos da terceira série do ensino médio têm nível de aprendizado considerado abaixo do básico (TODOS

[1]UFPR. Graduando do curso de Licenciatura em Matemática. Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática UFPR.
[2]UFPR. Professora Doutora.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

PELA EDUCAÇÃO, 2026, p. 13). É a partir dessa ótica que certas abordagens precisam ser repensadas para o cenário atual, afinal, como ensinar o que seria o básico a um aluno que já está de saída do sistema educacional? A metodologia de jogos matemáticos pode ser uma alternativa.

É essencial para a compreensão deste trabalho saber o que está por trás da metodologia de jogos pedagógicos. De acordo com Souza (2007), os jogos pedagógicos, quando bem planejados, permitem que os alunos retomem conhecimentos prévios, confrontem ideias e desenvolvam estratégias pessoais. No entanto, a autora aborda em sua tese que diversas vezes a atividade de jogar é vista como uma prática infantil por alguns professores que optam por não utilizá-la com alunos mais velhos por acharem algo ineficiente.

A autora defende que quatro pontos centrais são necessários para que a metodologia de jogos matemáticos seja válida em contexto educacional:

- A metodologia dos jogos deve englobar a metodologia de resolução de problemas, ou seja, um jogo mecânico e repetitivo foge dessa finalidade;
- O estudante deve conseguir expressar seu conhecimento, argumentar sobre como conseguiu resolver alguma situação-problema; desta forma, jogos realizados sem comunicação com outros (antes, durante ou após o jogo) não cumprem essa finalidade. É importante que tanto a escrita quanto a oralidade sejam valorizadas no processo de explicação das estratégias do aluno;
- É necessário analisar quais conceitos matemáticos o aluno passou a compreender, já que jogos com um pensamento matemático mais sutil muitas vezes podem passar despercebidos pelo estudante que não conectou a prática do jogo ao conteúdo estudado em sala;
- O jogo deve estabelecer pontes com outras disciplinas, em geral essas pontes serão feitas com a língua materna no sentido de interpretação de texto e com filosofia, principalmente no campo da ética e estética.

Com esses quatro pontos em mente podemos chegar naquilo que é o ponto alto da metodologia, a engrenagem que faz todo sistema rodar, a diversão. Segundo Costa (2009), a diversão é essencial para qualquer jogo pedagógico, assim como a necessidade de uma estrutura do jogo similar à estrutura do objeto de conhecimento.

Em síntese, um jogo matemático precisa exigir a aprendizagem de conceitos matemáticos para ser jogado, ser divertido, estabelecer pontes com outras disciplinas e prezar pelo desenvolvimento de estratégias para quem joga. Com tudo isso em mente, será que é possível criar um jogo instigante e divertido para alunos de ensino médio que sabem menos do que o básico de matemática? É o que será discutido na próxima seção do texto.

Resultados Principais

Nomes são importantes e nesse caso explicar o nome do jogo será um bom ponto de partida para discutir seus objetivos pedagógicos e motivações. O nome “Em Fração” surgiu a partir do pensamento de “como eu explico para meus alunos que operações com frações podem formar um inteiro?”. Desta forma, o objetivo do jogo é justamente construir “um inteiro” em fração.

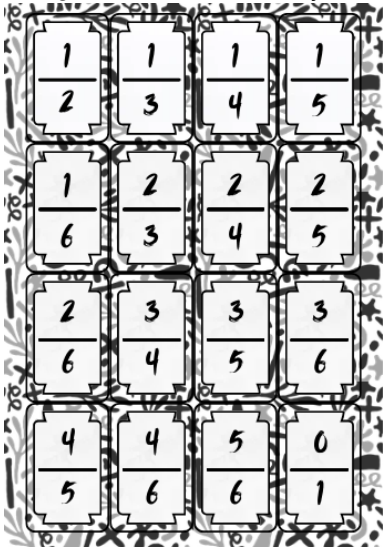
A motivação para o jogo é justamente atingir um público que já está convencido de que não aprenderá Matemática, seja por falta de vontade ou por suposta falta de capacidade. Já nos deparamos inúmeras vezes com alunos que não sabiam ou então erravam com frequência contas com frações. Por um lado, esse não é exatamente o conteúdo tratado no Ensino Médio; por outro, ele é essencial para se

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

fazer grande parte dos cálculos de equações com números reais. O jogo explora esse limbo, um conteúdo fácil demais para os jogos de Ensino Médio já feitos e um público maduro demais para os jogos com frações convencionais.

Identificado o conteúdo que queríamos aplicar no jogo, ainda faltava todo o resto. Como um jogo com frações poderia ser interessante? A primeira questão que adicionamos a fim de deixar o jogo mais divertido foi aleatoriedade. Optamos por seguir com um jogo de cartas para facilitar a confecção do material. A segunda questão foi a competitividade. Inspirado pela quantidade de jogadores de truco que encontrei nas salas de aula que já trabalhamos, imaginamos que competitividade seria um combustível interessante para o jogo. Por fim, decidimos trabalhar com as dezesseis frações expostas na figura 1, as cartas foram escolhidas com o objetivo de facilitar cálculos mentais e também em quantidade suficiente para um grupo de até quatro jogadores serem capazes de formar até duas pilhas cada.

Figura 1 — Cartas Em Fração.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Quanto às regras do jogo, as cartas são distribuídas uma a uma entre jogadores. Ao formar um inteiro através de algumas operações básicas, esse conjunto de cartas fica reservado em uma pilha. Ao final, o jogador com mais pilhas de um inteiro vence. A ideia geral do jogo é pensar como operar as cartas que se têm de maneira eficiente para conseguir formar o inteiro. As regras exatas ainda estão em fase de testes, mas o conceito do jogo seguirá esses princípios.

O objetivo final é criar um ambiente amigável para retomar esse conteúdo que foge da grade esperada, incentivando a prática das operações com fração de maneira divertida e, portanto, educativa. Como próximo passo imediato, é necessário realizar inúmeros testes do jogo com o público alvo e garantir que as regras estejam funcionais e bem escritas para então realizar sua aplicação em um futuro próximo.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

TODOS PELA EDUCAÇÃO. Estudo: evolução dos níveis de aprendizagem na Educação Básica: resultados a partir do Saeb 2025. São Paulo: Todos Pela Educação, 2026. Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2026/08/estudo-evolucao-dos-niveis-de-aprendizagem-na-educacao-basica-2025-todos-pela-educacao.pdf . Acesso em: 2 set. 2026.

SOUZA, Maria Helena Soares de. Jogos pedagógicos em Matemática no Ensino Médio: mais que motivação, metodologia. 2007. 387 f. Tese (Doutorado em Educação – Currículo) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DEMENCIANO COSTA, Leandro. O que jogos de entretenimento têm que os jogos com fins pedagógicos não têm. In: BRAZILIAN SYMPOSIUM ON GAMES AND DIGITAL ENTERTAINMENT, 8., 2009, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2009. p. 1-20.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

(Des)Plastificando a Matemática pela Geometria Espacial .

Luiz Fernando da Silva[1]
luiz.fer.1917@gmail.com

Allan Christian Reinbold[1]
allanch2008@gmail.com

Marcela Carvalho de Souza[1]
marcelacarvalho0609@gmail.com

Solange Maria Gomes dos Santos (Orientadora)[2]
solange.santos@unespar.edu.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

O objetivo foi relacionar conteúdos matemáticos à conscientização ambiental sobre o descarte de garrafas PET. A elevada produção e o consumo de materiais plásticos, associados ao descarte inadequado, têm provocado diversos impactos ambientais, como a contaminação de solos e águas, a presença de microplásticos nos oceanos, a sobrecarga de aterros e prejuízos à vida marinha, além do longo período necessário para a decomposição desses materiais. Nesse contexto, a Educação Ambiental contribui para a formação de sujeitos conscientes por meio de atividades que aproximem os conhecimentos escolares de situações cotidianas. A partir dessa perspectiva, foi proposta uma oficina prática utilizando garrafas PET descartadas como recurso didático para abordar conceitos de Geometria Espacial, especialmente o cálculo aproximado do volume por meio da fórmula do cilindro. Com o auxílio de régua e calculadora, foram realizadas medições e estimativas, permitindo relacionar o volume ocupado por uma garrafa à quantidade de resíduos plásticos descartados no ambiente.

Palavras-chave: Educação Ambiental; Matemática; garrafas PET; Geometria Espacial; reciclagem.

[1]Acadêmico do Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná, Campus de Paranaguá.
[2]Professora especialista da Universidade Estadual do Paraná, Campus de Paranaguá.

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

Este trabalho apresenta uma proposta desenvolvida na disciplina optativa de Educação Ambiental, do curso de Licenciatura em Matemática, no primeiro semestre de 2026. O objetivo foi relacionar conteúdos matemáticos a conscientização ambiental sobre o descarte de garrafas PET. A elevada produção e o consumo de materiais plásticos, associados aos descarte inadequado, tem provocado diversos impactos ambientais, como a contaminação dos solos e águas, a presença de micro plástico nos oceanos,a sobrecarga de aterros e prejuízos a vida marinha, Além disso, o longo período necessário para a decomposição desses materiais reforça a importância de ações voltadas à redução, reutilização e reciclagem(Meio Ambiente Sustentável, 2026)

Nesse contexto, a Educação Ambiental pode contribuir para a formação de sujeitos mais conscientes sobre suas ações e responsabilidades em relação ao meio ambiente, especialmente quando desenvolvida por meio das atividades que aproximem os conhecidos escolares de situações cotidianas(Projeto Escola Verde, 2026). A partir dessa perspectiva, foi proposta uma oficina prática utilizando garrafas PET, como recurso didático para abordar conceitos de Geometria Espacial e, simultaneamente, promover reflexões sobre o descarte de resíduos.

Resultados Principais

A oficina possibilitou explorar conceitos de Geometria Espacial, especialmente o cálculo aproximado do volume de uma garrafa PET por meio da fórmula do cilindro. Com o auxílio de régua e calculadora, foram realizadas medições e estimativas, permitindo relacionar o volume ocupado por uma garrafa à quantidade de resíduos plásticos descartados no ambiente.

A atividade evidenciou a possibilidade de articulação entre Matemática e Educação Ambiental, demonstrando que conteúdos matemáticos podem ser utilizados para compreender e problematizar questões sociais e ambientais presentes no cotidiano. Dessa forma, a proposta contribuiu para uma aprendizagem mais contextualizada, aproximando os conhecimentos matemáticos de uma problemática ambiental concreta.

A atividade evidenciou a possibilidade de articulação entre Matemática e Educação Ambiental, demonstrando que conteúdos matemáticos podem ser utilizados para compreender e problematizar questões sociais e ambientais presentes no cotidiano. Dessa forma, a proposta contribuiu para uma aprendizagem mais contextualizada, aproximando os conhecimentos matemáticos de uma problemática ambiental concreta.

Referências

MEIO SUSTENTÁVEL. Quais os impactos da garrafa PET no meio ambiente? Disponível em: https://meiosustentavel.com.br/garrafa-pet/. Acesso em: 13 ago. 2026.

PROJETO ESCOLA VERDE. Oficina de reciclagem sensibiliza crianças. Disponível em: https://escolaverde.org/site/?p=67759. Acesso em: 13 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

A Afetividade no Ensino de Matemática: Um Relato de Experiência no Ensino Médio do IFPR

Katrine Goulart Habkoste[1]
katrine.habkoste@ufpr.br

Ettiène Cordeiro Guérios (Orientadora)[2]
ettiene@ufpr.br

Resumo

Este relato de experiência analisa como a relação entre professor e aluno afeta a aprendizagem matemática do ponto de vista dos estudantes, uma vez que a Matemática é vista como uma disciplina difícil que causa ansiedade nos alunos. O objetivo foi descrever e analisar como a atitude do professor, a comunicação e o ambiente da sala de aula afetam a motivação e o desempenho dos alunos. Para isso, optou-se por uma abordagem qualitativa observacional, com base nas interações com duas turmas do Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná (IFPR): uma turma regular e uma turma de dependência. Percebeu-se que as experiências emocionais prévias condicionam o comportamento atual dos discentes e que a comunicação afetiva atua como fator determinante para a motivação e a confiança. Revelou-se que, embora alunos regulares apresentem maior autonomia emocional, os estudantes que estão em dependência dependem significativamente da segurança transmitida pelo professor para superar a ansiedade. Conclui-se que há uma necessidade de equilíbrio entre o domínio do conteúdo e um bom relacionamento interpessoal para a efetivação da aprendizagem matemática.Este é o resumo inicial do trabalho.

Palavras-chave: Aprendizagem Matemática, Relação Professor-Aluno, Afetividade, Educação Matemática.

Introdução

As relações que ocorrem no ambiente escolar têm um impacto significativo no processo de aprendizagem, em especial, no ensino da Matemática, uma disciplina considerada difícil e que causa ansiedade. Nesse contexto, a qualidade do relacionamento entre o professor e os alunos desempenha um papel fundamental, pois, frequentemente, as dificuldades em Matemática são atribuídas a obstáculos emocionais criados por experiências negativas, que geram medo e insegurança, prejudicando o processo de aprendizagem.

[1]Universidade Federal do Paraná. Licencianda em Matemática. Bolsista do PET Matemática.
[2]Universidade Federal do Paraná. Doutora em Educação Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

Esse relato de experiência surgiu a partir da vivência prática durante o estágio supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), realizado no Instituto Federal do Paraná (IFPR), entre setembro e dezembro de 2025. Ao observar o professor supervisor, notou-se um esforço em manter uma relação próxima com as turmas acompanhadas. Essa observação levantou a seguinte questão: como a relação entre professor e aluno influencia o aprendizado de Matemática na perspectiva dos estudantes?

A partir disso, este relato tem como objetivo descrever e analisar como o diálogo, a postura do docente e o clima da sala de aula influenciam a motivação e a participação dos alunos. Para tanto, optou-se por uma abordagem qualitativa observacional, documentando nas interações em duas turmas distintas do IFPR: uma regular e uma de dependência.

Resultados Principais

Assim como vários aspectos da vida cotidiana, a aprendizagem é fortemente influenciada pelas emoções. Elas afetam experiências futuras, com base em emoções sentidas em situações similares do passado, ou seja, uma experiência com uma emoção negativa no passado condiciona um comportamento de afastamento por parte do estudante com relação a aprendizagem, como apontam Rodrigues e Poletto (2023). Nesse sentido, Piaget aponta que os discentes estabelecem

> vínculos afetivos com os colegas, e aos poucos com os professores e outros profissionais da educação que estão à sua volta. Acabam assim, expressando os seus saberes e os seus questionamentos, podendo analisar os pensamentos dos seus colegas, desenvolvendo suas próprias ideias. (Piaget, 1979, p.32)

Tais vínculos são criados a partir das emoções que o meio proporciona, assim o discente se aproxima do que lhe traz uma sensação de felicidade e se afasta do que lhe é desagradável, como afirma Rodrigues e Poletto (2023). Ao criar tais vínculos, o estudante se sente seguro para se expressar e desenvolver suas próprias ideias.

Guimarães e Maciel (2021) corroboram a ideia de vínculos ao afirmar que o afeto influencia fortemente o desenvolvimento humano, destacando o medo e desconfiança como os fatores que mais dificultam a aprendizagem. Portanto, o docente deve se sensibilizar para ouvir seus alunos e respeitar o ritmo de aprendizagem de cada um, pois assim como as autoras afirmam, “ao reconhecer a atenção, carinho e respeito do professor, os alunos adquirem confiança, admiração, amizade e respeito na relação, favorecendo a aprendizagem” (Guimarães; Maciel, 2021).

No contexto da Matemática, disciplina frequentemente associada à ansiedade e ao medo, a relação professor-aluno assume um papel ainda mais crítico. Nesse contexto, é essencial que o docente faça o aluno participar da aula e se possível realizar trocas de conhecimento, não apenas transmissão de conteúdo. Referente a essa postura, Freire comenta sobre

> vínculos afetivos com os colegas, e aos poucos com os professores e outros profissionais da educação que estão à sua volta. Acabam assim, expressando os seus saberes e os seus questionamentos, podendo analisar os pensamentos dos seus colegas, desenvolvendo suas próprias ideias. (Freire, 1996, p.96)

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Durante o estágio, pude acompanhar duas turmas do Ensino Médio Técnico no IFPR, sendo uma turma regular e outra de dependência. As duas turmas estavam na mesma disciplina, Matemática I, e o professor seguiu quase o mesmo conteúdo (função exponencial, função logarítmica, progressão aritmética e progressão geométrica) nas duas salas de aula, com exceção do conteúdo de funções inversas que foi ministrado apenas na turma regular.

Embora muitas pessoas não gostem de Matemática, principalmente por ser considerada a disciplina mais difícil ou porque muitos professores são ruins e cruéis, durante o estágio pude observar, em suas falas durante as aulas, que as experiências anteriores com professores foram um fator determinante para os estudantes, das duas turmas, não gostarem de Matemática. Na turma regular, notei um caso, que para mim, considerei especial, o fato de que muitos alunos gostavam de Matemática. Com isso, percebe-se que a premissa de Rodrigues e Poletto (2023), de que as emoções passadas condicionam comportamentos futuros, está presente nas duas turmas analisadas, além disso, nota-se que os estudantes da turma de Dependência possuem uma carga emocional negativa maior.

Um outro fator que afeta diretamente na sala de aula, é a comunicação e a motivação do estudante, sendo até um ponto crítico de acordo com Freire (1996). Observei que após o professor proferir algum elogio ou incentivo, alguns alunos da turma de dependência, se sentiram mais confiantes. Assim, pude observar que uma relação mais afetuosa entre o professor e o aluno pode ajudar estudantes em dependência a se sentirem mais confiantes em estudar e perguntar sobre a disciplina, ajudando então na aprendizagem matemática.

Em contrapartida, não observei o mesmo na turma regular, onde notei uma separação maior entre os que se sentiram mais motivados com tal afeto e os que não gostam muito dessa aproximação. Isso vai ao encontro das ideias de Guimarães e Maciel (2021). Nota-se, assim, que o docente deve ter um olhar diferente para cada turma, pois o que funciona para uma, não necessariamente vai dar certo com outra.

Além disso, nas duas turmas observadas, os alunos se sentiam muito tranquilos e relaxados durante as aulas do professor, pois o docente sempre deixou um espaço para os estudantes dialogarem entre si e com ele, ajudando assim a diminuir sua ansiedade com relação a disciplina.

Esses dados corroboram Guimarães e Maciel (2021) sobre como o medo e a desconfiança dificultam a aprendizagem. O aluno de dependência, mais vulnerável, depende da segurança transmitida pelo professor para conseguir aprender, enquanto o aluno regular parece ter mecanismos mais autônomos de regulação emocional.

A observação em sala de aula revelou que a postura do professor e o clima de sala de aula são determinantes, especialmente para alunos com histórico de dificuldades escolares ou em dependência. Isso evidencia que o conhecimento a ser aprendido tem grande influência do meio e do modo como o indivíduo lida com este meio social, portanto, o docente deve se preocupar com o próprio comportamento e postura em sala de aula para não impactar negativamente no processo de aprendizagem dos alunos, conforme apontam Rodrigues e Poletto (2023). Dessa forma, conclui-se que a qualidade da relação professor-aluno é determinante para a aprendizagem matemática, não apenas o domínio do conteúdo.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** Saberes necessários a prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GUIMARÃES, M. D. S.; MACIEL, M. L. A. *Affectiveness in the teacher-student relationship: Foundations for meaningful learning.* ***Research, Society and Development***, v. 10, n. 10, 2021. Disponível em: https://rsdjournal.org/rsd/article/view/18362. Acesso em: 06 nov. 2025.

PIAGET, J. **Psicologia da Inteligência**. Rio de Janeiro: Editora Fundo de Cultura, 1979.

RODRIGUES, S. F.; POLETTO, L. Relação professor aluno: A importância da afetividade no ambiente escolar. **Revista Acadêmica Educação e Cultura em Debate**, v. 9, n. 1, p. 119–132, 2023. Disponível em: https://revistas.unifan.edu.br/index.php/RevistaISE/article/view/991. Acesso em: 18 nov. 2025.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

A Matemática a "Conta-Gotas": Análise Curricular da Formação Inicial de Professores Multidisciplinares

Nicolas da Verça Scholze[1]
Nicolasscholze111@gmail.com

Tania Teresinha Bruns Zimer (Orientador(a))[2]
taniatbz@ufpr.br

Resumo

Este trabalho, parte integrante de uma monografia, investiga a formação matemática de pedagogos no Brasil, tendo como foco a precariedade curricular das ementas e eixos de formação de professores multidisciplinares para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho documental e analítico, operacionalizada por meio de uma Revisão Sistemática da Literatura (RSL) estruturada nos anais das três últimas edições do ENEM (2019, 2022 e 2025). O processo de seleção e filtragem resultou em um corpus definitivo de 49 artigos lidos na íntegra. Embora a pesquisa geral identifique três eixos analíticos (a bagagem traumática da Educação Básica; a precariedade curricular; e o impacto prático no chão de escola), este trabalho foca especificamente no segundo (o aspecto curricular). Os resultados revelam que as ementas de disciplinas que tratam da matemática no curso de Pedagogia no Brasil relegam o conhecimento de conteúdo específico a um segundo plano, priorizando de forma isolada discussões metodológicas. A falta de tempo (média de 2% a 3% da carga horária obrigatória) impede o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino, gerando insegurança profissional e inviabilizando a alfabetização e o letramento matemático crítico.

Palavras-chave: Educação Matemática, Formação Inicial de Professores, Curso de Pedagogia, Currículo.

Introdução

A formação matemática dos professores responsáveis pelos anos iniciais do Ensino Fundamental é um gargalo da Educação Básica brasileira (Zimer, 2002). Embora as diretrizes nacionais e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) exijam que o docente multidisciplinar seja capaz de promover a alfabetização e o letramento matemático sob uma perspectiva crítica, social e emancipatória, a realidade escolar revela um cenário marcado por insegurança, aversão à disciplina e práticas mecânicas focadas na reprodução de algoritmos tradicionais (Zimer, 2008).

Essa problemática ultrapassa as limitações de ordem individual dos docentes e as condições estruturais das escolas, evidenciando-se fortemente como reflexo de uma precarização curricular histórica nos cursos de Pedagogia (Maldaner, 2020). O currículo das licenciaturas em Pedagogia opera sob a premissa de que os futuros

[1]Universidade Federal do Paraná (UFPR). Licenciando em Matemática.
[2]Universidade Federal do Paraná (UFPR). Doutora em Educação Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

professores já trazem os conceitos matemáticos consolidados de sua escolarização básica, relegando o papel da Matemática na graduação a discussões meramente instrumentais sobre "como ensinar" sem garantir o domínio seguro do "o que ensinar" (Shulman, 1986).

Para compreender esse cenário, a pesquisa geral na qual este trabalho se insere busca responder à seguinte questão: “De que maneira a ausência de uma disciplina focada nos fundamentos teóricos e no conhecimento curricular da matemática, no curso de Pedagogia, impacta a segurança e a prática dos futuros professores na promoção da alfabetização e do letramento matemático nos anos iniciais? ”. O objetivo principal deste estudo é analisar as ementas, as lacunas conceituais e o espaço curricular reservado à Educação Matemática nos cursos de Pedagogia, com base em uma revisão sistemática da literatura científica nacional recente.

Metodologia

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, de cunho documental e analítico (Vosgerau; Romanowski, 2014). Para sua consecução, realizou-se uma Revisão Sistemática da Literatura (RSL) nos anais digitais do XIII, XIV e XV ENEM. A busca foi realizada a partir da aplicação de descritores: “Curso de Pedagogia”, “Letramento Matemático”, “Formação Inicial de Professores dos anos inicias”, “Professor Polivalente”, “Conhecimento matemático para o ensino” “Alfabetização Matemática” e “Futuros pedagogos”.

O levantamento inicial retornou 162 trabalhos. Após a etapa de triagem de títulos e resumos – que excluiu relatos de experiência sem foco curricular e trabalhos fora do escopo da formação inicial –, procedeu-se à leitura na íntegra, consolidando um *corpus* definitivo de 49 artigos científicos.

Os dados foram processados por meio da técnica de Análise de Conteúdo (Bardin, 2011), estruturada nas etapas de pré-análise, exploração do material e tratamento interpretativo. O processo analítico resultou no estabelecimento de três categorias temáticas interdependentes: (1) As marcas afetivas da Educação Básica e a escolha pela Pedagogia; (2) A precariedade curricular na Pedagogia: métodos sem conteúdo (Pedagogical Content Knowledge - PCK sem Subject Matter Knowledge - SMK); e (3) O impacto prático no chão de escola. Neste trabalho o foco recairá exclusivamente na discussão da segunda categoria (Eixo Curricular).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A exploração do material e a inferência realizada sobre os 49 artigos do corpus do ENEM evidenciam que a formação matemática na Pedagogia enfrenta uma grave crise curricular, caracterizada por um esvaziamento conceitual. Mapeamentos curriculares presentes na amostra selecionada revelam a gravidade da asfixia de tempo dedicada à área. Ao investigarem dezenas de cursos em universidades públicas brasileiras, trabalhos basilares do nosso corpus, como os de Rôos e Palma (2022) e Zeferino (2019), atestam que as disciplinas voltadas à Educação Matemática representam, em média, apenas cerca de 3% da carga horária obrigatória total dos cursos. Esse cenário de escassez temporal é corroborado na literatura externa por Maldaner (2020), que identificou índices próximos a 2% nas matrizes das universidades federais.

Diante desse cenário de restrição de tempo – exemplificado por cursos que destinam apenas 30 horas para toda a formação matemática –, as ementas priorizam

VERSÃO PROVISÓRIA

as discussões didático-metodológicas e as estratégias instrumentais de ensino. O mapeamento realizado em Minas Gerais (Oliveira; Julio, 2025), assim como outras evidências da RSL, demonstram que as disciplinas se ancoram em jogos e recursos manipulativos de forma descontextualizada, omitindo os fundamentos teóricos dos conteúdos específicos da matemática.

À luz das categorias de Lee Shulman (1986, 1987), essa dinâmica curricular impede a formação plena do docente. Shulman estabelece que o exercício seguro da profissão requer o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), o qual é definido como a intersecção indissociável entre o conhecimento da pedagogia e o domínio do conteúdo da disciplina. No entanto, ao focar quase que exclusivamente no "como ensinar", o currículo da Pedagogia estaciona no Conhecimento Pedagógico Geral (PK). A omissão do Conhecimento Específico da Matéria (Subject Matter Knowledge - SMK) inviabiliza, por definição teórica, o desenvolvimento do PCK, visto que é impossível transformar didaticamente um conteúdo que não se domina conceitualmente.

Sem o PCK e o amálgama entre o que e como ensinar, o curso pressupõe, de maneira equivocada, que o discente já traz a matemática substantiva consolidada da Educação Básica. Consequentemente, o futuro professor egresso da Pedagogia é enviado ao chão de escola com profundas lacunas de conhecimento. Sentindo-se frágil e inseguro frente à disciplina, esse profissional tende a reproduzir o mesmo modelo mecânico de ensino tradicional pelo qual foi escolarizado e alfabetizado, perpetuando o ciclo de precarização na Educação Básica (Zimer, 2008).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise sistemática dos 49 artigos do ENEM demonstra que a graduação em Pedagogia tem falhado em garantir o Conhecimento Matemático para o Ensino. A superação dessa insegurança exige uma reformulação das matrizes curriculares. Contudo, expandir a carga horária obrigatória da matemática esbarra no limite temporal de um curso multidisciplinar. Portanto, a curto prazo, é imperativo redesenhar as ementas vigentes para que o tempo restrito não seja consumido apenas por um Conhecimento Pedagógico genérico, mas que atue na construção real do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), articulando o 'como ensinar' à epistemologia lógica do conhecimento específico (SMK).

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARDIN, Laurence. Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70, 2011.

COELHO, Carolina Enes. A base de conhecimentos do professor pedagogo: formação matemática em cursos de pedagogia. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2024.

MALDANER, Amanda Scapini. Formação do pedagogo para o ensino da matemática nos anos iniciais: um olhar para os currículos das universidades federais no Brasil. 2020. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

OLIVEIRA, Vanessa de; JULIO, Rejane Siqueira. A presença da Educação Matemática Crítica nos cursos de Pedagogia de Minas Gerais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2025, Manaus. Anais [...]. Manaus: SBEM, 2025. p. 1-12.

RÔOS, Deise; PALMA, Rute Cristina Domingos da. O espaço dedicado aos conhecimentos matemáticos nos cursos de Pedagogia das universidades públicas federais e estaduais brasileiras. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, Brasília. Anais [...]. Brasília: SBEM, 2022. p. 1-12.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986.

SHULMAN, Lee S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

VOSGERAU, Dilmeire Sant'Anna Ramos; ROMANOWSKI, Joana Paulin. Estudos de revisão: implicações conceituais e metodológicas. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 14, n. 41, p. 165-189, jan./abr. 2014.

ZEFERINO, Joycimar Lemos Barcellos. Os currículos em questão: vamos falar de matemática na Pedagogia? In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. Anais [...]. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-12.

ZIMER, Tania Teresinha Bruns. Mundos de significados: saberes e práticas do ensino de matemática na formação de professores das séries iniciais no curso de Pedagogia da Universidade Federal do Paraná. 2002. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2002.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

ZIMER, Tania Teresinha Bruns. Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

A matemática do Adugo e Mancala Awele para idosos

Poliana Pereira Palhano[1]
pereirapalhano@ufpr.br

Carla Cristina Pompeu[2]
carla.pompeu@ufpr.br

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo discutir as diferentes formas de fazer matemática e dar visibilidade às culturas dos povos indígenas e africanos por meio de jogos matemáticos, com foco na população idosa. Pensando nisso, foi realizado uma oficina de jogos no projeto de extensão Universidade Aberta da Maturidade, da Universidade Federal do Paraná. Os resultados da oficina foram satisfatórios e alcançados conforme o planejamento. A partir das oficinas, discutiremos os impactos dos jogos para as pessoas idosas e suas relações com a matemática.

Palavras-chave: UAM, oficinas matemáticas, jogo Adugo, jogo Mancala Awele, pessoas idosas.

Introdução

Quando se fala em jogos, bem-estar e cultura nas práticas matemáticas voltada para pessoas idosas, pouco trabalhados são encontrados relacionando esses temas. Conforme pesquisa realizada no portal da Biblioteca Digital de Teses e Dicertações (BDTD), foram encontrados dois trabalhos relacionados às temáticas: uma tese sobre o jogo Adugo, consultada em 20 de março de 2026 e uma dissertação sobre o jogo da família Mancala, consultada em 20 de junho de 2026. A primeira aborda o jogo Adugo em oficinas com pessoas idosas, enquanto a segunda trata do jogo da família Mancala em uma turma de EJA. De acordo com Ciro Teixeira Figueiredo (2024, p. 39) "atualmente, na comunidade acadêmica não há muitos estudos que relaciona o benefício dos jogos indígenas aplicados no auxílio da memória e do raciocínio lógico a terceira idade". Os jogos servem como ferramenta para o ensino de matemática. De acordo com Glaucia Bomfim Barbosa Barreto (2016, p.17), é preciso "incorporar os jogos educativos como ferramenta pedagógica e lúdica vinculada a Etnomatemática. Valorizando assim, a cultura africana através da utilização dos jogos [...]".

[1] Discente de Matemática da Universidade Federal do Paraná. Voluntário do Programa de voluntariado acadêmico.

[2] Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná.

VERSÃO PROVISÓRIA

Pensando em conteúdos de matemática, cultura e visibilidade, como podemos promover o ensino de matemática unindo esses temas? Como podemos olhar para a matemática para além de conteúdos e ao mesmo tempo trabalhar a cultura indígena e africana em sala de aula, em especial na educação de jovens, adultos e idosos? De acordo com a Lei nº 11.645, de 10 março de 2008:

> Art. 26-A. Nos estabelecimentos de ensino fundamental e de ensino médio, públicos e privados, torna-se obrigatório o estudo da história e cultura afro-brasileira e indígena.
> § 1º O conteúdo programático a que se refere este artigo incluirá diversos aspectos da história e da cultura que caracterizam a formação da população brasileira, a partir desses dois grupos étnicos, tais como o estudo da história da África e dos africanos, a luta dos negros e dos povos indígenas no Brasil, a cultura negra e indígena brasileira e o negro e o índio na formação da sociedade nacional, resgatando as suas contribuições nas áreas social, econômica e política, pertinentes à história do Brasil.
> § 2º Os conteúdos referentes à história e cultura afro-brasileira e dos povos indígenas brasileiros serão ministrados no âmbito de todo o currículo escolar, em especial nas áreas de educação artística e de literatura e história brasileiras. (Brasil, 2008, p.23)

O foco deste trabalho é olhar para essas questões, em especial para a população idosa, na tentativa de investigar como podemos unir conteúdos matemáticos dentro e fora da sala de aula e quais as contribuições desta investigação para uma professora em formação. Segundo Ciro Teixeira Figueiredo (2024, p. 19):

> [...]essa tendência matemática pode ser vista também como uma abordagem educacional, buscando reconhecer, valorizar e integrar os saberes matemáticos presente nas culturas, refletindo as necessidades e experiências em que as comunidades estão inseridas.[...].

No que se refere à oficinas para pessoas idosas, a Lei n°10.741, de 1° de outubro de 2003, vai ao encontro com o tema dessa pesquisa:

> Art. 3º É obrigação da família, da comunidade, da sociedade e do poder público assegurar à pessoa idosa, com absoluta prioridade, a efetivação do direito à vida, à saúde, à alimentação, à educação, à cultura, ao esporte, ao lazer, ao trabalho, à cidadania, à liberdade, à dignidade, ao respeito e à convivência familiar e comunitária. (Brasil, 2003, p.12)

A Universidade Aberta da Maturidade (UAM), da Universidade Federal do Paraná (UFPR), é um projeto de extensão voltado a pessoas com 60 anos ou mais, tendo como principais objetivos aproximar as pessoas idosas no ambiente universitário e promovendo a cultura, a socialização e o bem-estar (UFPR, 2025). Neste sentido, a oficina "*Jogos matemáticos, raciocínio lógico e socialização*" foi organizada na tentativa de promover a aproximação com as culturas indígena e africana, por meio de jogos de estratégia matemática com pessoas idosas. Realizada em agosto de 2026, contou com a participação de 58 idosos da UAM. Foi realizada no Campus Jardim Botânico, com duração aproximada de três horas.

VERSÃO PROVISÓRIA

Foram os jogos Adugo e Mancala Awele, para que, além das estratégias matemáticas presente nos jogos, fosse possível discutir a importância das culturas dos povos indigenas e africanos.

Inicialmente, todos os participantes foram reunidos no auditório para a apresentação da proposta da oficina. Com auxílio de slides, a oficina começou com uma pergunta: Vocês já ouviram ou jogaram os jogos Adugo e/ou Mancala?. Todos responderam que não. A partir dessa pergunta, foi apresentado uma breve contextualização histórica e cultural dos jogos, destacando a importância e a origem de cada jogo. Em seguida, foram apresentadas as regras de ambos os jogos, utilizando figuras e vídeos para facilitar a compreensão. Os participantes foram organizados em duplas e distribuídos em salas próximas ao auditório para a realização das partidas. Posteriormente, foi realizada uma discussão da oficina como um todo.

Resultados Obtidos

Esse momento de diálogo possibilitou que os participantes compartilhassem suas percepções e experiências, refletindo não apenas sobre os aspectos matemáticos presentes nos jogos, como o raciocínio lógico, a elaboração de estratégias e as dificuldades, mas também sobre a importância da interação, da troca de conhecimentos e da socialização proporcionadas durante a oficina.

A partir das respostas e discussões realizadas, foi possível observar diferentes opiniões sobre os jogos. De modo geral, os participantes consideraram que o jogo Adugo era mais fácil e que jogar com a onça, era mais fácil de vencer. Entretanto, também reconheceram que o jogo Adugo exigia o planejamento de cada jogada e a elaboração de estratégias, especialmente em razão de sua dinâmica de perseguição e captura. Alguns participantes, após realizarem uma partida, passaram a refletir sobre quais estratégias poderiam ser utilizadas para que os cachorros conseguissem vencer, demonstrando interesse em compreender melhor as possibilidades e estratégias presentes no jogo.

Em relação ao Mancala, os participantes gostaram de jogar, embora tenham considerado sua dinâmica inicialmente mais complexa. Entre as possíveis dificuldades observadas, destacaram-se a necessidade de compreender as regras e estratégias do jogo e algumas limitações relacionadas ao material utilizado na confecção do tabuleiro, uma vez que o tamanho das caixinhas de ovos levaram a dificuldade de jogar e realizar movimentos.

Quando questionados sobre a presença da matemática nos jogos, os próprios participantes identificaram diferentes elementos, entre eles a elaboração de estratégias, a contagem, o raciocínio lógico e a geometria. Dessa forma, a realização da oficina pode ser considerada positiva, uma vez que os objetivos propostos foram alcançados. A oficina possibilitou apresentar a matemática de uma maneira diferente da convencional, utilizando os jogos como instrumentos para estimular o raciocínio lógico, a elaboração de estratégias e a interação entre os participantes. Ao mesmo tempo, contribuiu para a valorizar a importância histórica e cultural dos povos indígenas e africanos, proporcionando uma experiência que reuniu matemática, cultura, aprendizagem e socialização. A partir disso, será realizada uma analise mais detalhada para pensar como esses jogos contribuem para o ensino da matemática em sala de aula.

Referências

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

FIGUEIREDO, Ciro Teixeira. O estudo de conceitos geométricos na terceira idade: relação entre o jogo adugo, memória e raciocínio lógico. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade do Estado da Bahia, Teixeira de Freitas, 2024.

BARRETO, Gláucia Bomfim Barbosa. O ensino de matemática através de jogos educativos africanos: um estudo de caso em uma turma de educação de jovens e adultos (EJA) de uma escola municipal de Aracaju. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino e Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2016.

BRASIL. Lei nº 10.741, de 1 de outubro de 2003. Estatuto da Pessoa Idosa. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/centrais-de-conteudo/pessoa-idosa/estatuto-da-pessoa-idosa.pdf. Ultimo acesso em: 3 de setembro de 2026.

BRASIL. Lei nº 11.645, de 10 de março de 2008. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/642419/LDB_7ed.pdf . Ultimo acesso em: 03 de setembro de 2026.

UNIVERSIDE FEDERAL DO PARANÁ. Edital 01/2025: Abertura de vagas para a turma de 2026 do projeto de extensão institucional "Universidade Aberta Da Maturidade (UAM): O acesso à universidade como direito humano (fase 4)" Disponivel em: https://ufpr.br/wp-content/uploads/2025/12/Edital-UAM-2026_retificado.pdf . Ultimo acesso em: 03 de setembro de 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

Análise da produção escrita de estudantes do Ensino Médio em um Vaivém

Matheus Urias Rohling Bruno[1]
matheusurbruno@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)[2]
gabriel.santos22@gmail.com

Resumo

Historicamente, a avaliação escolar assume um papel predominantemente classificatório, operando muitas vezes como um mecanismo de seleção que pouco contribui para a reflexão ativa. Diante desse cenário, evidencia-se a necessidade de transformar essas práticas, deslocando a atenção da simples dicotomia entre o acerto e o erro para a valorização da trajetória de resolução e do desenvolvimento lógico do estudante. Ao assumir a avaliação como uma prática de investigação, cria-se um espaço contínuo de aprendizagem. Com esse propósito, a pesquisa busca analisar a produção escrita de estudantes do Ensino Médio a partir da aplicação do instrumento de avaliação conhecido como “Vaivém”. A pesquisa foi realizada no Colégio Estadual do Paraná, no contexto do estágio do PIBID com estudantes do 3º ano do Ensino Médio no turno da manhã. O método consiste em substituir a correção tradicional por um processo iterativo, em que a produção inicial do aluno não encerra a atividade, mas serve de base para que o professor elabore novas questões e devolva o material para nova reflexão. A intenção é estabelecer um diálogo contínuo que instigue o estudante a justificar e refinar seu pensamento matemático de forma autônoma. Nesse período de aplicação do instrumento, foi realizada a análise das produções escritas sob a perspectiva da leitura positiva com agrupamento de distratores e elaboração de intervenções.

Palavras-chave: Educação Matemática, Instrumento Vaivém, Avaliação educacional, Análise da Produção Escrita em matemática, Ensino Médio.

Introdução

Tradicionalmente, a avaliação escolar em matemática tem assumido uma função excludente e classificatória, servindo como um mecanismo que rotula e diferencia os estudantes, sustentado pela crença liberal no esforço e na meritocracia, que legitima a distribuição social diferenciada do conhecimento, penalizando as multiplicidades de pensamento (Buriasco, 2000). Nesse contexto, a avaliação reduz-se quase exclusivamente à verificação do produto final, restringindo-se a mensurar a quantidade de acertos obtidos pelo estudante e negligenciando o processo de aprendizagem. Como complementa Garnica (2006), na perspectiva tradicional, o aluno é analisado a partir de uma "leitura pela falta", na qual o desempenho é limitado à rigorosa dicotomia entre o acerto e o erro.

[1] UFPR. Estudante do curso de Licenciatura em Matemática
[2] UFPR. Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática

VERSÃO PROVISÓRIA

Em contrapartida a esse paradigma seletivo, este trabalho alinha-se à concepção da avaliação educacional como uma prática de investigação e uma oportunidade de aprendizagem (Silva; Buriasco, 2023). Essa abordagem metodológica desloca o foco estrito da resposta exata para a valorização da trajetória de resolução e do desenvolvimento lógico percorrido pelo aluno. Sob esse olhar, o erro deixa de ser interpretado como uma anomalia ou disfunção a ser punida (Buriasco, 2000), passando a ser compreendido como um indício valioso das concepções e do raciocínio em construção pelo estudante.

Para viabilizar essa mudança de conduta em sala de aula, o presente projeto adota o "Vaivém", instrumento de avaliação descrito por Silva e Buriasco (2023), que instaura um ciclo iterativo de diálogo. A aplicação do instrumento foi realizada no Colégio Estadual do Paraná no espaço do estágio do PIBID/UFPR, com a participação de estudantes do 3º ano do Ensino Médio, turno da manhã. Em vez de encerrar o processo com a atribuição de uma nota, o professor utiliza a produção escrita inicial como ponto de partida para formular intervenções e novas perguntas. Esse movimento contínuo vai ao encontro de onde o estudante está, respeitando sua trajetória lógica e instigando-o a justificar, revisar e refinar seu pensamento matemático, o que promove um engajamento ativo na sua própria aprendizagem.

Para a aplicação deste instrumento, optou-se por utilizar o problema "Aparelhos Defeituosos", selecionado a partir do banco de questões do PISA. A escolha dessa tarefa justifica-se por sua natureza investigativa: ela exige dos estudantes habilidades de interpretação de dados em tabelas, compreensão de porcentagens e, principalmente, a formulação de argumentação lógica, distanciando-se da mera memorização e aplicação mecânica de fórmulas.

A dinâmica da tarefa foi estruturada em três etapas complementares, apresentadas na Figura 1. A primeira questão solicitava a análise direta dos dados de produção diária para validar afirmações envolvendo proporção e probabilidade. Na etapa seguinte, aprofundando a exigência argumentativa, a segunda questão demandou que os alunos avaliassem a afirmação de um técnico. Nesse ponto, o foco principal era garantir que os estudantes utilizassem um argumento matemático estruturado para justificar a comparação de valores absolutos enviados para conserto. Por fim, a terceira questão expandiu o objetivo do problema ao introduzir os dados de uma segunda fábrica. A questão final demandava o cálculo e a comparação da porcentagem total de aparelhos defeituosos entre as duas empresas, consolidando a análise de dados do exercício.

Dessa forma, a aplicação da tarefa de maneira fragmentada e cíclica permitiu um acompanhamento detalhado do desenvolvimento lógico dos estudantes, garantindo que o foco da avaliação permanecesse na construção contínua da argumentação ao longo de todo o processo.

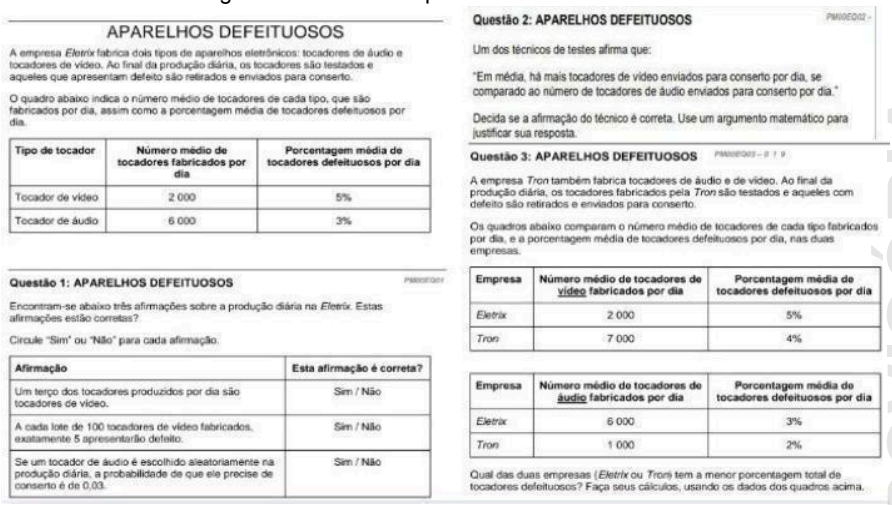
Resultados Principais

Embora os ciclos do instrumento Vaivém ainda estejam em fase de produção e análise, as coletas iniciais já revelam apontamentos centrais para a pesquisa. Durante a resolução da primeira etapa do problema, observou-se que parte dos estudantes caiu nos distratores inerentes à questão, apresentando, por exemplo,

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

confusões conceituais ao interpretar os dados absolutos em relação às porcentagens.

Figura 1 - Atividade “Aparelhos defeituosos”.



APARELHOS DEFEITUOSOS

A empresa *Eletrix* fabrica dois tipos de aparelhos eletrônicos: tocadores de áudio e tocadores de vídeo. Ao final da produção diária, os tocadores são testados e aqueles que apresentam defeito são retirados e enviados para conserto.

O quadro abaixo indica o número médio de tocadores de cada tipo, que são fabricados por dia, assim como a porcentagem média de tocadores defeituosos por dia.

Tipo de tocador	Número médio de tocadores fabricados por dia	Porcentagem média de tocadores defeituosos por dia
Tocador de vídeo	2 000	5%
Tocador de áudio	6 000	3%

Questão 1: APARELHOS DEFEITUOSOS

Encontram-se abaixo três afirmações sobre a produção diária na *Eletrix*. Estas afirmações estão corretas?

Circule "Sim" ou "Não" para cada afirmação.

Afirmação	Esta afirmação é correta?
Um terço dos tocadores produzidos por dia são tocadores de vídeo.	Sim / Não
A cada lote de 100 tocadores de vídeo fabricados, exatamente 5 apresentarão defeito.	Sim / Não
Se um tocador de áudio é escolhido aleatoriamente na produção diária, a probabilidade de que ele precise de conserto é de 0,03.	Sim / Não

Questão 2: APARELHOS DEFEITUOSOS

Um dos técnicos de testes afirma que:

"Em média, há mais tocadores de vídeo enviados para conserto por dia, se comparado ao número de tocadores de áudio enviados para conserto por dia."

Decida se a afirmação do técnico é correta. Use um argumento matemático para justificar sua resposta.

Questão 3: APARELHOS DEFEITUOSOS

A empresa *Tron* também fabrica tocadores de áudio e de vídeo. Ao final da produção diária, os tocadores fabricados pela *Tron* são testados e aqueles com defeito são retirados e enviados para conserto.

Os quadros abaixo comparam o número médio de tocadores de cada tipo fabricados por dia, e a porcentagem média de tocadores defeituosos por dia, nas duas empresas.

Empresa	Número médio de tocadores de vídeo fabricados por dia	Porcentagem média de tocadores defeituosos por dia
Eletrix	2 000	5%
Tron	7 000	4%

Empresa	Número médio de tocadores de áudio fabricados por dia	Porcentagem média de tocadores defeituosos por dia
Eletrix	6 000	3%
Tron	1 000	2%

Qual das duas empresas (*Eletrix* ou *Tron*) tem a menor porcentagem total de tocadores defeituosos? Faça seus cálculos, usando os dados dos quadros acima.

Fonte: PISA (2012).

A análise dessas produções foi conduzida sob a ótica da "leitura positiva", conceito discutido por Garnica (2006). Em vez de adotar a tradicional "leitura pela falta", a avaliação partiu do princípio de que toda enunciação elaborada pelo estudante, mesmo aquela que esbarra em um distrator, expressa uma compreensão legítima e um modo particular de lidar com a situação. Assim, os erros não foram tratados como anomalias a serem punidas, mas sim como indícios valiosos do modo de pensar dos estudantes, assumindo a dimensão de uma oportunidade de aprendizagem, conforme preconizam Silva e Buriasco (2023).

Para viabilizar a prática na realidade escolar, as resoluções que apresentaram percursos lógicos semelhantes diante dos distratores foram metodologicamente agrupadas. A partir desse mapeamento, as intervenções pedagógicas foram elaboradas de maneira direcionada e adequada ao raciocínio de cada grupo. Para isso, foram elaborados questionamentos e comentários que instigaram os alunos a perceberem as fragilidades ou contradições em suas próprias respostas.

Referências

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas Considerações sobre Avaliação Educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, n. 22, p. 155-178, 2000.

GARNICA, A. V. M. Erros e leitura positiva: propostas, exercícios e possibilidades. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1.; JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2006, Passo Fundo. **Anais** [...]. Passo Fundo, 2006.

VERSÃO PROVISÓRIA

SILVA, G. S. e; BURIASCO, R. L. C. de. O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. **HISTEMAT - Revista de História da Educação Matemática**, [S. l.], v. 9, p. 1-17, 2023.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Aprendizagem da Matemática Financeira no Contexto da Educação Financeira: análise de fatores cognitivos e emocionais à luz da neuroeducação na Educação Básica e na formação inicial de professores.

Erik Carolo Martins[1]
erik.martins.56@estudante.unespar.edu.br

Liceia Alves Pires (Orientadora)[2]
liceia.pires@unespar.edu.br

Resumo

A Educação Financeira vem sendo incorporada às orientações educacionais brasileiras como tema relacionado à formação dos estudantes para a tomada de decisões conscientes em situações envolvendo recursos financeiros. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Educação Financeira integra os Temas Contemporâneos Transversais, propondo articulação com diferentes componentes curriculares. Nesse contexto, a matemática pode contribuir para a compreensão de conceitos como porcentagem, juros e planejamento financeiro, embora a abordagem desses conteúdos não se restrinja aos procedimentos matemáticos. Diante disso, este estudo tem como objetivo analisar a aprendizagem de conceitos de matemática financeira no contexto da educação financeira, considerando fatores cognitivos e emocionais à luz da neuroeducação, tanto na educação básica quanto na formação inicial de professores de matemática. A pesquisa será desenvolvida por meio de revisão bibliográfica e investigação de campo com estudantes da educação básica e/ou acadêmicos de licenciatura em matemática, utilizando questionários estruturados e atividades diagnósticas. Posteriormente, serão elaboradas e aplicadas atividades envolvendo resolução de problemas e modelagem matemática em situações relacionadas à educação financeira. Busca-se discutir criticamente as possibilidades e os desafios da abordagem transversal proposta pelos documentos educacionais nacionais, especialmente quanto à articulação entre conhecimentos matemáticos, formação docente e situações financeiras do cotidiano. Espera-se identificar dificuldades recorrentes e possíveis relações entre aspectos cognitivos e emocionais, contribuindo para estratégias didáticas que favoreçam uma aprendizagem mais significativa da matemática financeira.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Educação Financeira, Neuroeducação.

[1]Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Graduando em Licenciatura em Matemática. bolsista de Iniciação Científica do CNPq.
[2]Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Docente do Colegiado de Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

A Educação Financeira vem sendo incorporada às orientações educacionais brasileiras, especialmente a partir de sua inserção como Tema Contemporâneo Transversal na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo proposta de forma articulada a diferentes componentes curriculares (BRASIL, 2018). Nesse contexto, a Matemática pode contribuir para a compreensão de situações envolvendo porcentagem, juros e planejamento financeiro. Entretanto, a abordagem desses conteúdos não se limita à realização de cálculos, envolvendo também interpretação, tomada de decisões e mobilização de conhecimentos em situações do cotidiano.

Embora os documentos nacionais proponham uma abordagem transversal da Educação Financeira, sua efetivação no ensino demanda articulação entre conhecimentos matemáticos, práticas pedagógicas e formação docente. Além disso, fatores cognitivos e emocionais, como atenção, insegurança e ansiedade, podem interferir na aprendizagem e na resolução de problemas matemáticos (FIGUEIRA et al., 2020). Nesse sentido, a Neuroeducação pode contribuir para a compreensão dos processos envolvidos na aprendizagem (COSENZA; GUERRA, 2011).

Diante disso, esta pesquisa tem como objetivo analisar a aprendizagem de conceitos de Matemática Financeira no contexto da Educação Financeira, investigando possíveis relações entre fatores cognitivos e emocionais e a compreensão e resolução de situações-problema, considerando a Educação Básica e a formação inicial de professores de Matemática.

Resultados Principais

Por se tratar de uma pesquisa de iniciação científica em desenvolvimento, os resultados apresentados correspondem às expectativas e aos encaminhamentos da investigação. Busca-se identificar dificuldades na compreensão e aplicação de conceitos de Matemática Financeira, especialmente em situações envolvendo porcentagem, juros e planejamento financeiro.

A pesquisa também pretende analisar possíveis relações entre o desempenho matemático e fatores cognitivos e emocionais envolvidos na resolução de problemas. Para isso, serão utilizadas atividades diagnósticas e situações-problema relacionadas à Educação Financeira, buscando observar não apenas os procedimentos matemáticos empregados, mas também a interpretação e a tomada de decisões dos participantes.

Espera-se, ainda, discutir os desafios da abordagem transversal da Educação Financeira proposta nos documentos nacionais e contribuir para a elaboração de estratégias didáticas que articulem conhecimentos matemáticos, aspectos cognitivos e dimensões emocionais. Os resultados poderão contribuir tanto para a aprendizagem da Matemática Financeira quanto para a formação inicial de professores.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. **Ministério da Educação. Caderno economia: educação financeira, educação fiscal e trabalho**. Brasília, DF: MEC, 2022.

COSENZA, Ramon Moreira; GUERRA, Leonor Bezerra. **Neurociência e educação: como o cérebro aprende**. Porto Alegre: Artmed, 2011.

FIGUEIRA, Patrícia de Oliveira et al. Relação entre ansiedade matemática, memória de trabalho e controle inibitório: uma meta-análise. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 34, n. 67, p. 678–696, 2020.

RELVAS, Marta. **Neuroeducação e aprendizagem**. Rio de Janeiro: Wak, 2025.

SILVA, Rômulo Terminelis da. Neuroeducação, ciência multidisciplinar: psicologia, educação e neurociência. **Revista FT, Ciências da Saúde**, v. 29, ed. 146, 2025.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Conhecimento Matemático para o Ensino: análise de práticas docentes no Estágio Supervisionado

Rafael Ademar Lanser[1]
rafael.a.lanser@grad.ufsc.br

Júlio Faria Corrêa[2]
correa.j@ufsc.br

Resumo

O objetivo do trabalho é apresentar uma análise de práticas docentes a partir do modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), buscando identificar conhecimentos mobilizados pelos professores em diferentes momentos do ensino. As observações foram realizadas no primeiro semestre de 2026 durante uma disciplina de Estágio Supervisionado de um curso de Licenciatura em Matemática, em aulas de Matemática de uma escola de Ensino Médio. A análise evidenciou que os diferentes subdomínios do MKT se manifestam de maneira articulada, especialmente em situações envolvendo a antecipação de dificuldades dos estudantes, a escolha de representações, a organização das atividades e as relações entre conteúdos. A experiência possibilitou perceber que ações aparentemente simples do professor envolvem conhecimentos específicos para o ensino de Matemática, contribuindo para uma compreensão mais ampla e reflexiva da prática docente e enriquecendo o processo de formação inicial.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático para o Ensino, Formação Inicial, Estágio Supervisionado, Educação Matemática.

Introdução, Fundamentação Teórica e Metodologia

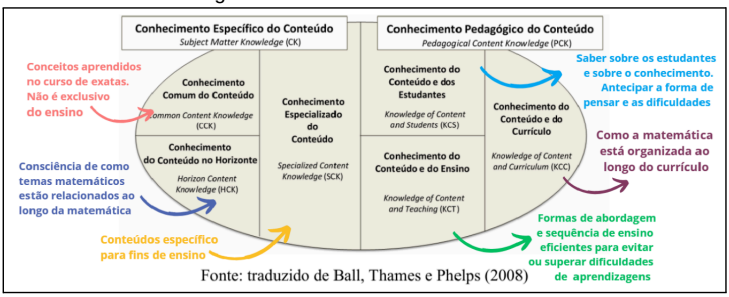
O conhecimento necessário para ensinar Matemática não se limita ao domínio dos conteúdos matemáticos. O professor mobiliza diferentes conhecimentos ao interpretar dificuldades dos estudantes, selecionar representações, organizar atividades, analisar erros e estabelecer relações entre conteúdos. Nesse sentido, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem o modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (Mathematical Knowledge for Teaching – MKT), que organiza esses conhecimentos em seis subdomínios. Braz *et al.* (2025), ao analisarem uma situação de ensino de Matemática a partir desse referencial, evidenciam a possibilidade de utilizar os subdomínios do MKT para interpretar conhecimentos mobilizados em

[1]Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Campus Blumenau. Graduando do curso de Licenciatura em Matemática. Bolsista do Programa de Iniciação Científica Júnior.
[2]Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Campus Blumenau. Doutor em Educação.

VERSÃO PROVISÓRIA

situações concretas de ensino. Os autores também apresentam, na Figura 1, os seis subdomínios e suas respectivas descrições, que orientaram a análise realizada neste trabalho.

Figura 1 – Domínios do MKT.



Fonte: Braz *et al.* (2025).

A atividade foi desenvolvida na disciplina de Estágio Supervisionado I na UFSC – Campus Blumenau, no primeiro semestre de 2026, a partir da observação de aulas de Matemática em uma escola de Ensino Médio. As observações foram registradas em um diário de campo que serviu de base e tais registros foram analisados a partir do referencial teórico. Buscou-se analisar situações concretas vivenciadas por uma professora a partir dos subdomínios do MKT, não apenas com o intuito de classificá-las, mas de refletir sobre as práticas observadas e sobre os conhecimentos mobilizados nas diferentes ações e decisões docentes. Essa proposta se relaciona à articulação entre teoria, prática e reflexão na formação inicial de professores de Matemática, destacada por Vitalino, Teixeira e Santos (2023).

Análise e Resultados

A partir da distinção entre os diferentes conhecimentos necessários ao professor de Matemática, buscou-se observar como eles se manifestavam nas aulas acompanhadas durante o estágio. Como diferentes conhecimentos podem aparecer articulados em uma mesma situação, cada ocorrência foi relacionada aos subdomínios aos quais apresentava maior aproximação. Na análise, foram mais evidentes o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS), o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) e o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK). O Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC) e o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) apareceram em momentos mais pontuais. Essa menor presença, contudo, está relacionada ao fato de envolverem aspectos do planejamento e da organização do ensino que não foram diretamente acompanhados durante as observações.

O KCS foi o mais facilmente identificado. A professora demonstrava conhecer dificuldades recorrentes dos estudantes e antecipar possíveis erros. No estudo de juros compostos, por exemplo, quando taxa e tempo deveriam estar na mesma unidade de medida e a ordem das operações da fórmula. Esse conhecimento também orientava adaptações conforme as características e dificuldades de cada turma. Sua articulação com o KCT apareceu nas decisões sobre como organizar e conduzir o ensino, como na dedução da fórmula de juros compostos e na construção

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

de uma situação que evidenciava o erro de utilizá-la em problemas de parcelamento. Essas escolhas pedagógicas indicam a preocupação com a compreensão do conteúdo, estando ancorada no subdomínio KCT. O vínculo entre esses conhecimentos evidencia a relação entre o conhecimento sobre os estudantes e as decisões tomadas no ensino, aspecto presente na caracterização do MKT por Ball, Thames e Phelps (2008).

O SCK, além de se relacionar fortemente com os subdomínios já mencionados, também apareceu na seleção de diferentes representações para um mesmo conceito matemático. Por exemplo, a professora utilizou “tracinhos” em problemas de análise combinatória, barras divididas para representar comparações entre frações e recursos visuais para explicar quartis. Constatou-se que a professora busca traduzir os conceitos para uma representação mais acessível, mas isso requer justamente um conhecimento matemático próprio do professor de matemática. O apelo visual das representações não é arbitrário, é uma escolha pensada que comunica o sentido matemático através de diferentes maneiras, manifestação do SCK.

O CCK foi percebido no domínio dos conceitos e procedimentos matemáticos necessários para resolver exercícios e responder às dúvidas dos estudantes. Já o KCC apareceu nas falas da professora sobre a organização dos conteúdos do Ensino Médio e sobre aquilo que os estudantes haviam estudado ou ainda estudariam. Em diferentes momentos, ela demonstrou conhecer a sequência dos conteúdos e como eles se distribuem ao longo da formação dos estudantes.

O HCK foi o mais difícil de identificar, por envolver noções que nem sempre são explicitadas durante a aula. Um exemplo expressado pela professora foi a escolha de trabalhar logaritmos após juros compostos, com objetivo de mostrar aos alunos a aplicação de um conteúdo em outro, esperando que desta forma faça mais sentido. Essa dificuldade de identificação está relacionada à própria natureza desse conhecimento, que envolve a percepção da progressão dos conteúdos e das conexões internas da Matemática (BRAZ et al., 2025).

De maneira geral, a análise permitiu perceber que situações, como antecipar um erro, escolher uma representação, organizar uma atividade ou relacionar conteúdos mobilizam diferentes conhecimentos para o ensino de Matemática. O trabalho contribuiu, assim, para aproximar os conhecimentos teóricos da licenciatura das situações concretas vivenciadas no estágio. Esse exercício de análise e reflexão baseado nos subdomínios favoreceu a problematização das situações observadas e uma compreensão mais ampla dos conhecimentos envolvidos na prática docente, contribuindo para o processo de formação inicial, em consonância com as ações formativas discutidas por Vitalino, Teixeira e Santos (2023).

Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1177/0022487108324554. Acesso em: 03 abr. 2026.

BRAZ, Anderson Azevedo *et al.* Conhecimento matemático para o ensino evidenciado em uma tarefa exploratória com palitos de fósforo. **Revista Tópicos**, v. 3, n. 27, p. 1-14, 2025. Disponível em: https://zenodo.org/records/17705643. Acesso em: 03 abr. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

VITALINO, Gabriela da Silva Oliveira; TEIXEIRA, Bruno Rodrigo; SANTOS, Edilaine Regina dos. Articulação entre teoria e prática: um inventário de ações na formação inicial de professores de Matemática. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 4, n. 1, e202310, 2023. Disponível em: https://www.revistas.uneb.br/index.php/baeducmatematica/article/view/16014. Acesso em: 12 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem “A caixa de sabão em pó”

Gabriel Bressan Sizenando[1]
gabrielbressan@alunos.utfpr.edu.br

Ana Julia Endler[2]
endler@alunos.utfpr.edu.br

Wanderson dos Santos Rodrigues[3]
wandersonrodrigues@alunos.utfpr.edu.br

Maria Lucia Panossian (Orientadora)[4]
mlpanossian@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho objetiva apresentar a elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem "A caixa de sabão em pó", com detalhamento sobre os princípios da Atividade Orientadora de Ensino como seu fundamento teórico. A situação foi desenvolvida por participantes do projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática com três turmas da 1ª série do Ensino Médio.

Palavras-chave: Oficina Pedagógica de Matemática, Atividade Orientadora de Ensino, situação desencadeadora de aprendizagem, geometria, prisma.

Introdução

A Oficina Pedagógica de Matemática (OPM), projeto de extensão vinculado ao Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), tem por objetivo promover a articulação da teoria e prática (práxis) envolvendo alunos da graduação, mestrado e doutorado do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET), professores do Departamento Acadêmico de Matemática da UTFPR, e professores da rede municipal de Piraquara (PR) e São José dos Pinhais (PR). A

[1] UTFPR. Estudante de Licenciatura em Matemática. Bolsista do projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática.
[2] UTFPR. Estudante de Licenciatura em Matemática. Bolsista do projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática.
[3] UTFPR. Estudante de Licenciatura em Matemática. Voluntário do projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática.
[4] UTFPR. Doutora em Educação. Professora do Departamento Acadêmico de Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

OPM tem como linha teórica a Atividade Orientadora de Ensino, tendo como base a Teoria Histórico-cultural e a Teoria da Atividade, e como referência os trabalhos de Manoel Oriosvaldo de Moura e do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Atividade Pedagógica (GEPAPe).

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) é proposta por Moura *et al*. (2010) como mediação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem, entre os sujeitos professor e aluno, a partir de necessidades, motivos, ações e operações específicas e intencionais. A necessidade de se apropriar dos conhecimentos historicamente acumulados pela humanidade, para os alunos, é apresentada a partir de situações desencadeadoras de aprendizagem.

E, dentre as diversas situações desencadeadoras de aprendizagem elaboradas na OPM, uma delas é "A caixa de sabão em pó", a qual é o foco deste trabalho. O objetivo é apresentar os elementos desta situação, desde a sua elaboração, as justificativas de suas escolhas, até a experiência do seu desenvolvimento em sala de aula.

Apresentação da situação "A caixa de sabão em pó"

De acordo com Carlos, Panossian e Kalinke (2023), a situação "A caixa de sabão em pó" foi elaborada tendo como ponto de partida uma reportagem que apresenta a situação de uma empresa que reduziu o consumo de papel na produção das embalagens de seu produto.

Com o entendimento de que é uma situação que pode ser vivenciada no cotidiano e com a intencionalidade voltada para o estabelecimento de relações entre formas geométricas, foram determinados os conceitos matemáticos principais: área e volume dos prismas. Para que houvesse o desenvolvimento de uma situação desencadeadora de aprendizagem, foi necessária "a compreensão das relações que contém a necessidade, a lógica, a história, os nexos e a essência do processo de constituição humana do conceito" (Carlos; Panossian; Kalinke, 2023, p. 104). As divisões de terras férteis foram necessidades para o cálculo de superfícies, a troca de produtos através do comércio foi a necessidade para a definição de padrões comuns de medição do volume de diferentes vasilhames. Esses conceitos de área e volume surgem intuitivamente como soluções de questões do cotidiano, mas sua sistematização e formalização atual, com diversas relações lógicas a outros conceitos, podem ser compreendidas por meio da situação desencadeadora de aprendizagem.

A versão apresentada neste trabalho foi organizada com base em Oficina Pedagógica de Matemática (2022), com alterações apenas na forma, como nas imagens da representação da caixa, palavras das perguntas orientadoras, e no formato geral da apresentação, que está descrita a seguir.

A situação é apresentada a partir de um cenário que envolve a personagem Joana e sua forma de avaliar a possibilidade de compra de um produto de acordo com seu preço e sua respectiva quantidade. Por conta da atualização das dimensões da caixa de sabão em pó que costumava comprar, ela questiona a preservação da quantidade do produto na embalagem em relação à antiga, constituindo uma situação desencadeadora de aprendizagem do tipo situação emergente do cotidiano (Panossian e Tocha, 2020).

Na organização do ensino com esta situação, em um primeiro momento, os alunos podem ser questionados sobre as formas de ajudar a personagem a chegar a uma possível conclusão. Essa seria a primeira interação relacionada a conceitos

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

espaciais, e possibilita que os estudantes estejam em atividade. O intuito é que eles formem hipóteses livremente, argumentando seus posicionamentos, sendo o professor quem fomenta o diálogo.

Em um segundo momento, dadas as medidas de cada embalagem, os alunos podem ser questionados sobre a capacidade de cada uma e as quantidades de material para fabricá-las. Nessa nova interação há a necessidade de compreensão dos conceitos de volume e área e como diferenciá-los, sem que os termos “área” e “volume” sejam citados no problema, propositalmente. Por isso é importante que o diálogo seja encaminhado, pelo professor, para a relação entre área e volume e a economia de material com a nova embalagem, sendo esses os motivadores para a resolução do problema.

Em um terceiro momento, os questionamentos são sobre as dimensões para uma embalagem que suporte o dobro do produto original. Primeiro a partir da nova embalagem e depois a partir de uma embalagem cúbica, tendo como objetivo formar uma nova embalagem cúbica – apresentando, enfim, o problema histórico da duplicação do cubo. O objetivo com esses problemas é que ocorram ações para que haja a ampliação das relações conceituais por parte dos alunos para que solucionem o problema, superando o pensamento empírico. Enquanto na primeira parte é necessário que apenas uma de suas dimensões seja duplicada, na duplicação do cubo é necessário que todas as arestas sejam multiplicadas por um fator de escala de $\sqrt[3]{2}$, generalizando aspectos aritméticos, geométricos, e algébricos.

Desenvolvimento da situação com alunos do Ensino Médio

Os integrantes da OPM foram separados em três subgrupos, um para cada uma das três turmas da 1ª Série do Ensino Médio do Centro Estadual de Educação Profissional Erotídes Ângelo Nichele.

O desenvolvimento aconteceu em todas as turmas de forma simultânea no dia 17 de novembro de 2025, e, de início, os alunos foram organizados em grupos de até cinco alunos. Para cada momento da situação foram entregues folhas com os problemas, com espaço para a resolução. Um dos temas abordados foi o da sustentabilidade e necessidade da redução e eficiência do uso dos recursos naturais.

Os subgrupos tiveram experiências diferentes em relação ao envolvimento dos alunos a partir do início da aula, mas, depois do segundo momento, com a Equipe Executora passando e ajudando os grupos dos estudantes, houve maior participação. E, por falta de tempo, o momento da duplicação do cubo não foi concluído em todos os subgrupos da Equipe Executora.

Resultados Principais

Percebeu-se a importância do diálogo e compartilhamento de ideias entre alunos, assim como a atenção dos professores sobre a resolução dos alunos. Ao identificar que a situação apresenta um problema desencadeador e possibilita a ação coletiva, contempla a relação essencial do conceito e encaminha para formas de pensamento teórico, então constitui uma situação desencadeadora de aprendizagem, a qual foi apresentada desde sua elaboração inicial até seu desenvolvimento em sala de aula.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

CARLOS, Vanessa de Fatima Custódio Dambros de; PANOSSIAN, Maria Lucia; KALINKE, Marco Aurélio. A caixa de sabão em pó: análise das potencialidades de uma situação desencadeadora de aprendizagem. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 10, n. 3, p. 95–116, 2023. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/61841. Acesso em: 13 ago. 2026.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de *et al*. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, [S. l.], v. 10, n. 29, p. 205–229, 2010. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/3094. Acesso em: 13 ago. 2026.

OFICINA PEDAGÓGICA DE MATEMÁTICA. **A caixa de sabão em pó**. Curitiba, 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1_T4ZMFUL6ZPJ55NUOEi11L7oJPe_b17h/view. Acesso em: 13 ago. 2026.

PANOSSIAN, Maria Lucia; TOCHA, Neusa. Nogas (org.). **Estabelecendo parâmetros de análise de situações de ensino de conteúdo matemático**: aproximações a partir da Atividade Orientadora de Ensino. Curitiba, 2020. Disponível em: https://sites.google.com/view/opm-2019/produ%C3%A7%C3%B5es/livro-estabelecendo-par%C3%A2metros-de-an%C3%A1lise-de-situa%C3%A7%C3%B5es-de-ensino. Acesso em: 13 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Geometria Fractal: uma abordagem para o Ensino Médio

Juliane Radikowski de Souza[1],
21023130003i@unicentro.edu.br

Karolina Barone Ribeiro da Silva Hrentchechen (Orientadora)[2]
kbarone@unicentro.br

Resumo

A matemática é frequentemente considerada pelos estudantes do Ensino Médio como uma disciplina abstrata e distante da realidade, sendo vista como uma matéria difícil. Buscando contornar essa situação e tornar as aulas mais dinâmicas, aqui são apresentados resultados de um Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação que propôs uma abordagem da Geometria Fractal voltada ao Ensino Médio. Amparado pelas competências da Base Nacional Comum Curricular, o estudo buscou relacionar modelos geométricos não euclidianos com elementos da natureza e com o cotidiano dos alunos. A metodologia adotada possui caráter qualitativo e exploratório, estruturada a partir de uma sequência didática aplicada em sala de aula, cujos dados foram coletados por meio de produções escritas dos estudantes e registros em diário de bordo. A fundamentação teórica ancorou-se na análise de erros sob a perspectiva de Guy Brousseau, além das contribuições de Romulo Campos Lins acerca do pensamento algébrico. Evidenciou-se que, apesar da afinidade dos alunos com o aspecto visual e recursivo dos fractais, a transição do raciocínio aritmético para o algébrico ainda enfrenta barreiras. Assim, a Geometria Fractal surge como ferramenta potente para conectar a matemática à realidade discente. Conclui-se, portanto, que tarefas exploratórias dessa natureza são indispensáveis em todas as etapas formativas, sendo cruciais para consolidar o pensamento algébrico e evitar a defasagem dessa habilidade.

Palavras-chave: geometria fractal, ensino médio, análise de erros, sequência didática, pensamento algébrico.

Introdução

A abordagem da geometria fractal no Ensino Médio abre possibilidades metodológicas de revisão de conteúdos pelos alunos, por meio de uma nova ótica, bem como, a exploração das competências propostas na Base Nacional Comum

[1]Universidade Estadual do Centro-Oeste, Câmpus de Irati. Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática.
[2]Universidade Estadual do Centro-Oeste, Câmpus de Irati. Mestre em Estatística.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Curricular - BNCC (Brasil, 2017) relacionadas à investigação e estabelecimento de conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, levando os estudantes a pensar criticamente e analisar padrões do mundo real.

Deste modo, aqui são apresentados resultados de um Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação que se caracteriza por uma abordagem qualitativa e exploratória, buscando compreender e analisar os impactos do desenvolvimento de uma sequência didática envolvendo a Geometria Fractal para alunos do 3° ano do Ensino Médio. O público-alvo encontra-se em uma instituição de ensino localizada no interior do Paraná, na qual a autora leciona a disciplina de Recomposição de Aprendizagem Matemática.

A sequência didática foi dividida em etapas, com o objetivo de revisar área e perímetro de figuras planas e expressões algébricas, explorando os fractais Floco de Neve de Koch e Triângulo de Sierpinski. Os dados foram coletados ao longo das aulas por meio da produção de um diário de bordo; da análise das produções da turma e registro de fotografias das resoluções dos alunos.

Resultados Principais

Ao longo da apresentação do tema, os discentes demonstraram grande interesse e curiosidade ao observar as formas da natureza e se depararem com uma geometria (fractal) que poderia descrevê-las de maneira mais adequada do que a que estavam acostumados a estudar (euclidiana), levantando muitos questionamentos e demonstrando engajamento no assunto.

Entretanto, ao realizarem a primeira atividade que consistia em analisar e escrever de maneira algébrica as relações entre o perímetro, a área e a medida dos lados do Floco de Neve de Koch, nas 3 primeiras iterações, os estudantes demonstraram grande dificuldade em transitar do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, sendo necessário um breve auxílio da professora para preencherem a primeira linha do quadro proposto.

Entretanto, apesar da falta de domínio para expressar e formalizar generalizações, é perceptível que os alunos possuem um desenvolvimento inicial do pensamento algébrico, pois segundo Ferreira, Vieira e Silva (2022, p. 7):

> A primeira vertente do pensamento algébrico, na concepção de Lins (1992), é o pensar aritmeticamente (ou aritmeticidade), que significa "modelar, em números, o que naturalmente implica a utilização das operações aritméticas a fim de produzir as relações que constituem o modelo" (p. 12), sendo, portanto, os principais objetos de trabalho os números, as operações aritméticas e uma relação de igualdade, e estes são vistos como ferramentas dentro de determinadas situações.

Visando oportunizar o debate acerca da auto similaridade e da existência de dimensões não inteiras para os fractais, foram apresentadas figuras geométricas previamente conhecidas e comparadas a fractais de dimensões próximas, seguida pela realização do Jogo do Caos em uma plataforma digital para apresentar o Triângulo de Sierpinski.

A partir deste fractal, os alunos foram desafiados a calcular a área e o perímetro de suas primeiras iterações, avançando para a dedução de uma expressão algébrica que generalizasse os padrões observados. Destaca-se que um dos grupos se equivocou ao descrever o padrão do perímetro do Triângulo de Sierpinski, trazendo

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

em seu lugar o comportamento do lado dos novos triângulos a cada iteração (uma proporção que não se aplica ao perímetro total).

Contudo, ao analisar a expressão matemática construída para o perímetro na iteração *n*, percebe-se que o erro decorreu de uma redação confusa, e não de uma incompreensão matemática do problema. Esse equívoco pode ser classificado como um erro de tecnologia, uma das quatro vertentes principais do erro propostas por Brousseau (2001). Ao caracterizar essa categoria, Almeida (2025) esclarece que:

> O erro de tecnologia apresenta uma natureza distinta e ocorre quando o aluno consegue solucionar a questão, mas não consegue justificar a técnica utilizada ou, mesmo estando com a resposta correta, em seu discurso o aluno demonstra ter realizado um procedimento operacional inadequado (ALMEIDA, 2025, p. 21).

Ou seja, o grupo entendeu o conceito, mas falhou ao expressá-lo, ficando evidente que eles dominavam a lógica matemática do problema, mas equivocaram-se ao tentar traduzir formalmente esse raciocínio. Esse cenário reforça a importância de o professor não avaliar o erro como ausência total de conhecimento, mas sim como um obstáculo de linguagem e comunicação, que precisa ser mediado.

Com base nas resoluções envolvendo os fractais, ao final da sequência foi promovida uma análise comparativa para identificar e diferenciar os comportamentos das sequências escritas, elencando os casos em que as soluções convergiam para zero ou tendiam ao infinito, conforme o número de iterações tendesse ao infinito. Nesta etapa, os estudantes confundiram o comportamento dos valores no Floco de Neve de Koch, mas compreenderam a dinâmica do Triângulo de Sierpinski.

Em suma, a aplicação das atividades mostrou que, embora a formalização matemática dos fractais tenha lhes trazido desafios significativos, os estudantes demonstraram grande interesse no tema abordado e facilidade na identificação visual de padrões. Os resultados evidenciaram lacunas importantes, como a dificuldade na transição do pensamento aritmético para o algébrico e na identificação de dimensões euclidianas. Além disso, a análise das respostas permitiu observar erros recorrentes que também estão presentes em produções científicas atreladas à educação matemática, que variaram desde a escrita confusa até a interpretação errônea dos conceitos de perímetro e área quando relacionados ao infinito. Sendo assim, destaca - se o quão importante é propor tarefas matemáticas exploratórias em todas as etapas de ensino, buscando desenvolver o raciocínio lógico e argumentativo dos alunos, contribuindo diretamente para sanar as lacunas de aprendizagem encontradas.

Referências

ALMEIDA, M. J. S. **Sobre o reconhecimento de padrões**. 2025. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Departamento de Matemática de Itabaiana, Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2025. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/22409/2/Maria_Juliana_Santos_Almeida.pdf. Acesso em: 12 jun. 2026.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 5 set. 2025.

VERSÃO PROVISÓRIA

BROUSSEAU, G. Les erreurs des élèves en mathématiques: Etude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. **Petit x**, Grenoble, n. 57, p. 5-30, 2001.

FERREIRA, N. C.; VIEIRA, W. M.; SILVA, L. D. Pensamento Algébrico: possibilidades de manifestação a partir de resolução de problemas. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 19, p. 1-25, 2022. Edição Especial.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Geometria Plana no Exame Nacional do Ensino Médio: uma proposta de análise para aprendizagem

Gustavo Martini[1]
Belemgustavo178@gmail.com

Renan Brito de Araujo[2]
renanbrito0607@gmail.com

Robert Soldati Pereira[3]
robertsoldati1@gmail.com

Weslley da Silva[4]
wescardoso@gmail.com

Mauro Roberto dos Santos (Orientador(a))
mauroroberto.santos@unespar.edu.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) está consolidado como a principal porta de entrada para as universidades brasileiras. No entanto, são nítidas as diferenças no preparo para a realização da prova entre as diferentes classes sociais brasileiras, gerando uma persistente barreira socioeconômica na contemporaneidade. Dados recentes do MEC, apontam que dentre as cinquenta escolas com as maiores médias no Enem, apenas duas pertencem à rede pública. Diante desse cenário, essa pesquisa possui como objetivo atenuar as disparidades vigentes por meio de conceitos elementares matemáticos que propiciem uma melhor compreensão aos estudantes. A metodologia desse estudo se materializa por meio de aplicações desses conteúdos em escolas da rede pública de ensino do litoral paranaense. A partir desse momento, serão coletadas evidências das maiores dificuldades de cada sala, possibilitando um melhor diagnóstico do cenário e a melhoria de propostas didáticas para as atividades futuras.

[1]Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR Campus Paranaguá. Graduando em licenciatura

[2]Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR Campus Paranaguá. Graduando em licenciatura

[3]Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR Campus Paranaguá. Graduando em licenciatura

[4]Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR Campus Paranaguá. Graduando em licenciatura

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria Plana, ENEM.

Introdução

Desempenho no Enem entre ensino público e privado

As avaliações pelo ENEM têm demonstrado algo interessante no que tange aos desempenhos apresentados pelos estudantes da rede pública e da rede particular (MORAES, 2014). Moraes (2014) ainda acrescenta que a diferença de desempenho entre os dois modelos educacionais atinge o patamar de 115 pontos, em média, à favor da educação privada. Além disso, muitos estudantes ainda não conseguiram considerar a relevância dessa modalidade de avaliação externa, pois esse processo não o permite apenas o acesso ao curso superior, mas oferece a esse estudante alguns pontos que precisam chegar até a eles, tais como: a) autoavaliação real, pois o exame permite oferecer ao estudante as suas condições, suas potencialidades e oportunidades de melhorias nas áreas de conhecimentos; b) acessos aos programas e incentivos do governo, como por exemplo o pé-de-meia, principalmente aos estudantes de baixa renda na participação nos dois dias do exame; c) mercado de trabalho, onde empresas normalmente valorizam estudantes que participaram de processos avaliativos complexos; d) a resiliência, pois ao se submeter a realizar prova de longa duração, o estudante aprende a gerenciar melhor o seu tempo, administrar a sua ansiedade e aprende a lidar com situações de grande pressão; e) histórico, já que o seu resultado serve como trampolim às bolsas de estudos, monitorias, estágios e até, mobilidade internacional para seus estudos; entre demais pontos. Observando a avaliação estudantil no ENEM, percebe a dificuldade apresentada na área de conhecimento da Matemática, onde levantamentos sobre o ENEM apontam as dificuldades dos estudantes nessa avaliação e a Matemática permanece como a disciplina que oferece maiores desafios para mais de cinquenta por cento dos estudantes (TERRA, 2024). Esse cenário corrobora para a disparidade de pontuações registradas pelas avaliações dos estudantes da rede pública de ensino em relação aos da rede privada, e na Matemática a realidade não é diferente. Nesse sentido, o interesse por esse problema surgiu exatamente em uma disciplina do curso de licenciatura da Matemática que busca resgatar conceitos elementares da Geometria e o tratamento didático-pedagógico aos seus conteúdos específicos que constante desafia em buscar metodologias de diversas naturezas para identificar dificuldades na aprendizagem de seus acadêmicos e com isso, oferecer abordagens metodológicas que venham a mitigar o cenário que se apresenta e que se alterna a cada avanço nos estudos dos conteúdos da disciplina.

Aplicação

Considerando o campo da Educação Matemática, as formas de se resolver problemas produzem o efeito de que o próprio problema integra a solução, ou seja, ele representa o ponto de partida para a busca do conhecimento do estudante e, nesse viés, a resolução de problemas surge como oportunidade metodológica para trabalhar o ensino e, principalmente, a aprendizagem. Assim, para cada tipo de problema existem diversas formas resolutivas, e é justamente nessa questão que reside o objetivo do projeto: orientar os estudantes a perceberem que encontrar o melhor caminho de resolução representa também o revelar dos seus saberes, independentemente da avaliação a que estarão sujeitos.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Para ilustrar essa proposta, os próprios pesquisadores responsáveis pelo presente trabalho realizaram uma aplicação em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública do litoral do Paraná, buscando observar como os estudantes mobilizam seus conhecimentos diante de problemas semelhantes aos encontrados no ENEM. Inicialmente, foi utilizada a questão 143 do ENEM 2014, caderno azul, apresentada sem contextualização prévia dos conteúdos necessários para sua resolução. Essa etapa possibilitou identificar as principais dificuldades e os conhecimentos que necessitavam de retomada. A partir das dificuldades observadas, os pesquisadores retomaram os conteúdos necessários ao desenvolvimento da questão, estabelecendo relações entre os conceitos matemáticos e as informações apresentadas no problema. Foram trabalhados conteúdos relacionados a retas e ângulos, áreas de figuras planas e equações, entre outros. A intervenção, portanto, não se concentrou apenas na obtenção da resposta, mas no desenvolvimento do raciocínio utilizado para alcançá-la. Posteriormente, foi apresentada a questão 166 do ENEM 2019, que exigia a mobilização de conhecimentos trabalhados durante a intervenção, especialmente equação do segundo grau e área do retângulo. A utilização de uma nova questão permitiu observar se os conhecimentos retomados poderiam ser mobilizados em uma situação diferente, relacionando as dificuldades identificadas inicialmente ao desempenho apresentado após a intervenção.

Resultados Principais

No primeiro momento, foi solicitada a resolução da atividade sem que fossem realizadas as contextualizações dos conteúdos envolvidos no problema. Como resultado, apenas dois estudantes conseguiram resolver a questão com êxito, correspondendo a aproximadamente 7% da turma. Após a intervenção realizada, com a retomada e articulação dos conteúdos necessários à resolução, foi apresentada uma nova questão com características semelhantes, na qual nove estudantes conseguiram atingir a resolução correta, representando aproximadamente 35% da turma. A comparação entre os dois momentos demonstra um aumento de sete estudantes no número de resoluções corretas, passando de 2 para 9 alunos, o que corresponde a uma evolução de aproximadamente 128% em relação à quantidade inicial de acertos. Embora os resultados estejam restritos à turma em que a aplicação foi realizada, os dados obtidos indicam uma mudança no desempenho dos estudantes após a intervenção, especialmente quanto à mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários para interpretar e desenvolver os problemas propostos. Além dos dados quantitativos, a aplicação permitiu aos pesquisadores observar que parte das dificuldades apresentadas pelos estudantes não estava necessariamente relacionada à ausência completa dos conteúdos matemáticos, mas também à dificuldade em reconhecer quais conhecimentos poderiam ser utilizados diante de uma situação-problema. Nesse sentido, a experiência realizada reforça a importância de trabalhar a resolução de problemas de forma articulada aos conteúdos matemáticos, possibilitando ao estudante compreender não apenas o resultado final, mas também os caminhos utilizados para sua obtenção. Assim, os resultados observados contribuem para a continuidade do projeto e para o desenvolvimento de futuras aplicações em outras turmas da rede pública de ensino.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

TERRA. Candidatos ao Enem têm maiores dificuldades em matemática. Terra, 1 de novembro de 2024

MORAES, André. O diferencial do desempenho escolar entre escolas públicas e privadas do Brasil. **Nova Economia,** São Paulo, Páginas 5-17,Agosto 2014

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Geometria Plana: um estudo paralelo entre as abordagens cartesiana e vetorial

Lucas Petry*
petry.carolina@ufpr.br

Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)†
paulacouto@ufpr.br

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um material didático voltado à integração entre a Geometria Cartesiana e a Geometria Vetorial, elaborado no âmbito do Programa de Voluntariado Acadêmico da UFPR. A proposta nasce da reflexão sobre a prática docente no Ensino Superior, em que a extensão das ementas de Geometria Analítica pode limitar a conexão entre as ferramentas vetoriais e os conteúdos geométricos trabalhados na Educação Básica. Nesse contexto, o material busca contribuir para a formação matemática de graduandos e futuros professores por meio da organização de demonstrações paralelas, cartesianas e vetoriais, de resultados clássicos da Geometria Plana, como propriedades de triângulos, paralelogramos, trapézios e quadriláteros. A elaboração do material segue uma estrutura progressiva, desde conceitos de razão de seção e combinação afim até pontos notáveis, cevianas e teoremas clássicos, como os de Ceva, Menelaus e Varignon. A comparação entre as abordagens utiliza coordenadas no plano (xOy) e operações vetoriais, permitindo explorar diferentes formas de representação e demonstração dos resultados. As representações gráficas acompanham as demonstrações, auxiliando na visualização dos objetos geométricos e na interpretação dos raciocínios desenvolvidos. Dessa forma, o material busca aproximar conteúdos do Ensino Superior da prática docente no Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria Cartesiana; Geometria Vetorial; Formação de Professores; Ensino Médio.

*Graduando em Bacharelado em Matemática na Universidade Federal do Paraná (UFPR). Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA).

†Professora do Departamento de Matemática (DMAT) da UFPR. Doutora em Ciências em Modelagem Computacional.

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

A Geometria Analítica escolar aborda o estudo do plano a partir da fixação de um sistema de coordenadas cartesianas (xOy), permitindo a resolução de problemas geométricos por meio de equações de retas, distâncias e coordenadas de pontos. Paralelamente, a Geometria Vetorial introduz ferramentas algébricas que possibilitam representar e demonstrar propriedades geométricas mediante as noções de norma, direção e sentido, além das operações algébricas básicas com vetores, como a adição e a multiplicação por escalar, e dos produtos escalar, vetorial e misto. Embora compartilhem os mesmos objetos de estudo, essas abordagens apresentam diferentes formas de representar e desenvolver resultados geométricos.

No Ensino Superior, a extensão das ementas das disciplinas de Geometria Analítica pode restringir a retomada de conteúdos e problemas característicos da Geometria Plana trabalhada na Educação Básica. Essa situação pode distanciar os estudantes, especialmente aqueles em formação para a docência, dos problemas e das formas de abordagem presentes no Ensino Médio. Além disso, a literatura especializada tende a apresentar essas perspectivas de maneira separada, priorizando abordagens predominantemente cartesianas por coordenadas, como em Iezzi (2013), ou estritamente vetoriais, como em Boulos e Carvalho (2005). Nesse contexto, a articulação entre essas duas formas de tratamento pode contribuir para estabelecer relações entre diferentes ferramentas e formas de raciocínio utilizadas no estudo da Geometria Plana.

Diante desse cenário, este trabalho tem como objetivo elaborar um material de apoio didático que reúna, de forma comparativa e sistemática, demonstrações cartesianas e vetoriais de resultados clássicos da Geometria Plana. Fruto de um projeto de voluntariado acadêmico, o material foi organizado em uma sequência progressiva, iniciando-se com conceitos de razão de seção e combinação afim e avançando pelo estudo de bases médias, quadriláteros e do Teorema de Varignon, pelas caracterizações de triângulos isósceles e equiláteros e por tópicos como cevianas, pontos notáveis, Teoremas de Ceva, Menelaus e Stewart e reta de Euler.

A construção do material considera, para cada resultado selecionado, a apresentação de demonstrações independentes segundo as abordagens cartesiana e vetorial. Na primeira, são utilizados recursos como coordenadas, equações de retas, coeficientes angulares e fórmulas de distância; na segunda, são exploradas operações com vetores e, principalmente, o produto interno. A escolha dos resultados busca possibilitar a comparação entre diferentes procedimentos empregados para tratar um mesmo objeto ou propriedade geométrica, evidenciando as particularidades de cada abordagem. As representações gráficas acompanham as demonstrações, auxiliando na visualização dos objetos geométricos, das relações estabelecidas e dos procedimentos utilizados em cada abordagem.

O material foi desenvolvido no âmbito do Programa de Voluntariado Acadêmico da Universidade Federal do Paraná e busca contribuir para a formação matemática de graduandos e futuros professores, aproximando ferramentas e resultados trabalhados no Ensino Superior dos conteúdos e problemas da Geometria Plana presentes na Educação Básica.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

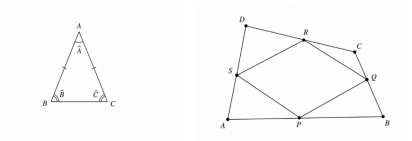
Resultados Principais

Como resultado do projeto, estruturou-se um material didático que estabelece, de forma sistemática, o contraponto entre as abordagens cartesiana por coordenadas e vetorial para o estudo de resultados clássicos da Geometria Plana. A elaboração do material foi organizada de maneira progressiva, partindo de conceitos fundamentais, como razão de seção e combinações afins, e avançando para bases médias de triângulos e trapézios, quadriláteros, caracterizações de triângulos, pontos notáveis, cevianas e teoremas clássicos. Até o momento, foram concluídas a redação e a diagramação das seções referentes a combinações afins, razão de seção, bases médias de triângulos e trapézios, Teorema de Varignon e caracterizações de triângulos. Para os resultados selecionados, são desenvolvidas duas deduções completas e independentes, uma pela abordagem cartesiana e outra pela abordagem vetorial, utilizando, respectivamente, recursos como coordenadas, equações de retas, coeficientes angulares, fórmulas de distância e operações com vetores, com destaque para o produto interno.

Teorema 1. *Um triângulo é isósceles se, e somente se, possui dois ângulos congruentes.*

Teorema 2. *Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer formam um paralelogramo, chamado de Paralelogramo de Varignon.*

Figura 1: À esquerda, triângulo utilizado na caracterização do triângulo isósceles; à direita, representação do Paralelogramo de Varignon.



Fonte: Elaborada pelos autores (2026).

As representações gráficas acompanham as demonstrações, auxiliando na visualização dos objetos geométricos, das relações estabelecidas e dos procedimentos utilizados em cada abordagem. A estrutura adotada permite utilizar o material como apoio ao estudo da Geometria Plana na graduação e na retomada de conteúdos da Educação Básica por futuros professores. A apresentação paralela evidencia diferentes ferramentas e formas de representação para um mesmo resultado geométrico.

Referências

[1] BOULOS, P.; CARVALHO, I. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. São Paulo: Pearson, 2005.

[2] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Analítica. São Paulo: Atual editora, 2013.

VERSÃO PROVISÓRIA

Ilha Limpa, Futuro Sustentável: a Matemática como Ferramenta de Transformação

Fernanda Cristini Moreira Rodrigues[1]
fernanda.rodrigues.56@estudante.unespar.edu.br

Solange Maria Gomes dos Santos Orientadora[2]
solange.santos@unespar.edu.br

Resumo

O presente projeto surgiu na disciplina de Matemática Ambiental, desenvolvida com estudantes de uma escola localizada em uma comunidade insular do município de Paranaguá-PR. A proposta fundamenta-se na necessidade de contextualizar o ensino da Matemática, relacionando os conteúdos escolares às vivências e aos desafios ambientais presentes na comunidade. Inspirado nos princípios da Educação Matemática, da Educação Ambiental e da aprendizagem contextualizada, o projeto tem como objetivo promover a construção do conhecimento matemático por meio da investigação de problemas reais, estimulando o pensamento crítico e o protagonismo dos estudantes. As atividades envolveram pesquisas sobre impactos ambientais, organização e apresentação de seminários e a elaboração de uma maquete representativa da comunidade, articulando conceitos de geometria, escala, proporcionalidade, medidas e interpretação de dados. A proposta evidencia a Matemática como ferramenta para compreender o espaço em que os estudantes vivem, fortalecendo a aprendizagem significativa e a reflexão sobre práticas sustentáveis no contexto das comunidades insulares.

Palavras-chave: matemática ambiental, sustentabilidade, conscientização, cidadania.

Introdução

As comunidades insulares apresentam características geográficas, sociais e ambientais que influenciam diretamente o cotidiano de seus moradores e, consequentemente, o processo educativo. Essas especificidades tornam necessária a construção de práticas pedagógicas que dialoguem com a realidade dos estudantes, favorecendo um ensino contextualizado e capaz de estabelecer relações entre os conteúdos escolares e as vivências da comunidade. Conforme discutem Silva e Santos (2018), os territórios insulares são constituídos por práticas sociais e ambientais próprias, que influenciam a forma como seus habitantes constroem conhecimentos e se relacionam com o espaço.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Nessa perspectiva, Santos (1996) compreende o espaço geográfico como resultado das relações sociais, evidenciando que o processo educativo também é influenciado pelas condições do território em que está inserido. Assim, o ensino da Matemática, quando relacionado às experiências vivenciadas pelos estudantes, possibilita uma aprendizagem mais significativa e contribui para a compreensão crítica da realidade.

Essa concepção dialoga com Freire (1996), ao defender que a educação deve partir da realidade dos educandos, valorizando seus conhecimentos e promovendo uma formação crítica e transformadora. Dessa forma, o professor assume o papel de mediador da aprendizagem, criando oportunidades para que os estudantes investiguem problemas presentes em seu cotidiano e construam conhecimentos a partir dessas experiências.

Nesse contexto, o projeto *"Ilha Limpa, Futuro Sustentável: a Matemática como Ferramenta de Transformação"* surgiu na disciplina de Matemática Ambiental, desenvolvida com estudantes de uma escola localizada em uma comunidade insular do município de Paranaguá-PR. A proposta integra Matemática e Educação Ambiental por meio de atividades contextualizadas, utilizando problemas ambientais da comunidade como elemento articulador do processo de ensino e aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático, da consciência ambiental e do protagonismo estudantil.

Resultados Principais

O projeto teve origem durante a disciplina de Matemática Ambiental, quando surgiu a proposta de desenvolver um Trabalho de Conclusão de Curso voltado ao ensino de Matemática em comunidades insulares. A partir dessa pesquisa, buscou-se levar a proposta para a prática pedagógica, desenvolvendo atividades que aproximam os conteúdos matemáticos da realidade vivenciada pelos estudantes.

A primeira etapa do projeto consistiu na realização de pesquisas sobre diferentes problemas ambientais presentes na comunidade insular, como poluição das águas, descarte inadequado de resíduos sólidos, queimadas, desmatamento e consumo de energia. Os temas foram distribuídos entre os estudantes, que realizaram pesquisas, organizaram as informações e apresentaram os resultados à turma por meio de seminários.

As apresentações evidenciaram o envolvimento dos estudantes com os temas propostos. Observou-se dedicação na realização das pesquisas, qualidade na organização das informações e participação ativa durante as apresentações e discussões, permitindo que os alunos compartilhassem conhecimentos sobre a realidade ambiental da comunidade e refletissem sobre possíveis formas de preservação do espaço em que vivem.

Como continuidade, o projeto encontra-se em desenvolvimento com a construção de maquetes representando a comunidade insular, utilizando conceitos matemáticos como escala, proporcionalidade, medidas e geometria. Posteriormente,

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

será realizada uma caminhada investigativa pela comunidade, na qual os estudantes identificarão os locais com descarte inadequado de resíduos sólidos, realizarão o registro dessas situações e promoverão o recolhimento dos materiais encontrados. Espera-se que essas atividades fortaleçam a relação entre a Matemática, a Educação Ambiental e a realidade das comunidades insulares, contribuindo para a formação de estudantes mais críticos e participativos.

Referências

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

SANTOS, Milton. A natureza do espaço: técnica e tempo, razão e emoção. São Paulo: Hucitec, 1996.

SILVA, J. R.; SANTOS, M. A. Territórios insulares: saberes e práticas socioambientais. Revista COCAR, Belém, v. 12, n. 23, 2018. Acesso em: 25 abr. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

Investigando medidas padronizadas e não padronizadas: uma sequência didática para o 5º ano do Ensino Fundamental

Ana Lara do Nascimento Schiamanski[1]
analaraschimanski@gmail.com

Anna Gabryelle de Souza Ferreira[2] annagabryelle.universitario@gmail.com

Rayana Luiza Tavares da Costa[3] rayanatavares005@gmail.com

Vandressa Ribeiro[4] *vandressaribeiro199@gmail.com*

Liceia Alves Pires (Orientadora)[5]
Liceia.pires@unespar.edu.br[3]

Danielle Marafon (Coorientadora)[6]
danielle.marafon@unespar.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma sequência didática destinada a estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, estruturada em dez aulas, com foco em atividades práticas, lúdicas e investigativas sobre Unidades de Medida. Toma como pergunta orientadora: Como podemos medir e comunicar o tamanho, a duração, a massa e a capacidade de objetos quando pessoas diferentes usam referências distintas? O objetivo é desenvolver conceitos relacionados às grandezas comprimento, tempo, massa e capacidade, explorando formas de medição utilizadas ao longo da história, as dificuldades de referências não padronizadas e a necessidade de criação de unidades comuns (Rocha,2019). As atividades envolvem observação, comparação, estimativas, uso de instrumentos e resolução de situações-problema. A avaliação ocorrerá por meio de registros individuais e em grupo, análise de produções e observação sistemática da participação. Esperase que os estudantes compreendam a evolução das formas de medir e a importância da padronização das unidades de medida.

Palavras-chave: Grandezas e Medidas; Unidades de Medida; Investigação Matemática; História da Matemática; Ensino Fundamental.

Introdução

Medir é uma ação presente no dia a dia: saber o tamanho de um espaço, a duração de um intervalo, a quantidade de matéria ou o volume de um recipiente. No Ensino Fundamental, especialmente no 5º ano, o estudo de Grandezas e Medidas deve permitir que os estudantes compreendam não apenas os nomes e as regras de conversão das unidades, mas também a razão pela qual elas foram criadas e padronizadas (Bérti, 2024). Entretanto, quando esses conteúdos são trabalhados apenas como regras e definições descontextualizadas, corre-se o risco de que os estudantes memorizem vocabulário sem compreender as relações entre grandeza, unidade e instrumento — conceitos distintos e complementares que fundamentam todo o pensamento métrico.

VERSÃO PROVISÓRIA

Antes da criação dos padrões universais, cada povo recorria a referências próprias: palmo, pé, passos, sombras, potes (Mundo Educação, 2026). Essas formas de medir atendiam a necessidades locais, mas geravam conflitos e imprecisões quando era preciso comparar ou comunicar resultados em escala maior. Reconhecer esse percurso histórico é essencial para que os estudantes compreendam que a padronização não é uma invenção arbitrária, mas uma solução social construída ao longo do tempo para garantir justiça, clareza e comunicação entre pessoas diferentes (Grafitti Artes, 2026).
Nesse sentido, este trabalho apresenta uma sequência didática organizada em dez aulas, voltada ao 5º ano do Ensino Fundamental, que toma como eixo condutor a pergunta investigativa: "Como podemos medir e comunicar o tamanho, a duração, a massa e a capacidade de objetos quando pessoas diferentes usam referências diferentes?". A proposta parte da exploração de formas antigas de medição e avança progressivamente para as unidades e instrumentos padronizados, abordando comprimento, tempo, massa e capacidade por meio de narrativas contextualizadas, experimentação prática e registro sistemático de hipóteses e resultados.
Espera-se que, ao percorrer esse trajeto, os estudantes desenvolvam estimativas confiáveis, distingam claramente o que se mede (grandeza), com que referência (unidade) e com que recurso (instrumento), e reconheçam a importância histórica e social da padronização das medidas que hoje utilizamos (Calegari & Rodrigues, 2018).

Desenvolvimento da proposta

A sequência didática é composta por dez aulas e segue um percurso que parte de formas de medição não padronizadas e avança para unidades e instrumentos padronizados, finalizando com atividades de integração e aplicação.

Aulas 1–2: Comprimento — de Cordasmil à Régua. Na primeira aula, a história de Cordasmil introduz a medição de terrenos por meio de cordas, retomando práticas antigas (Calegari & Rodrigues, 2018). Os estudantes realizam medições com referências não padronizadas, como o palmo, comparam resultados e registram suas descobertas no "Diário do Agrimensor". Na segunda, a utilização de referências corporais diferentes provoca a discussão sobre a necessidade de uma unidade comum. Os estudantes exploram régua e fita métrica e participam do "Caça ao Tesouro dos Padrões", aplicando medições e conversões.
Aulas 3–4: Tempo — de Horácio ao Relógio Os estudantes investigam, na terceira aula, a relação entre Sol, sombra e passagem do tempo, construindo e observando um relógio de sol (InfoEscola, 2026). Na quarta, exploram relógios analógicos e digitais, identificando horas, minutos e segundos, além de participarem de desafios cronometrados e atividades de organização temporal.
Aulas 5–6: Massa — do Equilíbrio à Balança Digital. A quinta aula aborda comparação, equilíbrio, igualdade e desigualdade por meio da construção e utilização de uma balança de dois pratos. Na sexta, os estudantes realizam estimativas e verificam as massas com uma balança digital, explorando grama e quilograma e analisando informações de rótulos Toda Matéria, 2026).
Aula 7: Capacidade — dos Recipientes às Medidas Padronizadas. Os estudantes investigam recipientes de diferentes formatos, formulam hipóteses, realizam estimativas e experimentam

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

diferentes formas de comparação. A atividade aborda litro e mililitro e possibilita discutir a relação entre capacidade e volume (Rocha, 2019).

Aulas 8–9: Integração e Fixação. Na oitava aula, os conteúdos são retomados por meio de um bingo com charadas matemáticas envolvendo grandezas, unidades e equivalências. Na nona, o "Circuito de Missões do Palácio" propõe situações-problema e desafios em equipes, integrando comprimento, tempo, massa e capacidade.

Aula 10: Da Teoria à Prática — A Receita dos Sábios. A sequência é encerrada com a leitura e execução de uma receita, possibilitando aplicar conhecimentos de massa, capacidade e tempo em uma situação prática do cotidiano.

Durante as atividades, os estudantes serão incentivados a formular hipóteses, testar estratégias, comparar resultados e registrar procedimentos e conclusões. Os registros poderão conter a hipótese inicial, o procedimento utilizado, o resultado e a conclusão. O professor atuará como mediador, utilizando perguntas orientadoras, promovendo a discussão entre os grupos e realizando a sistematização dos conceitos após os momentos de investigação (SME Goiânia, 2026).

Procedimentos de avaliação e resultados esperados

Como a sequência ainda será aplicada, não são apresentados resultados empíricos. A avaliação ocorrerá por meio da observação sistemática, dos registros produzidos, das atividades práticas, das discussões coletivas e das estratégias utilizadas na resolução das situações-problema.

Espera-se que os estudantes distingam grandeza, unidade e instrumento; compreendam as possibilidades e limitações das medidas não padronizadas; reconheçam a necessidade da padronização em situações que exigem comparação e comunicação; realizem estimativas e medições utilizando instrumentos adequados; e desenvolvam a capacidade de registrar, comparar e argumentar com base nos resultados obtidos (Toda Matéria, 2026).

Após a aplicação, os registros e observações poderão ser analisados para identificar aprendizagens, dificuldades e estratégias utilizadas pelos estudantes, permitindo avaliar as potencialidades e limitações da proposta.

Considerações finais

A sequência didática busca aproximar o ensino de Grandezas e Medidas de situações históricas e práticas, possibilitando que os estudantes compreendam a construção das formas de medição e a necessidade de referências comuns (Calegari & Rodrigues, 2018). Ao investigar, comparar, experimentar e registrar, os estudantes são envolvidos na construção dos conhecimentos matemáticos relacionados ao comprimento, tempo, massa e capacidade. A aplicação posterior da proposta permitirá analisar suas contribuições para a aprendizagem e identificar possíveis ajustes necessários ao seu desenvolvimento.

Referência

BÉRTI, Gustavo Camargo. Grandezas e unidades de medidas. Revista de Educação a Distância do IFSC, Florianópolis-SC, v. 1, n. 6, p. 36–41, nov. 2024. Disponível em: https://periodicos.ifsc.edu.br/index.php/eadifsc/article/view/3811/4848. Acesso em: 01 set. 2026.

CALEGARI, Jean Franco Mendes; RODRIGUES, Marilda Merência. As histórias dos sistemas de medidas de comprimento: contribuições para a contextualização no ensino de matemática. Revista Perspectiva, Florianópolis, v. 36, n. 2, p. 761–782, abr./jun. 2018. DOI: 10.5007/2175-

VERSÃO PROVISÓRIA

795X.2018v36n2p761. Disponível em: https://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-54732018000200761 . Acesso em: 01 set. 2026.

ROCHA, Laís de Souza. Unidades de medidas e grandezas: abordagem histórica e prática para o aprendizado do sistema métrico. ACTIO: Docência em Ciências, Curitiba, v. 1, n. 1, p. [s/n], 2019. DOI: 10.3895/actio.v1n1.10856. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/10856 . Acesso em: 01 set. 2026.

UNIDADES de medida. Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/unidades-de-medida/ . Acesso em: 27 ago. 2026.

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE GOIÂNIA. Matemática – Medidas padronizadas e não padronizadas. Conexão Escola. Disponível em: https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/matematica-medidashttps://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/matematica-medidas-padronizadas-e-nao-padronizadas/padronizadas-e-nao-padronizadas/ . Acesso em: 27 ago. 2026.

UNIDADES de medida ao longo da história. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/unidades-medida-ao-longo-historia.htm . Acesso em: 27 ago. 2026.

COMO surgiu o sistema métrico decimal? Blog Grafitti Artes. Disponível em: https://blog.grafittiartes.com.br/como-surgiu-o-sistema-metrico-decimal . Acesso em: 27 ago. 2026.

A ORIGEM da contagem do tempo. InfoEscola. Disponível em: https://www.infoescola.com/historia/a-origem-da-contagem-do-tempo/ . Acesso em: 27 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

Título Letramento Matemático e Cidadania: A Importância da Matemática Ambiental na Educação Básica.

Duyller Alves da Silva[1]
duyller.silva.56@estudante.unespar.edu.br

Erik Carolo Martins[2]
erik.martins.56@estudante.unespar.edu.br

Solange Maria Gomes dos Santos (Orientadora)[3]
solange.santos@unespar.edu.br

Resumo

Diante dos desafios ambientais enfrentados pela sociedade contemporânea, torna-se cada vez mais necessária a formação de cidadãos conscientes e comprometidos com a sustentabilidade. Nesse contexto, a matemática ambiental apresenta-se como uma importante ferramenta para relacionar os conteúdos matemáticos às questões ambientais presentes no cotidiano dos estudantes. Sendo assim, justifica-se a escolha do tema como forma de promover o letramento matemático e a cidadania na educação básica, possibilitando aos alunos compreenderem a aplicação da matemática em situações reais relacionadas ao meio ambiente, como reciclagem, consumo de água, produção de resíduos e preservação dos recursos naturais. Espera-se com este projeto atingir os seguintes objetivos propostos: analisar a contribuição da matemática ambiental para o desenvolvimento do letramento matemático dos estudantes; demonstrar a relação entre conteúdos matemáticos e questões ambientais; incentivar práticas sustentáveis por meio de atividades pedagógicas utilizando materiais recicláveis; e colaborar para a formação de cidadãos mais conscientes, críticos e responsáveis em relação ao meio ambiente. Além disso, pretende-se mostrar que a matemática pode ser aprendida de forma significativa quando associada a problemas reais, contribuindo para a construção do conhecimento e para o exercício da cidadania.

Palavras-chave: Matemática Ambiental, Educação Básica, Sustentabilidade, Letramento Matemático.

[1]Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Graduando em Licenciatura em Matemática.
[2]Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Graduando em Licenciatura em Matemática. bolsista de iniciação científica do CNPq.
[3]Universidade Estadual do Paraná. Docente do Colegiado de Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

A Matemática está presente em diferentes situações do cotidiano e desempenha papel fundamental na interpretação de informações, na resolução de problemas e na tomada de decisões. Nesse sentido, o letramento matemático possibilita que os estudantes mobilizem conhecimentos matemáticos para compreender e atuar em situações reais, desenvolvendo raciocínio, comunicação e argumentação (BRASIL, 2018).

Entre as situações presentes na realidade contemporânea, destacam-se as questões ambientais, que envolvem diferentes informações quantitativas relacionadas ao consumo, à produção de resíduos, à utilização de recursos naturais e aos processos de reciclagem. Nesse contexto, a Matemática Ambiental constitui uma possibilidade de articulação entre os conhecimentos matemáticos e as problemáticas socioambientais, aproximando o ensino de Matemática de situações concretas e socialmente relevantes.

A partir dessa perspectiva, a disciplina optativa Matemática Ambiental, ofertada no curso de Matemática-Licenciatura, possibilitou o desenvolvimento de uma experiência envolvendo a construção de uma maquete sobre o ciclo dos resíduos plásticos (figura 1). A representação contemplou situações relacionadas à poluição provocada por atividades industriais, ao descarte inadequado de resíduos e ao processo de recebimento, separação e encaminhamento de materiais em uma cooperativa de reciclagem. A experiência possibilitou refletir sobre como uma situação socioambiental concreta pode constituir contexto para a exploração de conhecimentos matemáticos na Educação Básica.

Diante disso, este trabalho tem como objetivo discutir a importância da Matemática Ambiental na Educação Básica, destacando suas possibilidades de articulação com o letramento matemático e a formação cidadã, tendo a experiência de construção da maquete sobre reciclagem de plástico como elemento para essa discussão.

Resultados Principais

A construção da maquete possibilitou representar, de forma integrada, diferentes etapas relacionadas à geração, ao descarte e à destinação de resíduos plásticos, permitindo visualizar a problemática ambiental e suas relações com situações presentes no cotidiano. A experiência desenvolvida no contexto da disciplina Matemática Ambiental também possibilitou identificar diferentes possibilidades de articulação entre questões ambientais e conhecimentos matemáticos.

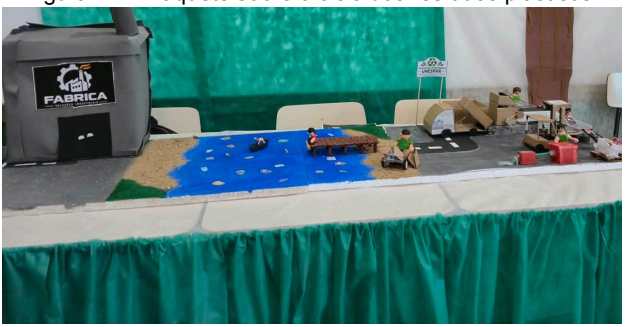
A partir da representação elaborada, situações envolvendo quantidade de resíduos, porcentagens, medidas, organização de dados, tabelas e gráficos podem ser utilizadas como contextos para o desenvolvimento de atividades matemáticas na Educação Básica. Dessa forma, a problemática da reciclagem pode ultrapassar a abordagem exclusivamente ambiental e constituir uma situação de investigação matemática, na qual os estudantes utilizem conhecimentos para interpretar informações e analisar uma realidade concreta.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Essa perspectiva relaciona-se ao desenvolvimento do letramento matemático, uma vez que a Matemática pode ser mobilizada não apenas para a realização de cálculos, mas também para a interpretação de informações, a resolução de problemas e a construção de argumentos diante de situações socialmente relevantes. Ao mesmo tempo, a discussão sobre produção e descarte de resíduos possibilita abordar questões relacionadas à responsabilidade individual e coletiva, aproximando o conhecimento matemático da formação cidadã.

Assim, a experiência evidencia possibilidades de utilização da Matemática Ambiental como elemento articulador entre conhecimentos matemáticos, questões socioambientais e cidadania. Embora a maquete tenha sido desenvolvida no contexto da formação inicial de professores, sua estrutura permite pensar em diferentes possibilidades de adaptação para a Educação Básica, especialmente por meio de atividades que envolvam a coleta, organização, interpretação e análise de dados relacionados à produção e à reciclagem de resíduos.

Figura 1 — maquete sobre o ciclo dos resíduos plásticos.



Fonte: Acervo UNESPAR (2026).

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

SILVA, T. S.; KLÜBER, T. E. Aspectos da educação ambiental crítica no ensino fundamental por meio de atividades de modelagem matemática. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 100, n. 254, 2019.

TEIXEIRA, Cristina; TORALES, Marília Andrade. A questão ambiental e a formação de professores para a educação básica: um olhar sobre as licenciaturas. **Educar em Revista**, Curitiba, edição especial, n. 3, 2014.

VERSÃO PROVISÓRIA

O Ensino de Frações pelo *Summamutikka:* Um Olhar pela Hermenêutica de Profundidade

Katrine Goulart Habkoste[1]
katrine.habkoste@ufpr.br

Emerson Rolkouski (Orientador)[2]
rolkouski@ufpr.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise de um dos materiais do *Summamutikka*, um centro de recursos para o ensino de Matemática da Universidade de Helsinque, na Finlândia, que tem como objetivo promover e apoiar o ensino e aprendizado da matemática, oferecendo materiais e atividades para crianças e jovens. A metodologia utilizada foi a Hermenêutica de Profundidade (HP), abordagem interpretativa que compreende três fases: análise sócio-histórica, análise formal e reinterpretação. Nesse sentido, traçou-se um panorama sócio-histórico das dimensões espaciais e temporais finlandesas, com ênfase nos contextos geográfico e educacional, além de detalhar os recursos didáticos desenvolvidos pelo centro. Por fim, apresenta-se uma síntese das compreensões alcançadas, no processo de Reinterpretação da forma simbólica, levando em consideração que a Finlândia é um contexto diferente do brasileiro, assim os resultados dessa pesquisa podem trazer indícios para adequações em práticas escolares de Matemática em nosso país.

Palavras-chave: educação matemática, hermenêutica de profundidade, *Summamutikka*, Finlândia, materiais didáticos.

Introdução

A presente pesquisa dedica-se ao estudo de um dos materiais do *Summamutikka*, um centro especializado vinculado à Universidade de Helsinque e integrante da rede nacional LUMA *Centre Finland*. A relevância do *Summamutikka* está em sua proposta de apresentar a Matemática não somente restrita ao ensino de procedimentos para a resolução de exercícios, mas como um campo que exige criatividade e habilidades versáteis de resolução de problemas, servindo de modelo para discussões sobre educação científica e matemática. A motivação para esta investigação baseia-se na posição de destaque da Finlândia em avaliações internacionais, como o PISA, e na necessidade de investigar as estruturas de apoio que sustentam esse desempenho. Para tal, utiliza-se a Hermenêutica de Profundidade (HP), proposta por John B. Thompson (2011), como referencial

[1]Universidade Federal do Paraná. Licencianda em Matemática. Bolsista do PET Matemática.
[2]Universidade Federal do Paraná. Doutor em Educação Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

teórico-metodológico. A HP permite uma análise multidimensional do *Summamutikka* como um todo, tratando-o como uma "forma simbólica"inserida em um contexto sócio-histórico específico. A teoria da Hermenêutica de Profundidade, de acordo com Thompson (2011), é estruturada em 3 fases progressivas, sendo elas:

- **Análise Sócio-Histórica:** Reconstrução das condições sociais e históricas de produção e recepção das formas simbólicas no contexto finlandês;
- **Análise Formal:** Exame da estrutura articulada e da organização interna dos materiais do Summamutikka;
- **Reinterpretação:** Síntese por construção criativa que busca explicar o que é dito e representado pelo objeto de estudo, relacionando os contextos analisados anteriormente.

Este método vem sendo utilizado em pesquisas na área de Educação Matemática na análise de materiais didáticos, como é o caso de Rocha e Gonçalez (2023) e busca não apenas descrever as atividades do centro, mas interpretar os sentidos e as intenções por trás dos recursos pedagógicos produzidos em solo finlandês, estabelecendo conexões com a formação docente e as práticas de ensino de Matemática.

Resultados Principais

Para o desenvolvimento desta pesquisa optou-se pela análise do material *Peltipitsamalli* (Modelo de Pizza em Assadeira), que diz respeito ao ensino de operações com frações. A Análise Sócio-histórica revelou que a produção das formas simbólicas do centro *Summamutikka* está intrinsecamente ligada ao panorama educacional finlandês, caracterizado pela adoção de um currículo flexível, pela alta autonomia docente baseada em pesquisa e pelo foco no desenvolvimento de competências transversais. Nesse cenário, constata-se que a elaboração do material didático reflete o distanciamento de práticas educacionais puramente algorítmicas ou voltadas a testes padronizados.

A Análise Formal do material evidenciou uma abordagem de ensino que supera a memorização de métodos, o material não apresenta as operações com frações como um mero procedimento, em vez disso, inicia-se com uma narrativa sobre quem levou mais pizza para a confraternização, para então realizar uma atividade tátil, com moldes de pizza, para realizar a comparação e soma entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{2}$.

Por fim, a Reinterpretação indica um certo cuidado ao introduzir as frações, pois apesar de apresentá-la como sendo a parte de um todo, o material se preocupa em encontrar uma “unidade comum” (frações equivalentes com o mesmo denominador) e adicionar um significado a essa unidade, contribuindo na aprendizagem matemática. Esse cuidado é comentado por Vianna (2008), quando ele afirma que ao tratar frações como parte de um todo, não são números, mas apenas uma representação, e por isso é comum os estudantes somarem numerador com numerador e denominador com denominador, sem encontrar a “unidade comum”.

A análise do material *Peltipitsamalli* à luz da hermenêutica de profundidade, permite observar que o *Summamutikka* se distancia da transmissão, memorização e reprodução de um conteúdo, permitindo que o estudante seja mais ativo na sua própria aprendizagem. Isso se deve principalmente pela formação docente voltada para a pesquisa com o desenvolvimento de competências transversais, o que pode vir a ser um indício de uma possível forma de atuação da educação matemática no Brasil.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

RÄSÄNEN, J. ***Peltipitsamalli***. Universidade de Helsinque, Finlândia, 2015.

ROCHA, A. H. M. da; GONÇALEZ, M. M. A. **Trilhas de aprendizagem de Matemática:** Uma análise hermenêutica de materiais do 7º ano do Ensino Fundamental. Curitiba: UTFPR, 2023.

THOMPSON, J. B. **Ideologia e cultura moderna:** Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa. Petrópolis: Vozes, 2011.

VIANNA, C. R. A Hora da Fração: pequena sociologia dos vampiros na Educação Matemática. **Bolema: Boletim De Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 161-181, 2008.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

O Uso de Fractais no Ensino da Matemática: Possibilidades Pedagógicas na Educação Básica e Superior

Kamilly Souza Suave[1]
kamisuave@gmail.com

Ricardo Paleari da Silva (Orientador)[2]
ricardo.paleari@unespar.edu.br

Resumo

A geometria fractal apresenta características que possibilitam estabelecer relações entre diferentes conceitos matemáticos e situações de aprendizagem visual e exploratória. Apesar de seu potencial pedagógico, os fractais ainda são pouco abordados nos materiais didáticos e nas práticas de ensino de matemática. Nesse contexto, esta pesquisa, que se encontra em desenvolvimento, tem como objetivo analisar as possibilidades pedagógicas do uso de fractais no ensino da Matemática, considerando sua aplicação na Educação Básica e Superior. A pesquisa possui caráter qualitativo, aplicado e exploratório, sendo desenvolvida por meio de pesquisa bibliográfica e da elaboração de uma proposta de minicurso destinada a professores e acadêmicos de Licenciatura em Matemática. As atividades articulam momentos teóricos e práticos, abordando conceitos como autossimilaridade, processos iterativos, dimensão fractal, áreas, perímetros, progressões geométricas e limites. Também são exploradas construções de fractais por meio de materiais manipuláveis, especialmente o origami, e de recursos tecnológicos, como o Geogebra. A proposta busca evidenciar como os fractais podem contribuir para tornar conceitos matemáticos mais acessíveis, favorecendo a visualização, o raciocínio lógico, a criatividade e a compreensão de processos matemáticos.

Palavras-chave: geometria fractal; ensino de matemática; recursos didáticos; origami; geogebra.

Introdução

A matemática escolar frequentemente apresenta conteúdos que são trabalhados de maneira predominantemente abstrata, o que pode dificultar a compreensão dos estudantes. Nesse contexto, a utilização de recursos visuais, manipuláveis e tecnológicos pode contribuir para aproximar conceitos matemáticos de experiências mais concretas e exploratórias. Entre as possibilidades está a Geometria Fractal,

[1]Unespar-Paranaguá, Graduanda.
[2]Unespar-Paranaguá, Doutor.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

área da Matemática caracterizada pelo estudo de estruturas que apresentam propriedades como autossimilaridade e construção por processos iterativos(MALDELBROT,1983).

Os fractais possibilitam estabelecer relações com diferentes conteúdos matemáticos, como áreas, perímetros, progressões geométricas e limites (GOMES, 2007; RAMOS, 2024). A análise de suas construções permite observar padrões, variações e processos de repetição, favorecendo a exploração de conceitos matemáticos de maneira articulada. O Conjunto de Mandelbrot, o Triângulo de Sierpinski, a Carpete de Sierpinski, a Esponja de Menger e o Floco de Neve de Koch constituem exemplos de objetos que permitem explorar essas características (MANDELBROT, 1983).

Além disso, a utilização de origami apresenta-se como uma possibilidade de aproximar a Geometria Fractal de atividades práticas (LARANGEIRA; MATHIAS; KOZAKEVICIUS, 2025). As dobraduras permitem a manipulação e a visualização de conceitos geométricos, favorecendo uma aprendizagem ativa e o desenvolvimento da percepção espacial, da criatividade e do raciocínio lógico. Recursos digitais, como o GeoGebra, também possibilitam explorar transformações geométricas, iterações e autossimilaridade (PADILHA; DULLIUS; QUARTIERI, 2007).

Apesar dessas possibilidades, os fractais ainda são pouco abordados nos materiais didáticos e nas práticas de ensino de Matemática (RAMOS, 2024), o que evidencia a necessidade de investigar estratégias que favoreçam sua inserção no contexto educacional. Diante disso, a pesquisa que se encontra em desenvolvimento, busca responder à seguinte questão: quais são as possibilidades pedagógicas do uso de fractais no ensino da Matemática na Educação Básica e Superior? O objetivo geral é analisar as potencialidades dos fractais como recurso pedagógico, explorando suas relações com conteúdos matemáticos e diferentes estratégias de ensino. Para isso, a pesquisa possui caráter qualitativo, aplicado e exploratório, sendo desenvolvida por meio de pesquisa bibliográfica e da elaboração de uma proposta de minicurso destinada a professores e acadêmicos de Licenciatura em Matemática, articulando fundamentação teórica, atividades práticas e recursos tecnológicos.

Resultados Principais

No atual momento, a realização do minicurso ainda não ocorreu. No entanto, espera-se evidenciar que a Geometria Fractal apresenta potencial para estabelecer relações entre diferentes conteúdos matemáticos e práticas pedagógicas. Pretende-se explorar conceitos como área, perímetro, progressões geométricas e limites por meio de processos iterativos de construção de fractais, possibilitando a observação de padrões, regularidades e transformações ao longo das etapas de construção.

Espera-se, especificamente, que a construção e análise do Triângulo de Sierpinski possibilite a exploração de conceitos como área, quantidade de elementos e progressões geométricas, estabelecendo relações entre processos iterativos e conteúdos matemáticos (GOMES, 2007; RAMOS, 2024). Podendo assim observar a quantidade de elementos e as variações da área e estabelecendo relações com progressões geométricas e comportamento limite.

Também se espera que a utilização de materiais manipuláveis, especialmente o origami, favoreça a visualização e a compreensão das características dos fractais. A construção da Esponja de Menger por meio da montagem de módulos de origami

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

deverá possibilitar a exploração de estruturas fractais tridimensionais, aproximando conceitos geométricos de uma experiência prática e investigativa.

Quanto aos recursos tecnológicos, prevê-se que a utilização do GeoGebra contribua para a exploração de transformações geométricas, processos iterativos e autossimilaridade (PADILHA; DULLIUS; QUARTIERI, 2007). A utilização desse recurso deverá ampliar as possibilidades de visualização e experimentação dos fractais, favorecendo a compreensão de suas construções.

Ao final do minicurso, será realizada uma avaliação por meio de questionário, buscando identificar as percepções dos participantes acerca das atividades desenvolvidas e das possibilidades de utilização dos fractais como recurso pedagógico. Espera-se que as percepções dos participantes apontem possíveis contribuições para a ampliação do repertório metodológico de professores e futuros professores de Matemática, especialmente quanto à integração entre visualização, experimentação, materiais manipuláveis e tecnologias digitais.

Referências

GOMES, Andreia dos Santos. *Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007.

LARANGEIRA, Quendra Silva Cartier; MATHIAS, Carmen Vieira; KOZAKEVICIUS, Alice. Geometria Fractal na formação de professores: uma proposta via origami. *Disciplinarum Scientia | Naturais e Tecnológicas*, v. 27, n. 1, p. 53–72, 2025.

MANDELBROT, Benoît B. *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

PADILHA, Teresinha Aparecida Faccio; DULLIUS, Maria Madalena; QUARTIERI, Marli Teresinha. *Construção de fractais com uso do software GeoGebra*. Lajeado: Univates, 2007.

RAMOS, Graciete Ferreira. Aplicando a geometria fractal como estratégia pedagógica no ensino de matemática no Fundamental II. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação – REASE*, v. 10, n. 4, p. 889–894, 2024.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

O uso da Inteligência Artificial na Graduação em Matemática: um estudo com graduandos da UNESPAR – Campus Paranaguá

Daniel Gomes do Nascimento[1]
danielgomeesn@gmail.com

Ricardo Paleari da Silva (Orientador(a))[2]
ricardo.paleari@unespar.edu.br

Resumo

A pesquisa investiga o uso de ferramentas de Inteligência Artificial (IA) por graduandos a partir do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da UNESPAR, no campus de Paranaguá. O problema central aborda se a utilização diária dessas tecnologias pode gerar dependência e comprometer o desenvolvimento do pensamento crítico e autônomo, buscando identificar quais ferramentas são utilizadas e de que maneira. A justificativa fundamenta-se na escassez de estudos práticos voltados ao ensino superior, visto que grande parte da literatura é teórica ou focada na educação básica e ensino médio. O estudo visa preencher essa lacuna, mapeando o perfil de uso da IA na rotina acadêmica de futuros professores e oferecendo subsídios para discussões institucionais sobre a mediação tecnológica e a promoção de um uso ético, consciente e crítico. O objetivo geral consiste em compreender como as Inteligências Artificiais são empregadas na graduação, analisando se funcionam como apoio genuíno ao estudo e à aprendizagem ou se servem apenas para a resolução mecânica de questões sem aprofundamento. Os objetivos específicos complementam essa meta ao identificar as ferramentas tecnológicas específicas adotadas pelos graduandos e ao examinar a forma como eles as utilizam no apoio ao aprendizado, o nível de confiança depositado nas respostas geradas e os hábitos de verificação dessas informações.

Palavras-chave: educação matemática, inteligência artificial, graduação.

Introdução

A expansão das ferramentas de Inteligência Artificial (IA) tem reconfigurado profundamente o panorama educacional contemporâneo, impondo novos desafios e

[1]Universidade Estadual do Paraná- Campus Paranaguá. Licenciando em Matemática.
[2]Universidade Estadual do Paraná- Campus Paranaguá. Doutor.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

oportunidades para o ensino superior. No âmbito da formação docente, especialmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, o uso cotidiano de tecnologias generativas como ChatGPT, destaca a urgência de compreender como essas inovações vêm moldando a rotina acadêmica dos futuros professores.

Nesse contexto, este estudo analisa o perfil de uso da IA por graduandos do terceiro e quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da UNESPAR, Campus Paranaguá. Por meio de uma pesquisa exploratória com abordagem qualitativa e quantitativa, o trabalho examina a resolução de uma questão de alta complexidade com o suporte de Inteligências Artificiais, o registro das perguntas realizadas as IAs e a aplicação de questionários estruturados.

Espera-se, com isso, subsidiar discussões pedagógicas institucionais voltadas à mediação tecnológica e à consolidação do uso consciente e crítico na graduação. Para atingir esses objetivos, a coleta de dados ocorrerá em um único momento para cada turma, dividindo-se em duas etapas: a primeira etapa (Resolução e Uso de IA), na qual os graduandos serão organizados em grupos para tentar resolver a questão proposta por meio de discussão coletiva, embora cada estudante deva entregar sua resolução de maneira individual, sendo autorizada a utilização de uma IA específica caso o grupo não consiga chegar à solução por conta própria. A segunda etapa (Questionário), que consistirá na aplicação de um questionário estruturado, composto por perguntas de múltipla escolha e questões argumentativas, para analisar as percepções dos graduandos.

Resultados Principais

Como esta pesquisa ainda não foi aplicada, espera-se que, até a data de apresentação deste trabalho, os dados já tenham sido coletados para a divulgação dos resultados e do panorama de como ocorreram as aplicações. Além disso, almeja-se que este estudo contribua para a compreensão dos usos das Inteligências Artificiais (IAs) pelos graduandos, considerando a escassez de pesquisas práticas sobre a utilização dessas tecnologias por estudantes de Licenciatura em Matemática e futuros professores.

Referências

BARBOSA, Lucia Martins; PORTES, Luiza Alves Ferreira. A Inteligência Artificial **Revista Tecnologia Educacional**, Rio de Janeiro, n. 236, p.16 27, jan./mar. 2023.

GOMES, Dennis dos Santos. Inteligência artificial: conceitos e aplicações. **Revista Olhar Científico**, Ariquemes, v. 1, n. 2, p. 234–246, ago./dez. 2010.

YASSAKI FILHO, Julius Kahoru. O uso da Inteligência Artificial, Modelagem Matemática e Resolução de Problemas como potencializadores no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no sétimo ano do ensino fundamental. 2024. 103 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2024.

VERSÃO PROVISÓRIA

SIMETRIA, ARTE E CULTURA: UMA EXPERIÊNCIA COM MÁSCARAS AFRICANAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Karolyna da Silva Batista[1]
karolynasilva76@gmail.com

Maria Eduarda Soldati Razera[2]
mariasoldati235@gmail.com

Cristienne do Rocio de Mello Maron (Orientador(a))[3]
cristienne.maron@unespar.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta um relato de experiência desenvolvido no subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental do Instituto Estadual de Educação Doutor Caetano Munhoz da Rocha, em Paranaguá-PR. A experiência teve como objetivo trabalhar o conceito de simetria de maneira contextualizada, articulando conhecimentos matemáticos, arte e aspectos culturais relacionados às máscaras africanas, em uma atividade realizada durante o período da Consciência Negra. A proposta envolveu a apresentação de aspectos culturais das máscaras, a discussão do conceito de eixo de simetria e a confecção de máscaras pelos estudantes. Durante a atividade, foram realizadas observações do processo de produção, registros fotográficos e acompanhamento das dificuldades apresentadas pelos alunos. Os resultados observados indicaram participação e envolvimento dos estudantes, além da identificação de dificuldades relacionadas à manutenção da simetria nas produções e da possibilidade de intervenção durante o processo. A atividade também possibilitou relacionar elementos matemáticos às escolhas realizadas na produção das máscaras, aproximando Matemática e cultura. Para os bolsistas, a experiência contribuiu para a formação docente ao proporcionar contato direto com a sala de aula e reflexão sobre estratégias de ensino contextualizadas.

Palavras-chave: educação matemática, simetria, cultura, etnomatemática, PIBID.

[1]Universidade Estadual do Paraná - Campus Paranaguá. Licencianda em Matemática. Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID).
[2]Universidade Estadual do Paraná - Campus Paranaguá. Licencianda em Matemática. Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID).
[3]Universidade Estadual do Paraná - Campus Paranaguá. Mestra. Coordenadora de Área do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID).

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

O ensino de Matemática pode assumir diferentes formas de abordagem, especialmente quando os conteúdos são relacionados a situações do dia a dia, que possibilitam aos estudantes atribuir significado aos conceitos trabalhados, valorizando a relação entre os conhecimentos matemáticos e diferentes contextos (BRASIL, 1998). Nesse sentido, atividades práticas e contextualizadas podem aproximar os conhecimentos matemáticos da realidade escolar e favorecer a participação dos estudantes (DANTE, 2016). Entre os conteúdos da Geometria, o estudo da simetria permite explorar relações entre formas e posições por meio de diferentes representações, estando relacionado às aprendizagens previstas para o ensino de Matemática na Educação Básica (BRASIL, 2018).

A experiência apresentada foi desenvolvida no subprojeto de Matemática do PIBID, com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir da proposta de trabalhar a simetria por meio da confecção de máscaras africanas. A escolha da temática ocorreu durante o período da Consciência Negra, buscando estabelecer uma relação entre o conteúdo matemático e aspectos culturais presentes na atividade. Essa articulação aproxima-se da perspectiva da Etnomatemática, que considera a Matemática uma construção humana e cultural presente em diferentes sociedades (D'AMBROSIO, 2005).

Além da dimensão matemática, a proposta buscou favorecer o contato dos estudantes com elementos culturais relacionados às máscaras africanas, considerando significados atribuídos às cores, formas e outros elementos presentes nas produções. Assim, a atividade integrou matemática, arte e cultura em uma mesma proposta pedagógica. O objetivo deste trabalho é analisar as contribuições dessa experiência para o ensino do conceito de simetria e para a formação dos bolsistas do PIBID.

Resultados Principais

A atividade foi iniciada com uma apresentação de slides, na qual foram abordados aspectos culturais das máscaras africanas e, posteriormente, o conceito matemático de simetria. Foram apresentados exemplos visuais de figuras simétricas e discutidas a ideia de eixo de simetria e a correspondência entre as partes de uma figura. Esse momento permitiu relacionar os elementos culturais apresentados ao conhecimento matemático mobilizado na produção das máscaras.

Na etapa seguinte, os estudantes receberam materiais para a confecção das máscaras, o uso desses recursos possibilitou que os estudantes observassem e manipulassem elementos relacionados ao conceito trabalhado, favorecendo uma abordagem mais concreta do conteúdo (LORENZATO, 2006). A orientação consistia em reproduzir, de maneira equivalente nos dois lados, os elementos desenhados considerando o eixo de simetria trabalhado anteriormente. Durante essa etapa, os bolsistas acompanharam as produções, esclareceram dúvidas e observaram as estratégias utilizadas pelos estudantes.

Entre os aspectos observados, destacaram-se diferentes formas de participação e produção. Alguns estudantes desenvolveram máscaras com elementos mais simples e definidos, enquanto outros exploraram maior quantidade de cores, formas e detalhes. Também foram identificadas dificuldades relacionadas à manutenção da simetria. Alguns alunos tiveram dificuldade para reproduzir determinados elementos

VERSÃO PROVISÓRIA

de forma equivalente nos dois lados da máscara, sendo necessária a intervenção dos bolsistas para orientar e auxiliar nos ajustes.

Esse processo possibilitou que o conceito de simetria fosse mobilizado durante a própria construção das produções. Ao precisar comparar as duas partes da máscara e realizar ajustes, o estudante tinha a oportunidade de observar concretamente a relação entre os elementos e o eixo de simetria. Assim a atividade permitiu acompanhar dificuldades que poderiam não ser tão evidentes em uma abordagem exclusivamente expositiva.

Outro aspecto observado foi o envolvimento dos estudantes com a dimensão cultural da proposta. Ao final, as máscaras foram organizadas para uma exposição na escola, e os estudantes registraram os significados atribuídos às cores, às listras e aos formatos escolhidos. Dessa forma, os elementos culturais apresentados inicialmente foram retomados nas produções, estabelecendo relações entre o conteúdo matemático, a atividade artística e os conhecimentos culturais discutidos.

Para os bolsistas do PIBID, a experiência possibilitou vivenciar situações concretas do cotidiano escolar, como o acompanhamento das produções, a identificação de dificuldades e a necessidade de realizar intervenções durante o desenvolvimento da atividade. Essa vivência contribuiu para a reflexão sobre o planejamento e sobre a utilização de diferentes estratégias no ensino de Matemática.

De modo geral, os resultados observados indicam que a proposta possibilitou trabalhar o conceito de simetria de maneira prática e contextualizada, promovendo a aproximação entre Matemática, arte e cultura. Embora não tenham sido utilizados instrumentos formais de avaliação, as observações realizadas durante a atividade indicaram participação, envolvimento e avanços na compreensão do eixo de simetria entre estudantes que inicialmente apresentaram dificuldades.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. Didática da resolução de problemas de Matemática. São Paulo: Ática, 2016.

LORENZATO, Sérgio. Para aprender Matemática. Campinas: Autores Associados, 2006.

VERSÃO PROVISÓRIA

SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL BALANCEADO: POSSIBILIDADES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Thiago Lucas da Silva[1]

thiagotuig@gmail.com

Neusa Nogas Tocha (Orientadora)[2]

neusatocha@utfpr.edu.br

Resumo

O ensino de sistemas de numeração posicionais na Educação Básica concentra-se, em geral, no sistema decimal, restringindo a exploração de diferentes formas de representação dos números e de propriedades relacionadas ao valor posicional. Este trabalho aborda possibilidades para o ensino de sistemas de numeração posicionais a partir do estudo da representação ternária balanceada, articulando sua fundamentação matemática à elaboração de atividades didáticas. O trabalho parte de aspectos históricos dos sistemas de numeração posicionais e da utilização do Algoritmo da Divisão de Euclides para estabelecer propriedades da representação dos números naturais. Como resultado matemático, demonstra-se a existência e a unicidade da representação de todo número natural como soma e/ou diferença de potências distintas de 3. A partir dessa representação, são desenvolvidas atividades voltadas à Educação Básica, entre as quais se destaca a Trilha Numérica, elaborada no próprio trabalho. A atividade envolve a representação de números em diferentes sistemas de numeração posicionais e a elaboração de estratégias para alcançar determinadas posições de uma trilha. A proposta permite relacionar potências, valor posicional, decomposição numérica e operações aritméticas em uma situação de resolução de problemas. A discussão das atividades também estabelece relações com o letramento matemático e com aspectos do pensamento computacional, especialmente a identificação de padrões, a decomposição de problemas e a elaboração de procedimentos.

Palavras-chave: Base, Representação Ternária Balanceada, Educação Matemática, Letramento Matemático, Pensamento Computacional.

Introdução

Os sistemas de numeração posicionais constituem uma das formas pelas quais diferentes sociedades organizaram e registraram quantidades ao longo da história. Na Educação Básica, entretanto, o sistema decimal ocupa posição predominante, fazendo com que outros sistemas de representação sejam pouco explorados. A abordagem de diferentes bases pode ampliar a compreensão dos princípios que estruturam um sistema de numeração posicional, especialmente no que se refere ao valor posicional, às potências da base e às diferentes formas de representar um mesmo número.

Nesse contexto, este trabalho tem como objeto de estudo a representação dos números em sistemas de numeração posicionais, com atenção especial à representação ternária balanceada. Diferentemente da representação ternária

[1] UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Licenciado em Matemática.
[2] UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Doutora em Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

usual, que utiliza os algarismos 0, 1 e 2, a representação ternária balanceada utiliza os valores −1, 0 e 1. Essa característica permite representar um número natural por meio de soma e/ou diferença de potências de 3.

A base ternária balanceada aparece na resolução do problema conhecido como “Pesos de Bachet”, apresentado por Claude Gaspar Bachet de Méziriac, problema 5, em 1624 (BACHET, p. 215). No problema, os pesos 1, 3, 9 e 27 podem ser distribuídos nos dois pratos de uma balança, permitindo determinar diferentes medidas de massas (inteiras de 1 a 40) (SINGH, p. 75). A possibilidade de colocar pesos em ambos os pratos conduz naturalmente à utilização dos coeficientes −1, 0 e 1 e, consequentemente, à representação ternária balanceada.

O trabalho busca, portanto, relacionar a fundamentação matemática dos sistemas de numeração posicionais a situações que possam ser exploradas na Educação Básica. Para isso, além do estudo dos aspectos históricos e matemáticos, são elaboradas atividades que envolvem representação numérica, conversão entre bases, resolução de problemas e investigação de estratégias.

Resultados Principais

A fundamentação matemática do trabalho é construída a partir do Algoritmo da Divisão de Euclides. A aplicação sucessiva do algoritmo permite obter os coeficientes necessários para a representação de um número em uma determinada base (DOMINGUES, 2017). Em Explorando o sistema de numeração posicional: possibilidades para a educação básica (SILVA, 2026), demonstra-se que todo número natural possui uma representação na forma $n = a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^2 + \ldots + a_n \cdot 3^n$, em que $a_i \in \{-1, 0, 1\}$. A demonstração desenvolvida no trabalho estabelece não apenas a existência dessa representação, mas também sua **unicidade**.

A partir dessa fundamentação, foram elaboradas atividades didáticas envolvendo sistemas de numeração posicionais e suas representações. Entre elas estão situações inspiradas no problema dos pesos de Bachet, problemas envolvendo representação numérica e conversão entre bases e a **Trilha Numérica**, atividade desenvolvida como parte de Trabalho de Conclusão de Curso (SILVA, 2026).

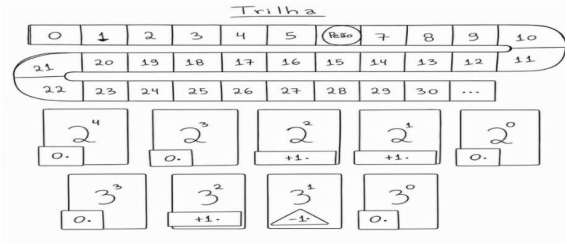
A Trilha Numérica foi estruturada para colocar os estudantes diante de diferentes possibilidades de representação de um mesmo número. A atividade utiliza uma trilha com posições numeradas, cartas associadas às potências das bases estudadas e marcadores. Os participantes devem selecionar as cartas e os marcadores necessários para alcançar determinada posição da trilha, registrando e justificando os cálculos realizados.

O caráter lúdico está associado à organização da proposta como um desafio, enquanto os conceitos matemáticos permanecem no centro da atividade. A comparação entre a representação binária usual e a ternária balanceada permite ainda discutir diferentes formas de organização dos números e as estratégias utilizadas para obter uma mesma quantidade. Um exemplo apresentado na atividade lúdica A Trilha Numérica (SILVA, p. 83), envolve a obtenção do número 6. Na representação binária usual, o número pode ser obtido pela soma de 2^1 e 2^2, $6 = 2 + 4$. Na ternária balanceada, o mesmo número pode ser representado pela diferença entre duas potências de três, $6 = 9 - 3 = 3^2 - 3^1$. No ensino de potenciação para o Ensino Fundamental, o professor orienta que formem

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

equipes e que uma equipe (que decide se usará cartas com potências de base 2 ou 3) desloca o seu peão sobre a trilha utilizando marcadores (0, 1, ou -1) em suas cartas, fazendo a leitura da esquerda para a direita (em ordem decrescente das potências), utilizando todas as cartas, deixando o peão na casa atingida, e pontuando de acordo com a base (2 ou 3) escolhida.

Figura 1 – Trilha Numérica



Fonte: SILVA, (2026, p. 85)

As propostas elaboradas também permitem estabelecer relações com o letramento matemático, com interpretação, elaboração de estratégias, representação, argumentação e comunicação de procedimentos e a identificação de regularidades, a decomposição das situações em etapas e a elaboração de procedimentos para obter determinada representação, também estabelecem relações com aspectos do pensamento computacional.

Desse modo, os resultados do trabalho podem ser considerados em duas dimensões articuladas: a primeira corresponde à demonstração matemática da existência e unicidade da representação ternária balanceada; a segunda corresponde à elaboração de atividades didáticas que tomam essa representação como objeto de exploração na Educação Básica ao explorar habilidades e competências descritas na Base Nacional Comum Curricular que podem ser desenvolvidas por meio das atividades propostas. Como as habilidades EF01MA07 e EF03MA02, que se descrevem como composição e decomposição de números de até quatro ordens, com suporte de material manipulável, na compreensão de características de sistema de numeração decimal (BNCC, 2018).

O estudo da representação ternária balanceada possibilitou explorar propriedades dos sistemas de numeração posicionais a partir de uma abordagem que articula aspectos matemáticos, históricos e didáticos. A demonstração da existência e da unicidade da representação de números naturais como soma e/ou diferença de potências distintas de 3 constitui o principal resultado matemático do trabalho e fornece a fundamentação para as atividades elaboradas.

As atividades desenvolvidas indicam possibilidades de ampliar a abordagem dos sistemas de numeração na Educação Básica, articulando a compreensão de suas propriedades a situações de investigação, resolução de problemas e desenvolvimento de estratégias, permitindo retomar, em um contexto lúdico, conceitos relacionados às potências, ao valor posicional e à decomposição numérica, mantendo a representação matemática como elemento central da proposta, com aderência à BNCC (BRASIL, 2018).

VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

BACHET, C. G. **Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres**. Lyon: 1624. Disponível em: https://www.digitale-sammlungen.de/en/view/bsb11110474?q=%28Bachet+%29&page=5. Acesso em: 01 abr. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 20 nov. 2025.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 2. ed. rev. Florianópolis: Editora da UFSC, 2017.

SILVA, Thiago Lucas da. **Explorando o sistema de numeração posicional: possibilidades para a educação básica**. 2026. TCC, Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2026.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat:** a história do enigma que confundiu as mais brilhantes mentes do mundo durante 358 anos. Tradução Jorge Luiz Calife. 12 ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

VERSÃO PROVISÓRIA

UM MAPEAMENTO DE PESQUISAS SOBRE FRACASSO ESCOLAR EM MATEMÁTICA

Nicolas da Verça Scholze[1]
nicolasscholze111@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)[2]
gabriel.santos22@gmail.com

Resumo

Este resumo expandido apresenta um mapeamento sistemático da literatura focado em investigar a caracterização do fracasso escolar na Educação Matemática e as alternativas para sua superação. A pesquisa, de natureza qualitativa e cunho bibliográfico, teve como centelha inicial as reflexões de Esteban (2002) sobre o erro como potência epistemológica. O levantamento foi realizado no Portal de Periódicos da CAPES, resultando em um corpus de sete trabalhos analisados integralmente. A discussão teórica, fundamentada em Patto (2022) e Esteban (2002), evidencia que o fracasso é uma produção institucional sistemática, agravada por políticas neoliberais contemporâneas. Essas políticas deslocam a culpa estrutural da exclusão escolar para o plano individual, gerando um ciclo de culpabilização mútua entre docentes e discentes. Frente a isso, a perspectiva da avaliação como prática de investigação proposta por Buriasco (2000) e Silva e Buriasco (2023) surge como um horizonte viável de resistência política e pedagógica, capaz de ressignificar o erro e estabelecer uma parceria solidária de aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática; Fracasso Escolar; Avaliação Investigativa.

Introdução

O fracasso escolar na Educação Matemática brasileira constitui um dos maiores desafios políticos e pedagógicos contemporâneos. Historicamente, a “não aprendizagem” de matemática tem sido legitimada por visões deterministas e inatistas que naturalizam a exclusão social sob o pretexto de "falta de dom" ou incapacidade cognitiva individual (Patto, 2022). Esta investigação teve sua centelha motivadora na leitura de Esteban (2002), cuja obra denuncia a violência simbólica da escola tradicional que silencia a diversidade de saberes, tratando o erro apenas como ausência de conhecimento.

A partir desse marco, esta pesquisa buscou desvelar as engrenagens de produção do fracasso, identificando como a lógica educacional neoliberal atualizou

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Voluntário do PIBIC.
[2] Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR)

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

esses discursos excludentes. Sob a égide do produtivismo e de cobranças por índices burocráticos de fluxo escolar, a culpa pelo insucesso foi individualizada em dupla dimensão: ora recai sobre o aluno e suas supostas carências cognitivo-familiares, ora arrasta o professor, culpabilizado por ministrar aulas supostamente pouco engajadoras. O objetivo deste trabalho é analisar como pesquisas contemporâneas em Educação Matemática caracterizam esse fracasso e apontar caminhos para lidar democraticamente com ele.

Materiais e Métodos

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa de caráter teórico-bibliográfico, estruturada sob a metodologia do mapeamento sistemático de literatura (Fiorentini; Lorenzato, 2006). O levantamento de dados foi realizado no Portal de Periódicos da CAPES utilizando a combinação avançada dos descritores exatos: "'fracasso escolar' AND 'educação matemática'", sem corte temporal.

A busca inicial retornou um total de 12 produções acadêmicas. Submetendo os resultados a um fluxo de filtragem, foram eliminados os trabalhos duplicados e aqueles que não tratavam do fracasso em matemática como tema central de investigação (rejeitando artigos com abordagens instrumentais ou generalistas). Ao final do processo de seleção, constituiu-se um corpus de análise composto por 7 artigos científicos de periódicos nacionais de alto impacto, os quais foram fichados, categorizados e discutidos de forma interpretativa à luz do referencial crítico e avaliativo adotado.

Resultados e Discussão: Agrupamentos e Convergências

A análise compreensiva do corpus mapeado revelou de que forma o fracasso em matemática é conceituado e combatido na literatura. Para expor os pontos de contato entre as pesquisas, os sete trabalhos selecionados foram reunidos em três grupos de ideias semelhantes, apresentados a seguir.

Grupo I: O Estudante-Sujeito e as Singularidades Cognitivas

Os trabalhos incluídos neste grupo, formado pelas investigações de Oliveira e Moreira (2010) e Pina Neves e Borges (2019), estão relacionados à experiência subjetiva da "não aprendizagem". Oliveira e Moreira (2010), amparados na sociologia de Bernard Charlot, analisam a relação com o saber de alunos em risco e desmistificam o preconceito de que o fracasso decorre da apatia familiar, revelando que o insucesso matemático decorre do efeito acumulativo de dificuldades conceituais básicas não resolvidas nos anos iniciais.

Por sua vez, Pina Neves e Borges (2019) discutem a conceituação de uma aluna com diagnóstico de discalculia e expõem a "leitura pela falta" operada pela instituição, que utiliza laudos clínicos como bode expiatório para camuflar sua própria incapacidade de acolher o aluno atípico. Ambos os trabalhos convergem ao denunciar que a escola impõe o algoritmo formal escrito como única via legítima de resolução, estigmatizando caminhos de raciocínio singulares.

Grupo II: Práticas Formativas, Culturas Avaliativas e Políticas Curriculares

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Reunindo os artigos de Cruz e Monteiro (2013), Emmel e Costa (2019) e Barbosa (2017), neste grupo, faz-se uma problematização da dimensão institucional-formativa da educação. Cruz e Monteiro (2013) expõem um abismo na formação docente: enquanto as disciplinas pedagógicas elogiam a avaliação formativa, as cadeiras de matemática específica utilizam exames punitivos baseados no mérito, perpetuando o medo da avaliação como "braço autoritário" (Buriasco, 2000) de controle de corpos.

Emmel e Costa (2019) mapeiam a reprovação em massa de estudantes no Ensino Médio Integrado e destacam que as queixas discentes sobre "aulas pouco atrativas" mascaram a sobrecarga curricular do sistema. Barbosa (2017) corrobora este diagnóstico ao analisar os cadernos de alfabetização matemática do PNAIC, denunciando que as práticas tradicionais homogêneas operam como eixos de exclusão de minorias e defendendo que a avaliação deve atuar de modo contínuo como baliza de planejamento curricular.

Grupo III: Práticas Didático-Políticas de Resistência e Ressignificação

Os trabalhos de Sachs (2018) e Cristovão e Fiorentini (2023) integram esta categoria, propondo fraturas pedagógicas na lógica burocrática escolar. Sachs (2018) discute o enunciado de "trazer a realidade do aluno para a aula" e adverte que contextualizações simplórias e artificiais apenas hierarquizam saberes e desvalorizam as lógicas matemáticas orais que o aluno de classe popular domina no seu cotidiano.

Cristovão e Fiorentini (2023) utilizam a investigação-ação em turmas de recuperação de matemática, revelando que estudantes estigmatizados como "incapazes" demonstram autoria e "negatricidade" (capacidade tática de subverter as amarras pedagógicas tradicionais) quando inseridos em tarefas exploratórias abertas. Ambos os estudos coincidem ao apontar que o fracasso escolar é uma exclusão subjetiva produzida pela "pseudoformação" de políticas neoliberais de fluxo escolar que precarizam a educação para economizar recursos do Estado, gerando alienação.

Considerações Finais

O mapeamento sistemático de literatura consolidado neste trabalho permitiu evidenciar que o fracasso escolar em matemática contemporânea é um constructo social e político, e não um déficit de competência dos educandos ou uma mera incompetência metodológica dos educadores. As políticas neoliberais sustentam um jogo ideológico perverso: forçam o fluxo de aprovação sem oferecer investimentos estruturais e, diante da ineficiência resultante, individualizam a culpa, tensionando as relações entre alunos e professores em um ciclo infindável de mútuas acusações.

A superação desse cenário exige a superação da avaliação tradicional classificatória e punitiva. O horizonte de resistência repousa na perspectiva da avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem (Buriasco, 2000; Silva; Buriasco, 2023). Ao substituir a "leitura pela falta" pela "leitura positiva" e utilizar instrumentos reflexivos como a Prova-Escrita-em-Fases e o Vaivém, o erro é acolhido como indício produtivo do percurso do aluno (Esteban, 2002). Rompe-se, desse modo, o ciclo de culpa individual, reestabelecendo a dignidade do trabalho docente, a autoria discente e convertendo a Educação Matemática em um espaço democrático de emancipação social.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

BARBOSA, J. K. Influências da educação matemática inclusiva no pacto nacional pela alfabetização na idade certa. **Boletim Online de Educação Matemática**, Joinville, v. 5, n. 9, p. 161-178, 2017.

BURIASCO, R. L. C. de. Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 22, p. 155-178, jul./dez. 2000.

CRISTOVÃO, E. M.; FIORENTINI, D. Abordagem exploratório-investigativa em matemática para incluir crianças e jovens em situação de fracasso escolar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 25, n. 4, p. 159-190, 2023.

CRUZ, F. M. L.; MONTEIRO, C. E. F. Processos formativos de avaliação da aprendizagem de Matemática segundo licenciandos e professores formadores. **JIEEM - Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 6, n. 2, p. 85-109, 2013.

EMMEL, R.; COSTA, P. de. O Ensino da Matemática, a aprendizagem e o fracasso escolar: uma análise dessas relações no Ensino Médio Integrado... **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 5, n. 2, p. 96-107, 2019.

ESTEBAN, M. T. **O que sabe quem erra?**: reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Instrumentos de pesquisa em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

OLIVEIRA, S. A. C. K.; MOREIRA, P. C. Relação com o saber matemático de alunos em risco de fracasso escolar. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. 33, p. 239-266, 2010.

PATTO, M. H. S. **A produção do fracasso escolar**: histórias de submissão e rebeldia. São Paulo: Instituto de Psicologia - USP, 2022.

PINA NEVES, R. da S.; BORGES, M. J. G. Discalculia e aprendizagem matemática no quarto ano do ensino fundamental: algumas compreensões. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 8, n. 16, p. 27-47, 2019.

SACHS, L. Dizeres sobre a realidade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 7, n. 13, p. 108-123, 2018.

SILVA, G. dos S. e; BURIASCO, R. L. C. de. O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática** (HISTEMAT), v. 9, 2023.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Uma investigação sobre o instrumento de avaliação Carta para a Tia

Emanuela Gonçales Lopes Rodrigues[1]
lopesemanuelag@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)[2]
gabriel.santos22@gmail.com

Resumo

Avaliação é um processo, tomado como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. Um dos possíveis instrumentos de avaliação é a "Carta para a Tia", no qual o estudante escreve uma carta para sua tia (ou outra pessoa de sua escolha) contando sobre o que aprendeu nas aulas de matemática. O objetivo deste resumo é apresentar uma investigação sobre o instrumento de avaliação Carta para a Tia. Esse instrumento foi aplicado para 24 alunos do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, divididos entre 4° e 5° anos. Neste resumo, serão debatidas cartas nas quais os estudantes relataram ter dificuldades, não gostar de matemática, ou ainda apresentaram comportamento de autocobrança.

Palavras-chave: Educação Matemática, Avaliação, Instrumentos de Avaliação, Carta para a Tia.

Considerações iniciais

Entende-se que a avaliação de rendimento, que é comumente utilizada em aulas de matemática, seja diferente da avaliação da aprendizagem, a qual foca no desenvolvimento do estudante, de acordo com Buriasco (2000), e a qual será utilizada neste estudo. De acordo com a mesma autora, avaliação é um processo, tomado como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, não se limitando a um momento pontual.

Ao pensarmos que o foco deve estar em oportunizar a aprendizagem do estudante, reflete-se sobre o que procuramos ao investigar as produções dos alunos. Garnica (2006) defende que a leitura positiva, que leva o professor a buscar trabalhar com aquilo que o estudante sabe, é muito mais proveitosa que a leitura pela falta, a qual é tão frequentemente adotada e se resume em buscar o que falta ao estudante.

Nesse sentido, busca-se ampliar o leque de opções de instrumentos avaliativos, pensando em opções que de fato assumam o papel de prática de investigação e

[1] Universidade Federal do Paraná (UFPR). Graduanda em Licenciatura em Matemática.
[2] Universidade Federal do Paraná (UFPR). Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

oportunidade de aprendizagem, e com isso muitos novos instrumentos vêm surgindo.

É nesse contexto que surge, com Santos (2008), o instrumento "Carta para a Tia", no qual o estudante escreve uma carta para sua tia (ou outra pessoa de sua escolha) contando sobre o que aprendeu nas aulas de matemática. Os benefícios desse instrumento incluem, mas não se limitam, a geração de um ambiente em que o aluno se sente confortável em desabafar sobre diversos assuntos (emocionais ou do conteúdo em si) que em um instrumento tradicional ele provavelmente não o faria, a oportunidade de colocar o aluno no papel de quem ensina e aprende ensinando, e a revisão e reflexão de conteúdos estudados anteriormente.

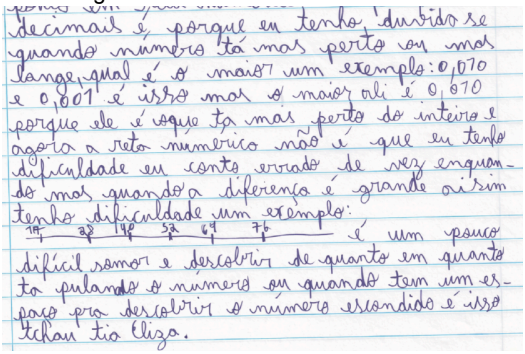
O objetivo deste resumo é apresentar uma investigação sobre o instrumento de avaliação Carta para a Tia. Esse instrumento foi aplicado para 24 alunos do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, divididos entre 4° e 5° anos, em uma escola municipal, localizada em Ibiporã (PR)[3]. Todas as crianças trouxeram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado, e então produziram a carta de acordo com o enunciado previamente elaborado pelos autores: "Escreva uma carta para a sua tia, explicando e ensinando para ela o que você aprendeu nas aulas de matemática, no terceiro bimestre. Aproveite para contar para ela como você se sente nas aulas de matemática, quais são suas maiores dificuldades e facilidades com essa disciplina".

Após a elaboração das cartas, os nomes reais das crianças foram substituídos por pseudônimos, e então começou a análise das cartas, seguindo a ideia da análise da produção escrita. Após uma primeira leitura das cartas, foi feito um agrupamento com base em coisas em comum entre diferentes cartas. Ao todo foram 5 grupos: O grupo A dizia respeito à "Dificuldades com o conteúdo estudado", o grupo B com "Facilidades com o conteúdo estudado", o grupo C reúne quem "Afirma gostar de matemática", o grupo D quem "Afirma não gostar de matemática", e por fim o grupo E está relacionado à "Autocobrança".

Uma análise das cartas

A carta de Rafael entrou para o grupo A pois ele afirma ter certas dificuldades.

Figura 1 - Excerto da carta de Rafael.



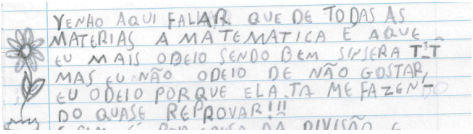
[3] A aplicação foi feita por Jessica Aparecida Borssoi Zanquim Custódio, doutoranda pela Universidade Estadual de Londrina. Jessica também auxiliou nas análises e no desenvolvimento desta pesquisa.

Fonte: Os autores.

Na carta de Rafael, pode-se ver um relato das dificuldades do estudante a partir de sua própria visão. Isso traz uma riqueza de informações ao professor, que pode usá-las para auxiliar o estudante em seu processo de aprendizagem. Possivelmente, com outros instrumentos, essas dificuldades fossem expressas apenas em formato de erros, e não seria possível tentar investigar sua real causa.

A carta de Alana entrou para o grupo C, pois em sua carta relatou não gostar de matemática.

Figura 2 - Excerto da carta de Alana.

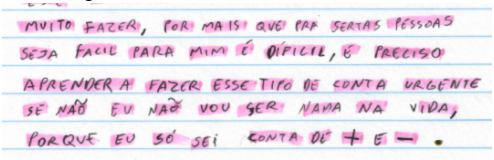


Fonte: Os autores.

A carta de Alana é um exemplo de como é importante investigar o motivo de um aluno não gostar de matemática. Muitas vezes um certo desgosto não necessariamente tenha a ver diretamente com um conteúdo em si. No caso de Alana, ela aparenta não gostar de matemática simplesmente pois está quase reprovando na matéria, e essa situação pode criar bloqueios que atrapalham o processo de aprendizagem.

Por fim, os relatos de Clara em sua carta a levaram ao grupo E, pois ela demonstrou autocobrança.

Figura 3 - Excerto da carta de Clara.



Fonte: Os autores.

Observa-se, primeiramente, a forma que este instrumento proporciona um ambiente seguro para a estudante desabafar sobre assuntos emocionais que quem sabe ela não relate em seu dia a dia na escola, e que também não são observáveis em outros instrumentos. Importante ressaltar que, pelas palavras usadas pela criança, possivelmente essa é uma fala que ela ouviu de outra pessoa e está repetindo. Eis um ponto muito positivo desse instrumento, pois a partir dele seria possível o professor trabalhar com Clara no que de fato é sua maior dificuldade: não a matemática em si, mas sua autoconfiança, que também é um aspecto muito importante no processo de aprendizagem.

Esse instrumento se mostra rico em oportunidades de aprendizagem, se comparado aos instrumentos tradicionais, pois não se prende apenas aos cálculos, mas também envolve e investiga outros aspectos importantes no processo de aprendizagem.

VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas Considerações sobre Avaliação Educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, n. 22, p. 155-178, 2000.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Erros e Leitura Positiva: propostas, exercícios e possibilidades. In: **I Jornada Nacional De Educação Matemática**, 1., XIV JORNADA Regional De Educação Matemática, 2006, Passo Fundo. Anais [...]. Passo Fundo: UPF, 2006.

SANTOS, Sandra Augusta. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: LOPES, Celi Espasandin (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009, p. 127-141.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Uma investigação sobre o uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino da álgebra em colégios do litoral paranaense

Davi Farias Paes[1]
davifpaes369@gmail.com

Maria Eduarda Soldati Razera[2]
mariasoldati235@gmail.com

Tiago Luiz Ferrazza (Orientador)[3]
tiago.ferrazza@unespar.edu.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

O aumento da abstração dos conceitos matemáticos torna o ensino e a aprendizagem da Matemática cada vez mais difícil, principalmente no ensino da Álgebra. Uma estratégia pedagógica que propõe superar essa dificuldade é utilizar materiais didáticos manipuláveis para desenvolver nos alunos ideias que constituem o Pensamento Algébrico, favorecendo assim a aprendizagem da Álgebra. Contudo, observa-se nas escolas uma escassez de materiais manipuláveis que têm essa função como sendo a principal. Por isso, esse trabalho, vinculado a dois projetos de Iniciação Científica e que estão em sua fase inicial de desenvolvimento, visa investigar a utilização de materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico para o ensino da Álgebra, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, em colégios localizados no litoral paranaense, especificamente nos municípios de Antonina, Morretes, Matinhos e Pontal do Paraná.

Palavras-chave: álgebra, materiais didáticos manipuláveis, pensamento algébrico.

Introdução

Para o estudo da Álgebra utiliza-se muito a linguagem simbólica para discutir propriedades, relações e generalidades em todos os outros campos da matemática. Contudo, ao avançar no ensino da álgebra, especialmente dos conceitos algébricos estudados no Ensino Fundamental, encontram-se alguns obstáculos, como: a) a falta de recursos materiais e de tempo para a efetivação do processo de ensino-aprendizagem; e b) a dificuldade dos alunos em conceber os conceitos abstratos e

[1]Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranaguá. Voluntário do Programa de Iniciação Científica

[2]Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranaguá. Voluntária do Programa de Iniciação Científica.

[3]Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranaguá. Doutor.

apropriar-se da linguagem algébrica utilizada no tratamento e discussões acerca dos objetos de estudo. Uma alternativa que propõe superar o segundo obstáculo é utilizar materiais didáticos manipuláveis, visto que o uso desses materiais tem o potencial de atual como facilitador do processo de ensino-aprendizagem e na construção de significado para conceitos algébricos via exploração e manipulação dos materiais pelos alunos (Bresan et al., 2024).

Assim, essa pesquisa tem como objetivo geral investigar o uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino da álgebra em colégios localizados no litoral paranaense, especificamente nos municípios de Antonina, Matinhos, Morretes e Pontal do Paraná, ou seja, investigar se nesses colégios estão presentes materiais didáticos manipuláveis que tenham como utilidade principal facilitar o ensino da álgebra (ou que possam ser direcionados de alguma forma para esse fim) e se/como os professores estão utilizando esses materiais.

Para cumprir com tal objetivo, pretende-se aprofundar a pesquisa bibliográfica para que se possa dar início às investigações nos colégios conhecendo: a) a relação entre o concreto e o abstrato no ensino da matemática; b) a(s) caracterização(ões) dos materiais didáticos manipuláveis; e c) a concepção de Álgebra e Pensamento Algébrico sob a ótica de diversos autores.

Após, tem-se a etapa da pesquisa de campo onde será realizada a investigação nos colégios: quais MDM serão observados e considerados como possíveis de serem utilizados no ensino da álgebra, a aplicação de um questionário aos professores sobre o uso e a percepção desses materiais no ensino da álgebra e da matemática em geral.

Por fim, os dados obtidos serão organizados e analisados para posterior divulgação dos resultados em eventos científicos acadêmicos de pesquisa e na forma de artigo.

Referências

BECHER, E. L. e GROENWALD, C. L. O. Características do Pensamento Algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí, Rio Grande do Sul, 2009.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 16 mar. 2025.

BRESSAN, G. M.; SOUZA, P. M.; MARTINEZ, A. L. M.; STIEGELMEIER, E. W. O uso de Materiais Manipuláveis como recurso pedagógico no Ensino da Álgebra. In: SOUZA, A. C.; VIUDES, M. M. (org.) Narrativas em Educação Matemática: pesquisas, trajetórias, concepções e práticas. São Paulo, SP: Editora Científica Digital LTDA, 2024.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. Pró-Posições, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GROENWALD, C. L. O. Pensamento Aritmético e Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental. IV EIEMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática. 2014. ISSN 2316-7785.

VERSÃO PROVISÓRIA

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997.

SOARES, L. H.; RÊGO, R. G. O concreto e o abstrato no ensino de matemática. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. Anais[...] Ilhéus: UESC, 2015.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis In: Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.) As ideias da álgebra (Chap. 2, pp. 9-22). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.SOBRENOME, Nome. Título: subtítulo. Local: Editora, Ano.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

UTILIZANDO O DOMINÓ DE EQUAÇÕES PARA A REVISÃO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS NO ENSINO MÉDIO DURANTE O ESTÁGIO SUPERVISIONADO DE MATEMÁTICA

Wanderson dos Santos Rodrigues[1]
wandersonrodrigues@alunos.utfpr.edu.br

João Bosco Almeida Cruz[2] (Orientador)
joao.c@escola.pr.gov.br

Resumo

Este trabalho socializa uma experiência desenvolvida por um estudante de Licenciatura em Matemática, no contexto do Estágio Supervisionado, com duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio. A proposta teve como objetivo revisar conteúdos relacionados à Equação do Primeiro Grau, no âmbito da disciplina de Recomposição de Aprendizagem de Matemática, por meio da utilização de jogos matemáticos. Inicialmente, realizou-se a retomada de conceitos matemáticos, como expressões algébricas, variáveis, valor numérico e equações e, em seguida, foi desenvolvido o jogo Dominó de Equações, como estratégia pedagógica para promover o raciocínio lógico, a tomada de decisão e a interação entre os estudantes. A dinâmica foi estruturada em etapas que envolveram a revisão dos conteúdos, apresentação do material, explicação das regras, desenvolvimento do jogo, socialização das estratégias e sistematização dos conhecimentos. A avaliação realizou-se de maneira formativa, com base na observação da participação, do engajamento e das estratégias mobilizadas pelos estudantes durante a dinâmica. Os resultados evidenciaram avanços na compreensão dos conceitos algébricos, principalmente na manipulação de termos e no uso de operações inversas para resolução de equações, contemplando a redução de erros recorrentes, como equívocos de sinais e operações inadequadas para o conteúdo. O uso de jogos, aliado à mediação pedagógica, configura-se como uma estratégia eficiente para a revisão de conceitos algébricos, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da comunicação, da colaboração e da autoconfiança dos estudantes da Educação Básica, favorecendo uma aprendizagem matemática contextualizada e interativa.

Palavras-Chave: Álgebra, Aprendizagem, Educação Básica, Jogos, Metodologia.

Introdução

O ensino de Álgebra na Educação Básica tem sido marcado por desafios recorrentes, especialmente no que se refere à compreensão conceitual e ao engajamento dos estudantes no processo de aprendizagem (Silva, 2013). Diante das dificuldades presentes na assimilação de conteúdos matemáticos, com destaque para os conceitos algébricos, torna-se necessária a utilização de metodologias que promovam um aprendizado matemático dinâmico e articulado ao cotidiano dos estudantes. Superar a tradicional visão da Álgebra como um conjunto abstrato de letras e regras de memorização mecânica exige a adoção de práticas diferenciadas, de forma a contribuir com o aprendizado matemático em sala de aula.

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
[2] Docente de Matemática. Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED-PR).

VERSÃO PROVISÓRIA

O presente trabalho caracteriza-se como um relato de experiência desenvolvido na disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica por um estudante de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Curitiba. A interação pedagógica foi desenvolvida no primeiro semestre de 2025, em duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Cívico-Militar Dias da Rocha, situado no município de Araucária (PR). A ação esteve inserida no contexto da disciplina de Recomposição da Aprendizagem de Matemática, cuja finalidade pedagógica consiste na retomada, no fortalecimento e na revisão de conteúdos relacionados ao campo matemático que não foram plenamente assimilados no decorrer do percurso educacional dos estudantes.

Durante o período de acompanhamento da prática docente, compreendeu-se a relevância de proporcionar momentos dedicados à retomada dos conteúdos algébricos, especialmente no que se refere à compreensão conceitual e aos procedimentos de resolução da Equação do Primeiro Grau. Identificou-se a oportunidade de reforçar aspectos relacionados ao tema, tais como a articulação entre operações básicas, o uso de operações inversas, a utilização de propriedades matemáticas e o isolamento da incógnita. Diante desse cenário, e atendendo a uma solicitação do docente supervisor do Estágio Supervisionado, que, por sua vez, sugeriu a elaboração de uma dinâmica baseada em um jogo matemático voltado para a revisão de conceitos algébricos de forma prática e interativa, estruturou-se uma proposta pautada no recurso lúdico envolvendo o jogo clássico do dominó. A escolha da metodologia fundamentou-se no potencial dos jogos de integrar elementos lúdicos ao desenvolvimento do raciocínio lógico e analítico, estimulando a cooperação e a aprendizagem colaborativa entre os estudantes do Ensino Médio.

A interação pedagógica foi estruturada no formato de uma ação didática dividida em dois encontros complementares, articulando momentos teóricos e práticos em sala de aula. O planejamento, a elaboração dos materiais, a seleção do repertório de equações, a definição das regras e o estabelecimento dos encaminhamentos metodológicos foram conduzidos pelo estudante de Licenciatura em Matemática com as orientações e as revisões do docente supervisor. O recurso pedagógico utilizado consistiu na organização do jogo intitulado de Dominó de Equações, cujas peças foram produzidas manualmente em papel cartão no formato retangular, similar ao próprio dominó. De um lado da peça, apresentava-se uma Equação do Primeiro Grau e, do outro, uma respectiva solução ou uma expressão algébrica equivalente. Visando contemplar os diferentes níveis de conhecimento das turmas, a seleção das equações abrangeu gradações variadas de complexidade, assegurando a participação dos estudantes na dinâmica feita em sala de aula. O desenvolvimento ocorreu de forma sequencial em dois encontros no período matutino em cada turma.

No primeiro encontro, a etapa iniciou-se por meio de uma contextualização sobre a aplicabilidade das equações na resolução de problemas do cotidiano. Em seguida, realizou-se a exposição dialógica dos conceitos-chave, abordando a definição de equação, a noção de incógnita, as propriedades matemáticas, o conceito de igualdade e de variável e o emprego das operações inversas, acompanhados de resolução de exemplos e esclarecimento de dúvidas dos estudantes. Ao término do encontro, foram apresentadas as regras, os objetivos do jogo Dominó de Equações, familiarizando previamente os estudantes com a dinâmica para otimizar o tempo didático e direcionar o esforço cognitivo do encontro subsequente exclusivamente ao raciocínio algébrico e aos conceitos matemáticos.

No segundo encontro, dedicado integralmente ao desenvolvimento do jogo, iniciou-se com a reorganização da turma em pequenos grupos e a distribuição dos conjuntos do dominó. Sob a mediação contínua do licenciando e o acompanhamento

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

do docente supervisor, os estudantes resolveram as equações para associá-las às respostas corretas, mobilizando propriedades algébricas e testando hipóteses. Impasses conceituais e erros operacionais foram trabalhados de forma dialógica entre os pares e com a mediação docente de forma pontual. Por fim, reservou-se um momento para a socialização e a reflexão coletiva, no qual os estudantes que participaram da interação pedagógica verbalizaram as suas estratégias, analisaram os equívocos mais frequentes e exercitaram a metacognição, seguido por uma síntese dos conteúdos matemáticos trabalhados e desenvolvidos nos encontros.

Resultados Principais

Durante as partidas do jogo Dominó de Equações, observou-se uma participação constante dos estudantes, impulsionada pelo caráter colaborativo e desafiador da proposta. O formato do jogo exigiu flexibilidade cognitiva, pois, a cada jogada, os grupos precisavam testar diferentes hipóteses, avaliar expressões equivalentes e validar os resultados antes de "encaixar" as peças correspondentes. O processo exigiu a mobilização constante de conhecimentos sobre propriedades da igualdade, uso de operações matemáticas inversas e a manipulação de incógnitas. Um dos aspectos observados durante a interação pedagógica foi à mudança de postura dos estudantes diante do erro. Equívocos frequentes, como falhas na regra de sinais ou na inversão de operações ao isolar a variável, emergiram naturalmente durante as jogadas. Em vez de gerarem frustração, esses impasses foram ressignificados, ou seja, o compartilhamento de ideias entre os próprios integrantes do grupo, aliado à mediação dialógica docente, transformou o erro em um ponto de partida para a reflexão e a compreensão do saber e dos conceitos matemáticos.

No momento de socialização e reflexão coletiva ao final da interação, a verbalização das estratégias utilizadas permitiu aos estudantes exercitarem a metacognição, tornando-os conscientes de seus próprios processos de raciocínio. A síntese final, apresentada pelo licenciando, consolidou os aprendizados, evidenciando que a articulação entre a revisão teórica e o jogo didático promoveu tanto o fortalecimento dos conteúdos algébricos quanto do desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia e da cooperação em sala de aula. A realização da interação pedagógica no contexto do Estágio Supervisionado evidenciou que a utilização do jogo Dominó de Equações, articulada a uma etapa de revisão teórica direcionada, constitui uma estratégia metodológica eficaz para contribuir com a disciplina de Recomposição da Aprendizagem de Matemática. A proposta atingiu os objetivos ao minimizar as lacunas identificadas na resolução de Equações do Primeiro Grau, promovendo uma revisão e uma retomada dos conceitos algébricos.

Para Lemes, Cristóvão e Grando (2024), durante a participação em jogos matemáticos, os estudantes são mobilizados a interpretar, argumentar, justificar e tomar decisões, exercitando conhecimentos e habilidades socioemocionais, como cooperação, comunicação e persistência. No entanto, é importante que o uso dos jogos matemáticos esteja associado a uma intencionalidade pedagógica e a objetivos claros e bem definidos. Conforme complementa Silva *et al.* (2022), o jogo não deve ser compreendido como um recurso meramente recreativo, mas deve ser visualizado como um instrumento didático e pedagógico capaz de potencializar a aprendizagem quando planejado de forma estruturada e orientada. Ao lidar com regras, desafios e tomadas de decisões inerentes ao jogo, os estudantes da Educação Básica são estimulados a identificar regularidades, testar hipóteses e generalizar padrões, ações cognitivas que constituem uma base para a Álgebra.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

LEMES, Jean Carlos; CRISTOVÃO, Eliane Matesco; GRANDO, Regina Célia. Características e possibilidades pedagógicas de Materiais Manipulativos e Jogos no ensino da Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 38, p. 1-23, 2024. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/4pcBK8nK94m4n7zkw4gf4bw. Acesso em: 19 ago. 2026.

SILVA, Bruno Henrique Macêdo dos Santos; SILVA, Arthur Lucas; OLIVEIRA, Elinelson Gomes; LIRA, Lidianne Leite; PONTES, Edel Alexandre Silva. Jogos Matemáticos como ferramenta educacional lúdica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica. **Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 246-254, 2022. Disponível em: https://rebena.emnuvens.com.br/revista/article/view/59. Acesso em: 20 ago. 2026.

SILVA, Juliano da. **O ensino da Álgebra no Ensino Fundamental**: dificuldades e desafios. 2013. 37 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Ciências), Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/21981. Acesso em: 17 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Vivências e aprendizado durante o estudo de práticas de professoras pedagogas que ensinam matemática em EJA

Eduarda Rodrigues Gomes Veloso[1]
eduarda.veloso@ufpr.br

Prof. Dr. Carla Cristina Pompeu (Orientadora)[2]
carla.pompeu@ufpr.br

Resumo

Este trabalho apresenta as experiências e aprendizados adquiridos, por uma licencianda em Matemática, durante o estudo sobre práticas de professoras pedagogas que ensinam matemática nos anos iniciais da Educação de Jovens e Adultos (EJA). O objetivo foi compreender como os docentes trabalham a matemática nesta modalidade de ensino. A partir das análises de cortes de edições anteriores da formação continuada "A matemática na Educação de Jovens, Adultos e Idosos, foi possível compreender que as docentes ressignificam os conteúdos matemáticos, trazendo assuntos cotidianos, valorizando os saberes e experiências dos/as estudantes e a cultura local. Foi possível perceber que as práticas docentes se aproximam dos territórios dos/as estudantes e contribuem com para repensarmos nas matemáticas dos cotidianos escolares.

Palavras-chave: Educação de jovens e adultos, Práticas docentes, Formação de professores que ensinam matemática.

Introdução

Compreender como os docentes ressignificam a matemática na EJA é de suma importância para que possamos dar visibilidade para seus mecanismos de atrair os estudantes com os projetos. Com o material do curso de formação continuada "A matemática na educação de jovens, adultos e idosos", foi iniciado um trabalho para entender como podemos ensinar os conteúdos dos anos iniciais em EJA sem que ocorra a infantilização do público que este modelo de ensino atende. Foram utilizados para a análise cortes das reuniões realizadas no curso, onde os docentes apresentavam suas práticas. As práticas foram assistidas e organizadas em uma tabela que indica suas principais características e como o/a docente ressignificou o conteúdo proposto. O trabalho tem como objetivo compreender e identificar como é

[1]Universidade Federal do Paraná. Licencianda em Matemática. Bolsista do projeto "Currículos de matemática da educação de jovens e adultos (EJA) no Brasil: A autoria docente desinvibilizada na formação continuada de professores/as".

[2]Universidade Federal do Paraná. Doutora em Educação.

VERSÃO PROVISÓRIA

realizado este processo de criação das práticas pedagógicas utilizando situações cotidianas que se relacionam com a realidade daquela comunidade onde atendem.

Identificar as estratégias e autoria docentes nos currículos pensadospráticos e como relacionam o planejamento da aula com o que realmente acontece na realidade da EJA. As análises foram realizadas e as informações organizadas em uma tabela, onde comparamos as práticas e as estratégias utilizadas pelos docentes que participaram do curso.

Resultados Principais

Foi possível compreender, a partir das análises das gravações das práticas docentes, que em sua maioria, os/as docentes valorizam os saberes e experiências dos/as estudantes, trabalhando assuntos cotidianos que refletem suas realidades e necessidades.Conforme Fonseca (2005) “o desenvolvimento de projetos reais na EJA, que partam de demandas identificadas pelos próprios estudantes, potencializa o engajamento com o conhecimento matemático”.

Diversas práticas docentes compartilhadas, com foco nos anos iniciais, valorizam a interdisciplinaridade, trabalhando mais do que matemática, em particular em práticas que tratam sobre a produção de livros culinários, em que a docente trabalha matemática e língua portuguesa de maneira acolhedora e afetiva, sendo assim, atraindo os estudantes para a comunidade escolar.

> Trabalhos interdisciplinares nos primeiros ciclos da Escola Fundamental, tanto na EJA como no ensino para crianças, têm encontrado um espaço muito mais receptivo do que nos ciclos seguintes. Não podemos considerar esse fato sem relacioná-lo à formação dos educadores e a própria organização do trabalho escolar que nos primeiros anos da escolarização apresenta uma rigidez muito menor... (Fonseca, 2005, p. 68).

Estas práticas que valorizam a cultura local são importantes para que a EJA seja um lugar de acolhimento, onde os estudantes possam se sentir pertencentes e assim ter uma trajetória leve em sua formação. De acordo com Fonseca (2005, p. 70), “ao perceber que a escola não apenas aceita, mas valoriza os conhecimentos que ele maneja com certa destreza, o aluno adulto se sente mais seguro, mais integrado ao fazer escolar”.

Em uma das práticas analisadas, intitulada “Matemática nos direitos trabalhistas”, a professora utiliza de uma roda de conversa para tratar sobre direitos trabalhistas e aproveitou dos holerites dos alunos para ensinar como calcular as porcentagem daquilo que é descontado de seu salário e sobre como se organizar utilizando tabelas de excel.

Nesta e em diversas outras práticas analisadas, observamos como o/a docente utiliza de situações reais e atuais para que o estudante compreenda o conteúdo e consiga utilizá-lo em situações reais, como diz Fonseca (2005 p.78): “Na EJA, aliam-se a necessidade dos alunos em adquirirem instrumental para resolver seus problemas e a própria disponibilização e diversidade de informações e recursos que o próprio aluno traz para a sala de aula, adquiridos em sua vivência social, familiar, profissional, esportiva, religiosa, sindical etc.”

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Nesse contexto também estamos identificando como a afetividade e vínculo podem ajudar no processo de ensino destes estudantes, a fim de ajudar os alunos a se sentirem pertencentes ao ambiente escolar.

Referências

FONSECA, M. da C. F. R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos:** especificidades, desafios e contribuições. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Geometria e Topologia

Comissão Científica:

Em breve!

Banca Avaliadora:

Em breve!

VERSÃO PROVISÓRIA

Ações de Grupo Contínuas e Módulos Cruzados Topológicos

Pedro Henrique Andrade*
phandrade1012@gmail.com

Juan Sebastián Herrera Carmona†
sebastianherrera@ufpr.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo detalhar a construção de módulos cruzados topológicos e sua conexão com ações de grupos contínuas; analisamos essa conexão por meio da ação por automorfismos $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(H)$ que dá origem às equações de estrutura de um módulo cruzado. Após isso, mostramos como a equivalência entre 2-grupos e módulos cruzados é preservada quando munimos os grupos e os homomorfismos envolvidos de topologias compatíveis.

Palavras-chave: módulos cruzados, ações de grupo, grupos topológicos, 2-grupos, categorias.

Introdução

A ideia central desta seção é discutir conceitos de grupos topológicos além de exemplos ilustrativos. Em seguida, estudamos ações de grupo contínuas, isto é, ações de grupos topológicos em espaços topológicos. Podemos definir tal ação:

Definição 1. *Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico. Então uma ação contínua a esquerda de G em X é uma aplicação contínua $\phi : G \times X \to X$, comumente denotada por $\phi(g, x) = gx$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\phi(e_g, x) = x$;
- $\phi(g_0 g_1, x) = \phi(g_0, \phi(g_1, x))$;

Com estas definições apresentamos exemplos de ações contínuas de grupo, além de definirmos espaços homogêneos e apresentar exemplos de tais espaços.

Alguns exemplos de ações de grupo contínuas incluem:

*UFPR. Bacharelado. Bolsista do PET Matemática.
†UFPR. Professor do Departamento de Matemática

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

- $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$;
- $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$;
- $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{RP}^{n-1}$;

Agora, definimos um módulo cruzado:

Definição 2. *[2] Um módulo cruzado é uma quádrupla* (G, H, ρ, α) *onde* G *e* H *são grupos com* $\rho : H \to G$ *e* $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(H)$ *homomorfismos de grupo tais que satisfazem:*

- $\rho(\alpha_g(h)) = g\rho(h)g^{-1}$*;*
- $\alpha_{\rho(h)}(h') = hh'h^{-1}$*, conhecida como Identidade de Peiffer.*

Alguns exemplos de módulos cruzados incluem:

- $(GL_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n, \rho, \alpha : GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R})$ com $\rho(v) = I_n$;
- $(O_n(\mathbb{R}), \{I_n\}), \rho, \alpha)$ com ρ e α homomorfismos constantes.

Agora, nos interessamos em colocar uma estrutura de grupo topológico nos grupos, assim como nos homomorfismos, usados para construir o módulo cruzado.

Resultados Principais

Nesta seção, a ideia central é colocar estrutura topológica nos módulos cruzados, isto é, todos os objetos envolvidos estão dentro da categoria de espaços topológicos. Assim, os grupos utilizados serão topológicos, o homomorfismo de grupos $\rho : H \to G$ será contínuo, e a ação $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(H)$ será uma ação contínua. Além disso, relembramos a noção de 2-grupos e a equivalência entre 2-grupos e módulos cruzados.

Sabemos que um 2-grupo pode ser definido como:

Definição 3. *Um 2-grupo é uma categoria* $\mathscr{G} = (G_0, G_1, s, t, m, u, i)$ *onde as coleções de objetos e morfismos* G_0 *e* G_1*, respectivamente, assim como os morfismos de estrutura* s, t, m, u, i *estão na categoria* Grp*. O morfismo de estrutura* $m : G_1 \times_{s,t} G_1 \to G_1$ *deve satisfazer uma propriedade conhecida como Lei do Intercâmbio, que é dada pela seguinte equação:* $m(f \cdot f', g \cdot g') = m(f, g) \cdot m(f', g')$*.*

Motivamos, brevemente, a equivalência entre essas estruturas: um 2-grupo é uma categoria interna à categoria dos grupos, enquanto um módulo cruzado é uma apresentação algébrica dessa estrutura por meio de dois grupos G e H, um homomorfismo $\rho : H \to G$ e uma ação $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(H)$. A equivalência permite escolher a descrição mais conveniente: em um módulo cruzado as condições aparecem como equações explícitas, o que facilita cálculos; em um 2-grupo a estrutura é mais categórica, o que facilita interpretações e generalizações.

Teorema 1. *As categorias* $2Grp$ *e* $XMod$*, de 2-grupos e módulos cruzados respectivamente, são equivalentes.*

Após isso, mostramos como esta equivalência se mantém quando adicionamos estrutura topológica nos objetos envolvidos, isto é, como todo módulo cruzado topológico determina um 2-grupo topológico e vice-versa.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] SAN MARTIN, Luiz. *Grupos de Lie*. Brasil: Editora Unicamp, 2016

[2] FRIEDRICH, W. *Crossed Modules*. Berlin: De Gruyter Studies in Mathematics, 2021.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Análise Geométrica do Pêndulo de Foucault: Transporte Paralelo e Curvatura

João Vitor Silveira Ribeiro
vitor.joao2@ufpr.br

Alex Paulo Francisco (Orientador)
alexpf@ufpr.br

Resumo

A proposta deste trabalho é explorar alguns conceitos fundamentais da Geometria Diferencial, com foco especial no comportamento de vetores em espaços curvos. Para ilustrar essa teoria de forma concreta, investigaremos a matemática por trás do Pêndulo de Foucault. Utilizaremos o pêndulo como um meio para compreendermos o conceito de transporte paralelo. Mostraremos que a rotação do plano de oscilação do pêndulo, observada ao longo de um dia, não exige a introdução de "forças fictícias"comuns na mecânica clássica, mas surge naturalmente da restrição geométrica de transladar vetores sobre a superfície esférica da Terra.

Palavras-chave: Geometria Diferencial, Transporte Paralelo, Pêndulo de Foucault, Espaços Curvos, Geodésicas.

Introdução

A Geometria Diferencial é a área da matemática que se preocupa em estudar as propriedades de formas e espaços suaves, utilizando ferramentas do cálculo e da álgebra linear. Em um espaço plano (como o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$), transladar um vetor de um ponto a outro mantendo "paralelo"a si mesmo é uma operação que independe do caminho percorrido [2]. Porém, ao trabalharmos em superfícies curvas, como a esfera S^2, o transporte paralelo de um vetor entre dois pontos depende da trajetória escolhida [2].

Um exemplo da dependência do caminho no transporte paralelo em nosso mundo físico é o Pêndulo de Foucault. Na mecânica clássica, o pêndulo é geralmente analisado a partir de um referencial em rotação acoplado à Terra [3]. Como resultado, os textos clássicos introduzem a "força de Coriolis"[3].

Nesta apresentação, seguimos uma abordagem geométrica alternativa, descrita em Wonchoba (1990) [1]. Ao reconhecermos que o pêndulo se move com restrição adiabática sobre a superfície esférica terrestre, percebemos que o plano de oscilação não está apenas girando, mas sim sofrendo um transporte paralelo natural enquanto

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

a Terra rotaciona em torno de seu próprio eixo [1]. Veremos que a defasagem angular observada após um dia é, na verdade, uma consequência direta da geometria da superfície ao longo de uma latitude fixa [2, 1].

Análise Geométrica do Pêndulo

Para entender o movimento geometricamente, seguimos a formulação de Wonchoba (1990) [1], que propõe inicialmente a visualização de um argumento: o transporte paralelo é modelado colocando um cone tangente à Terra na latitude θ em que o pêndulo oscila. A geometria plana do cone desenrolado permite calcular visualmente que a defasagem total após uma rotação completa da Terra equivale a $2\pi \sin(\theta)$ [1]. O autor formaliza esse resultado utilizando os símbolos de Christoffel.

Introduzindo coordenadas curvilíneas (ϕ_1, ϕ_2) em S^2, a métrica pode ser dada por $ds^2 = \cos^2(\phi_2)d\phi_1^2 + d\phi_2^2$ [2]. O transporte paralelo de um vetor X^i ao longo de um caminho restrito a essa superfície curva obedece à equação diferencial:

$$dX^i = -\Gamma^i_{uv} X^u dx^v, \tag{1}$$

onde os Γ^i_{uv} denotam os símbolos de Christoffel [2].

Com base nessa formulação, apresenta-se o seguinte teorema, demonstrado por Wonchoba [1]:

Teorema 1 (Wonchoba, 1990)**.** *Seja $\zeta^\alpha(t)$ o vetor que define o plano de oscilação do Pêndulo de Foucault em uma latitude constante θ em S^2. O plano de oscilação sofre transporte paralelo ao longo da rotação da Terra e a sua variação no referencial do corpo é dada por*

$$d\zeta^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dy^\beta \zeta^\gamma.$$

Após 24 horas, o plano de oscilação sofre uma rotação total de $2\pi \sin(\theta)$.

Ideia da Demonstração (Segundo Wonchoba). Calculando os símbolos de Christoffel para a esfera, determina-se que $\Gamma^2_{11} = \cos(\phi_2)\sin(\phi_2)$ e $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\tan(\phi_2)$ [2]. Substituindo esses valores na equação de transporte paralelo e restringindo o movimento a uma latitude constante $\phi_2 = \theta$ com $d\phi_2 = 0$, obtém-se um sistema de equações diferenciais lineares [1]. A solução desse sistema fornece uma matriz de rotação que, após integrada por uma revolução inteira na latitude, gira o vetor inicial pelo ângulo exato de $2\pi \sin(\theta)$ [1]. □

Essa demonstração mostra que as mudanças na oscilação acontecem unicamente da restrição do movimento sobre uma superfície curva. Portanto, a defasagem angular diária do plano de oscilação do pêndulo revela de maneira geométrica a curvatura intrínseca da superfície terrestre, e consequentemente, permite determinar o raio da Terra a partir da relação geométrica do cone tangente, e das observações do movimento acumulado ao longo de uma revolução completa.

Referências

[1] WONCHOBA, Wayne E. **A geometric analysis of Foucault's pendulum**. Math 189, 1990.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

[2] DO CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[3] ARNOLD, Vladimir I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. 2. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1989.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Grafos de Cayley e Crescimento de Grupos: uma Abordagem Geométrica

João Pedro de Castilho Bonini*
joao.bonini@ufpr.br

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)†
giseleteixeira@ufpr.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar o estudo do crescimento de grupos finitamente gerados a partir de uma abordagem geométrica. Para isso, são introduzidos os grafos de Cayley, a métrica das palavras e a função de crescimento. Em seguida, são comparados exemplos que apresentam crescimento linear, quadrático e exponencial. Por fim, destacam-se a conjectura de Milnor, o teorema de Gromov sobre grupos de crescimento polinomial e a construção de Grigorchuk, que forneceu o primeiro exemplo de crescimento intermediário. Com essa análise, busca-se mostrar como o crescimento de um grupo relaciona sua estrutura algébrica com as propriedades geométricas de seu grafo de Cayley.

Palavras-chave: teoria geométrica de grupos, grafos de Cayley, crescimento de grupos.

Introdução

A Teoria Geométrica de Grupos procura estudar propriedades algébricas por meio de objetos geométricos. Nessa abordagem, um grupo finitamente gerado deixa de ser visto apenas como um conjunto munido de uma operação e passa a ser representado por um espaço no qual se pode falar em caminhos e distâncias. Um dos principais objetos utilizados para construir essa relação é o **grafo de Cayley** [2, Seção 7.9].

Seja G um grupo gerado por um conjunto finito e simétrico S, isto é, $S = S^{-1}$. O grafo de Cayley de G em relação a S, denotado por $\mathrm{Cay}(G, S)$, possui como vértices os elementos de G. Dois vértices g e h são ligados por uma aresta quando existe $s \in S$ tal que $h = gs$. Assim, multiplicar um elemento do grupo por um gerador corresponde a percorrer uma aresta do grafo. Essa construção permite representar geometricamente a estrutura algébrica de G.

*UFPR. Discente bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).
†UFPR. Pós-Dra.

O comprimento de um elemento $g \in G$, denotado por $|g|_S$, é o menor número de geradores necessário para escrevê-lo. A partir desse comprimento, define-se a **métrica das palavras**

$$d_S(g,h) = |g^{-1}h|_S.$$

Essa distância coincide com o comprimento do menor caminho entre os vértices g e h no grafo de Cayley. Em particular, a bola de raio n centrada no elemento neutro e é dada por

$$B_S(n) = \{g \in G : d_S(e,g) \leq n\}.$$

Essa interpretação conduz naturalmente à **função de crescimento** de G em relação a S, denotada por $\gamma_{G,S}$ ou γ_G, caso o conjunto de geradores seja claro pelo contexto:

$$\gamma_{G,S}(n) = \operatorname{card} B_S(n).$$

Essa função conta quantos elementos se encontram a uma distância menor ou igual a n do elemento e. Surge, então, uma questão importante: com que velocidade a quantidade $\operatorname{card} B_S(n)$ aumenta quando n cresce? Embora a função dependa do conjunto de geradores escolhido, seu tipo assintótico de crescimento não depende dessa escolha [3, Seção 6.2].

Resultados Principais

Os exemplos mais simples já revelam comportamentos diferentes. Para $\mathbb{Z}$ com os geradores $\{\pm 1\}$, o grafo de Cayley é uma reta e

$$\gamma_{\mathbb{Z}}(n) = 2n + 1,$$

de modo que o crescimento é linear. Para $\mathbb{Z}^2$ com os geradores usuais, o grafo forma uma malha no plano e

$$\gamma_{\mathbb{Z}^2}(n) = 2n^2 + 2n + 1,$$

o que fornece crescimento quadrático. Já o grupo livre em dois geradores, $F_2 = \langle \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\} \rangle$, possui um grafo de Cayley que é uma árvore 4-regular. Nesse caso,

$$\gamma_{F_2}(n) = 2 \cdot 3^n - 1,$$

e o crescimento é exponencial. Geometricamente, a diferença ocorre porque a reta, a malha e a árvore oferecem quantidades muito distintas de novos vértices à medida que o raio da bola aumenta.

Esses, bem como outros exemplos clássicos de grupos, podem sugerir dois comportamentos principais: o crescimento polinomial, presente em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^2$, e o crescimento exponencial, observado em F_2. Em 1968, John Milnor formulou uma questão que orientou grande parte do desenvolvimento da teoria [1, p. 236].

Conjectura (Milnor, 1968). O crescimento de um grupo finitamente gerado é sempre polinomial ou exponencial.

Negar a conjectura seria encontrar um grupo cuja função de crescimento fosse mais rápida que qualquer polinômio e, ao mesmo tempo, mais lenta que qualquer função exponencial.

Um resultado decisivo apareceu em 1981, quando Mikhail Gromov caracterizou os grupos de crescimento polinomial [2, Teorema 16.1].

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema 1 (Gromov, 1981)**.** *Se G é um grupo finitamente gerado com crescimento polinomial, então G é virtualmente nilpotente.*

A pergunta de Milnor recebeu uma resposta negativa nos trabalhos de Rostislav Grigorchuk, no início da década de 1980. Grigorchuk construiu um grupo finitamente gerado cujo crescimento é mais rápido que qualquer polinômio e mais lento que qualquer exponencial. Surgia, assim, o primeiro exemplo de **crescimento intermediário** [2, p. vi]. Esse resultado mostrou que os possíveis comportamentos da função de crescimento não se limitam a ser apenas polinomial ou exponencial.

A função de crescimento torna-se, portanto, uma ponte entre álgebra e geometria: propriedades abstratas do grupo passam a ser investigadas por meio da forma e da expansão de seu grafo de Cayley.

Referências

[1] BELOLIPETSKY, Mikhail; PAULA, Gisele Teixeira. An Introduction to Geometric Group Theory. **arXiv preprint arXiv:2409.17797**, 2024. Disponível em: `https://arxiv.org/abs/2409.17797`.

[2] DRUTU, Cornelia; KAPOVICH, Michael. **Geometric Group Theory**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2018. v. 63. (American Mathematical Society Colloquium Publications). Com um apêndice de Bogdan Nica.

[3] LÖH, Clara. **Geometric Group Theory**. Cham: Springer International Publishing, 2017.

[4] MANN, Avinoam. **How Groups Grow**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. v. 395. (London Mathematical Society Lecture Note Series).

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

O Monopólo de Dirac: interpretação geométrica via fibrados principais

João Carlos Gomes Garcia*
joaogarcia@ufpr.br

Juan Sebastián Herrera Carmona (Orientador)†
sebastianherrera@ufpr.br

Resumo

Este trabalho investiga o monopólo magnético de Dirac como motivação e exemplo paradigmático para a formulação geométrica de teorias de calibre em termos de fibrados principais. Partimos da observação de Dirac de que as equações usuais de Maxwell exibem uma assimetria conceitual e de que, ao admitir uma carga magnética pontual (um monopolo), o campo correspondente não pode ser descrito por um potencial globalmente bem definido. Essa obstrução manifesta-se, na linguagem clássica, pela necessidade de introduzir potenciais locais A_α em abertos que recobrem o espaço, relacionados por transformações de calibre nas interseções; é nesse contexto que surge a chamada "corda de Dirac" como artefato de trivialização. Tal fenômeno evidencia que a estrutura matemática adequada para descrever o monopólo — e, de modo mais geral, campos de gauge — é a de um fibrado principal munido de uma conexão.

Palavras-chave: Fibrados principais, conexões, Transformação de calibre, Teorias de calibre, Monopólo magnético.

Introdução

As equações de Maxwell constituem um dos exemplos mais importantes de unificação na história da Física, ao estabelecerem uma descrição comum para os fenômenos elétricos e magnéticos. Em sua formulação usual, os campos elétrico e magnético, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, são determinados pelas distribuições de carga e corrente e satisfazem, em unidades gaussianas e tomando $c = 1$ [4, p. 7],

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi\mathbf{J}. \end{aligned} \tag{1}$$

*UFPR. Graduando em bacharelado em física. Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico
†UFPR. Professor do Departamento de Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

onde ρ e $\mathbf{J}$ representam, respectivamente, a densidade de carga elétrica e a densidade de corrente.

Apesar do sucesso da unificação, a teoria apresenta uma assimetria com relação aos campos. A condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ exclui, *a priori*, a existência de fontes de carga magnética pontuais (monopólos), em contraste com o caso elétrico, onde é possível observar experimentalmente fontes de carga elétrica positivas e negativas.

Essa assimetria chamou a atenção de Dirac, que, em 1931, propôs a existência hipotética de uma partícula portadora de carga magnética, o monopolo magnético. A introdução dessa fonte permitiria estender as equações de Maxwell de modo a tratar eletricidade e magnetismo de maneira mais simétrica. Além disso, Dirac mostrou que a existência de um monopolo está relacionada à quantização da carga elétrica, estabelecendo uma condição de consistência quântica entre as cargas elétrica e magnética.

O monopolo magnético também revela aspectos geométricos não evidentes na formulação usual do eletromagnetismo. Embora o campo magnético possa ser definido regularmente fora da posição do monopolo, não é possível escolher um único potencial vetorial $\mathbf{A}$, definido globalmente, que reproduza esse campo sem introduzir uma singularidade. É necessário, portanto, introduzir potenciais definidos localmente e relacionados por transformações de calibre.

A consistência dessa construção impõe uma condição sobre as cargas elétrica e magnética, conhecida como condição de quantização de Dirac. Essa construção fornece uma motivação natural para a descrição do eletromagnetismo em termos de fibrados e conexões, perspectiva que será explorada neste trabalho.

Resultados Principais

Neste trabalho, formulamos o monopólo de Dirac no contexto geométrico de teorias de calibre abelianas. Primeiramente, reescrevemos as equações de Maxwell em linguagem de formas diferenciais no espaço-tempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, (t, x, y, z))$: identificamos o campo eletromagnético com uma 2-forma $F \in \Omega(\mathbb{R}^4)$ (cf.[2, §7.2]) e expressamos as equações (no caso sem monopólos) como

$$dF = 0, \qquad d \star F = 4\pi \mathcal{J},$$

onde $\star$ é o operador de Hodge associado à métrica e $\mathcal{J} \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)$ é a corrente (cf.[3, §4.7]). No caso sem monopólos magnéticos, a condição $dF = 0$ implica, pelo lema de Poincaré, que localmente existe uma 1-forma $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ tal que

$$F = dA,$$

interpretada como potencial de gauge. Entretanto, ao introduzir uma carga magnética pontual, essa descrição deixa de ser globalmente válida:

Proposição 0.1. *Seja F uma 2-forma fechada definida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Então, em geral, não existe uma 1-forma global A tal que $F = dA$.*

Em seguida, mostramos que, ao permitir uma carga magnética, o potencial de calibre deixa de ser globalmente definível: é necessário introduzir potenciais locais A_α em um recobrimento por abertos U_α, relacionados por transformações de calibre nas

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

interseções (cf. [1, §1.9.2 e §9.41]). O fenômeno historicamente descrito pela "corda de Dirac" é, nessa perspectiva, um artefato associado à escolha de trivializações locais.

Teorema 1. *Existe um fibrado principal*

$$U(1) \longrightarrow P \longrightarrow S^2,$$

que pode ser realizado como a fibracao de Hopf

$$U(1) \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2.$$

Nesse fibrado, os potenciais locais A_α são obtidos como pullbacks de uma 1-forma de conexão global $\omega \in \Omega^1(P)$ por seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to P$, isto é,

$$A_\alpha = s_\alpha^* \omega.$$

Também analisamos a curvatura associada à conexão e sua descrição local. No caso abeliano, a curvatura é representada localmente por

$$F = dA_\alpha,$$

e a quantização topológica do fluxo

$$\int_{S^2} F$$

identifica-se com o primeiro número de Chern do fibrado, codificando a carga magnética. Essa quantização fornece a ponte conceitual com a condição de Dirac para o acoplamento de partículas eletricamente carregadas, conectando unificação, simetria e topologia na formulação geométrica do monopólo.

Proposição 0.2 (Condição de quantização de Dirac)**.** *Seja $P \to S^2$ o fibrado principal $U(1)$ associado ao monopólo magnético e seja e a carga elétrica de uma partícula acoplada ao campo. Então, a consistência global do acoplamento implica*

$$eg = \frac{n\hbar}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

ou, equivalentemente,

$$g = \frac{n\hbar}{2e}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Assim, a quantização da carga magnética — e, consequentemente, da carga elétrica na presença de um monopólo — pode ser interpretada como consequência da estrutura topológica do fibrado cf.[1, §10.5.2].

Referências

[1] Nakahara, Mikio, *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis, 2003.

[2] Frankel, Theodore, *The Geometry of Physics: An Introduction*. 3rd ed. Cambridge University Press, 2011.

[3] Gorodski, Claudio, *Smooth Manifolds*. Springer International Publishing, 2020.

[4] Baez, John; Muniain, Javier P., *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, 1994.

VERSÃO PROVISÓRIA

O Teorema de Hopf-Rinow para variedades riemannianas

Tiago Filipe Pires Galu *
tiago.galu@ufpr.com

Diego Otero (Orientador(a))†
otero.ufpr@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta um plano de estudo dirigido sobre a completude em variedades Riemannianas, tendo como eixo central o Teorema de Hopf-Rinow. O objetivo é investigar as conexões entre a estrutura diferenciável da variedade e sua natureza como espaço métrico. Através do estudo da aplicação exponencial e do Lema de Gauss, exploramos as equivalências entre a completude métrica e a completude geodésica. Como resultado, discutimos propriedades globais fundamentais, especificamente a existência de geodésicas minimizantes unindo pontos em variedades completas, estabelecendo uma base sólida para o estudo da geometria riemanniana global.

Palavras-chave: Geometria Riemanniana, Hopf-Rinow, Variedades Diferenciáveis

Introdução

A Geometria riemanniana representa uma evolução natural do cálculo diferencial em espaços euclidianos para estruturas geométricas mais abstratas e curvas. O ponto de partida fundamental é a introdução de uma métrica riemanniana — um produto interno que varia suavemente em cada espaço tangente — permitindo que conceitos métricos clássicos, como comprimento de arco e ângulo, sejam definidos em variedades diferenciáveis. Neste estudo, o conceito de geodésica desempenha um papel central. As geodésicas são curvas que satisfazem uma equação diferencial de segunda ordem e que, localmente, minimizam a distância entre pontos, funcionando como as ”retas” desses espaços curvos.

Sendo assim, surge um problema central de natureza global: sob quais condições podemos garantir que a geometria da variedade seja ”bem comportada“ em toda a sua extensão? Em espaços métricos gerais, a noção de completude (toda sequência de Cauchy converge) é puramente métrica. Contudo, em variedades Riemannianas, a

*UFPR. Graduando em bacharelado em matemática. Bolsista pelo PET matemática.
†UFPR. Doutor em Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

completude assume uma faceta geométrica interessante. O Teorema de Hopf-Rinow surge como o resultado fundamental que unifica essas visões, estabelecendo que a completude métrica é equivalente à completude geodésica — ou seja, à capacidade de estender geodésicas indefinidamente. Este trabalho dedica-se ao estudo rigoroso deste teorema e de suas ferramentas acessórias, como a aplicação exponencial (entendida como definida em [2]) e o Lema de Gauss. A investigação proposta não apenas fundamenta a compreensão sobre a existência de geodésicas minimizantes globais, mas também estabelece o alicerce necessário para estudos avançados em variedades de curvatura limitada e a relação entre a forma (topologia) e a métrica (geometria) de uma variedade.

Resultados Principais

O desenvolvimento deste trabalho estrutura-se na demonstração e análise das implicações do Teorema de Hopf-Rinow. Os principais resultados teóricos a serem explorados incluem:

- Caracterização da Completude: A demonstração de que a completude de uma variedade Riemanniana como espaço métrico é equivalente à sua completude geodésica.
- Propriedades da Aplicação Exponencial: A verificação de que, em variedades completas, a aplicação exponencial está definida em todo o fibrado tangente, permitindo mapear propriedades do espaço euclidiano tangente para a variedade de forma global.
- Existência de Geodésicas Minimizantes: A prova de que, para quaisquer dois pontos em uma variedade Riemanniana completa e conexa, existe pelo menos uma geodésica cujo comprimento é igual à distância entre esses pontos.
- Conexão Topologia-Geometria: A caracterização total dos subconjuntos compactos de uma variedade riemanniana completa.

Isso pode ser resumido no seguinte teorema (enunciado de acordo com [1]):

Teorema 1 (Hopf-Rinow)**.** *Sendo M variedade Riemanniana com $p \in M$, são equivalentes:*

- *exp_p está definida em todo T_pM;*
- *Os limitados e fechados de M são compactos;*
- *M é completa como espaço métrico;*

Além disso, sendo M conexa, cada uma das afirmações anteriores implicam em:

- *Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q tal que $\ell(\gamma) = d(p, q)$, com $\ell(\gamma)$ denotando o comprimento da curva γ.*

Referências

[1] do Carmo, Manfredo P., *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[2] Petersen, Peter, *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.

VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema de Poincaré

Pedro Carvalho Igreja*
pedro.igreja@ufpr.br

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)†
giseleteixeira@ufpr.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar as principais propriedades do plano hiperbólico e de suas isometrias, com ênfase no Teorema de Poincaré. A Geometria Hiperbólica difere da Geometria Euclidiana devido à sua métrica, o que torna suas isometrias distintas em propriedades e aplicações. Destaca-se o estudo dos grupos Fuchsianos, subgrupos discretos do grupo de isometrias que preservam a orientação do plano hiperbólico, com relevância em áreas como Análise, Teoria dos Números e Topologia, além da Geometria Diferencial. No caso de grupos infinitos, verificar a discretude é, em geral, uma tarefa não trivial. Durante a Iniciação Científica, foram estudados os conceitos necessários para demonstrar o Teorema de Poincaré, que fornece condições para a construção de grupos Fuchsianos a partir de um polígono hiperbólico e emparelhamentos apropriados de seus lados.

Palavras-chave: Transformação de Möbius, Grupos Fuchsianos, Teorema de Poincaré.

Introdução

O quociente do plano hiperbólico por um grupo Fuchsiano origina, sob algumas condições, uma superfície hiperbólica. Informações importantes do ponto de vista topológico e métrico dessa superfície podem ser descritas a partir da *assinatura* do grupo, um conjunto de dados determinado por sua estrutura algébrica (ver [1]). O trabalho de Poincaré foi muito importante para o estudo desses grupos. Uma condição adicional adotada por muitas referências e que torna a demonstração do Teorema de Poincaré mais simples, é a convexidade do polígono em questão. No projeto de IC, foi estudado o trabalho de Maskit [2], no qual essa demonstração é mais completa e permite aplicar o teorema em um contexto geral.

*Universidade Federal do Paraná. Graduando em Matemática. Bolsista do Programa PICME.
†Universidade Federal do Paraná.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

Na Geometria Hiperbólica, o plano hiperbólico pode ser representado pelo disco de Poincaré $\mathbb{D}$, cuja fronteira será denotada por $\partial\mathbb{D}$. Ele é o círculo unitário no plano complexo, onde a métrica é definida a partir do comprimento hiperbólico de caminhos:

$$\ell_{\mathbb{D}}(\sigma) = \int_a^b \frac{2}{1-|\sigma(t)|^2}\,|\sigma'(t)|\,dt.$$

Por conta disso, as isometrias identificadas por γ são definidas da seguinte forma:

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0.$$

Definimos *Grupos Fuchsianos* como subgrupos discretos do grupo formado por essas isometrias. A estrutura de um grupo fuchsiano pode ser determinada por seus geradores e relações. Dado um grupo fuchsiano Γ, um subconjunto $P \subset \mathbb{D}$ é um domínio fundamental de Γ se $\gamma_1(P) \cap \gamma_2(P) = \emptyset$ para todos $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ com $\gamma_1 \neq \gamma_2$ e

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{P}) = \mathbb{D}.$$

Uma maneira usual de obter domínios fundamentais é através da construção de polígonos de Dirichlet [1, Capítulo 3].

O teorema a seguir fornece uma maneira de fabricar exemplos de grupos fuchsianos, para os quais um domínio fundamental é naturalmente exibido. Tanto a construção de exemplos quanto a exibição de domínios fundamentais para um dado grupo são tarefas geralmente não triviais.

Teorema 1 (Poincaré)**.** *Considere um polígono hiperbólico aberto P de n lados e área finita. Suponha que haja transformações de Möbius, γ, tais que pares de lados de P sejam associados, i.e., se s for um lado, existem $\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$ e um lado s' de P tais que $\gamma(s) = s'$, e para cada lado s existe uma vizinhança V tal que $\gamma(V \cap P) \cap P = \emptyset$.*

Assuma que cada vértice $z \in \mathbb{D}$ respeita a condição do ciclo elíptico, que diz que: se a soma dos ângulos de vértices num mesmo ciclo é S, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $S \cdot m = 2\pi$, e cada vértice $z \in \partial\mathbb{D}$ respeita a condição do ciclo parabólico, dada por uma restrição em transformações associadas a ciclos de vértices ideais do polígono.

Então, o grupo Γ formado pelos geradores γ e relações dos ciclos elípticos é Fuchsiano e o polígono P é um polígono de Dirichlet de Γ.

Para demonstrar esse teorema, constrói-se um espaço $X = \bar{P} \times \Gamma$, obtido colando cópias de P indexadas pelos elementos do grupo gerado pelos γ_i, respeitando os emparelhamentos de lados. Considera-se P^* como o quociente de $\bar{P}$, pela relação de equivalência $x \sim x'$ se existir $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(x) = x'$, com mapa quociente $\pi : \bar{P} \to P^*$. Definem-se então dois mapas:

$$q : X \longrightarrow P^* \qquad \text{e} \qquad p : X \longrightarrow \mathbb{D},$$

sendo $p(z, \gamma) = \gamma(z)$, construído colando as cópias transladadas $\gamma(P)$ dentro do plano hiperbólico, e $q(z, \gamma) = \pi(z)$.

As etapas centrais são:

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

- X **é uma superfície**: cada ponto de X possui uma vizinhança homeomorfa a um disco;
- p **é um homeomorfismo local**: decorre da etapa anterior e do fato das isometrias γ_i serem homeomorfismos;
- p **é sobrejetivo**: usa-se conexidade por caminhos de $\mathbb{D}$ e o fato de p ser um homeomorfismo local;
- p **é injetiva**: seja $B_t(z_0, t)$ a bola aberta de centro z_0 e raio t em $\mathbb{D}$; defina-se B_τ como $\tau = \sup\{t \mid p^{-1}$ bem definido em $B_t\}$. Por compacidade e continuidade, p^{-1} também estará bem definida em $\bar{B}_\tau$. Usando o fato de que p é um homeomorfismo local, é possível estender a região onde p^{-1} está bem definida, contradizendo a hipótese de B_τ ser o supremo. Logo, p é injetiva e, portanto, um recobrimento;
- conclui-se que Γ atua de forma propriamente descontinua com domínio fundamental P. Este fato é suficiente para garantir que o grupo é discreto.

Referências

[1] KATOK, Svetlana. **Fuchsian Groups**. Chicago: University of Chicago Press, 1992.

[2] MASKIT, Bernard. On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons. **Advances in Mathematics**, v. 7, p. 219–230, 1971.

[3] MILNOR, John. Hyperbolic Geometry: The First 150 Years. **Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society**, v. 6, n. 1, 1982.

[4] POINCARÉ, Henri. Théorie des groupes fuchsiens. **Acta Mathematica**, v. 1, n. 1, p. 1–62, 1882.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teoria de Morse e Classificação de Superfícies

Felipe Monteiro Kiotheka*
felipe.kiotheka@ufpr.br

Juan Sebastián Herrera Carmona (Orientador)†
sebastianherrera@ufpr.br

Resumo

A Teoria de Morse se preocupa em estudar as funções de Morse. Elas são as melhores candidatas para extrair informações intrínsecas da geometria de uma superfície. O Lema de Morse nos da uma forma bem conhecida do espaço próximo dos pontos críticos enquanto o Primeiro Teorema de Morse mostra que longe dos pontos críticos o espaço assume uma forma simples. E, ainda, o Teorema do Cancelamento nos diz que pontos de extremo e de sela consecutivos podem ser simplificados. Com isso, vamos demonstrar o resultado clássico de classificação de superfícies regulares.

Palavras-chave: superfície regular, teoria de Morse, classificação de superfícies, geometria diferencial.

Introdução

Nosso objetivo nesse trabalho é classificar as superfícies regulares a menos de difeomorfismo. Os modelos da classificação para superfícies regulares serão a esfera $T_0 = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, o toro $T_1 = \mathbb{T}^1 \subset \mathbb{R}^3$, as somas conexas $T_n \subset \mathbb{R}^3$ de n toros, o plano projetivo $P_1 = \mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{R}^4$ e as somas conexas $P_n \subset \mathbb{R}^4$ de n planos projetivos.

A principal ferramenta será a teoria de Morse que tem como principal objeto as funções suaves definidas na superfície com valores reais. Em específico, estudamos os pontos com certas propriedades dessas funções e vemos como eles influênciam a geometria da superfície.

Definição. Dadas uma superfície regular M, uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ e $p \in M$, dizemos que p é um *ponto regular de* f se $df_p \neq 0$ e, caso contrário, chamamos p de *ponto crítico de* f. No segundo caso, se $\det(\mathrm{Hess}\, f(p)) \neq 0$, então chamamos p de *ponto crítico não-degenerado*.

*UFPR. Discente da graduação. Bolsista do PET Matemática UFPR.
†UFPR. Docente do Departamento de Matemática UFPR.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

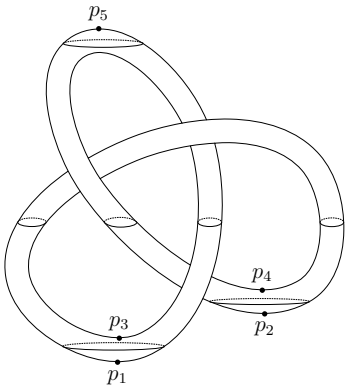


Figura 1: Os pontos p_1 e p_2 são de índice 0; p_3 e p_4 de índice 1; e p_5 de índice 2 da função altura.

O resultado inicial é sobre a forma que a superfície toma em valores próximos de pontos bons o suficiente.

Definição. Dada uma superfície regular M, uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in M$, dizemos que uma parametrização (U, φ) em torno de p é uma *parametrização de Morse* se

$$f \circ \varphi(x, y) = \pm x^2 + \pm y^2.$$

Com isso, chamamos a quantidade de sinais negativos em $f \circ \varphi(x, y)$ de *índice de* p.

E, por bons o suficiente o seguinte lema esclarece o que queremos dizer.

Teorema (Lema de Morse). Dada uma superfície regular M, uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ e $p \in M$, então f admite uma parametrização de Morse em torno de p se, e somente se, p é um ponto crítico não-degenerado de f.

Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em Tavares (1979, p. 65). O teorema diz que do ponto de vista da função, a superfície tem formato bem definido e conhecido: um paraboloide ou uma sela. E essa é uma das observações que carrega a principal intuição da teoria.

Definição. Dada uma superfície regular M e uma função $f : M \to \mathbb{R}$, dizemos que f é uma *função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não-degenerados. Mais ainda, chamamos de *ordenada* se seus pontos críticos de índice 0 tem valor menor que os de índice 1 que, por sua vez, são menores que os de índice 2.

Essas funções são as candidatas perfeitas para aplicar a teoria. Quando M é compacta, seus pontos críticos são isolados (Tavares, 1979, p. 63) e a condição de estarem ordenados é apenas por conveniência. Não veremos nesse trabalho, mas a mesma condição de antes nos garante a existência de muitas funções de Morse (Milnor, 1964, p. 36) que podem ser ordenadas (Tavares, 1979, p. 73).

Então, uma função de Morse admite, em cada um de seus pontos críticos, a forma dada pelo Lema de Morse. Para um exemplo, veja a Figura 1.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

As demonstrações para os seguinte teoremas podem ser encontradas no livro de Tavares (1979).

Teorema (Primeiro Teorema de Morse). Dadas uma superfície regular compacta conexa M e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de Morse e seja K uma componente conexa de $f^{-1}([a, b])$ que só contém pontos regulares, chame $K_c = f^{-1}(\{c\}) \cap K$. Então, obtemos os seguintes difeomorfismos

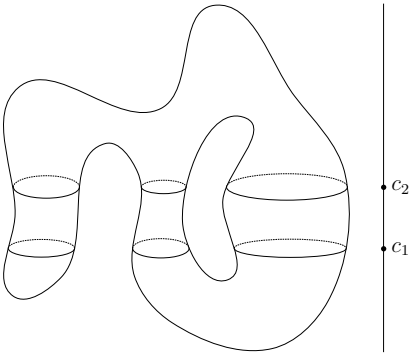
$$K_a \cong K_b \quad f^{-1}((-\infty, a)) \cong f^{-1}((-\infty, a)) \cup K \quad K \cong K_a \times [a, b].$$

Intuitivamente, o teorema nos diz que se não há valores críticos entre dois valores regulares então a topologia da superfície não mudou entre eles. Além disso, há uma certa localidade nesse resultado. Pode haver valores críticos nesse intervalo mas o teorema ainda vale para aquelas componentes conexas que não tem os respectivos pontos críticos. A figura Figura 2a nos mostra um exemplo de onde aplicar esse teorema.

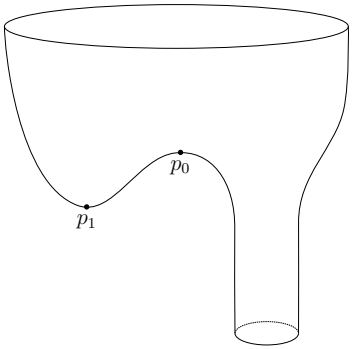
Teorema (Teorema do Cancelamento). Dada uma superfície regular compacta e conexa M e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de Morse ordenada, se $f^{-1}([a, b])$ só contém pontos regulares a menos de p_0 e p_1 de índice 0 e 1, respectivamente, tais que $a < f(p_0) < f(p_1) < b$ e que estão na mesma componente conexa então vale o difeomorfismo

$$f^{-1}([a, b]) \cong f^{-1}(\{a\}) \times [0, 1].$$

Mais geral que o caso anterior, agora, permitimos pontos críticos contanto que eles se cancelem, de certa maneira. Veja a Figura 2b para um exemplo intuitivo.



(a) Seja f a função altura, então $f^{-1}([c_1, c_2])$ não admite pontos críticos e, logo, obtemos os difeomorfismos do Primeiro Teorema de Morse.



(b) Nessa pré imagem de uma função altura, temos exatamente um ponto de índice 0 e um ponto de índice 1. Esses pontos se cancelam, no sentido do teorema.

E concluímos com o resultado principal.

Teorema (Teorema de Classificação). Toda superfície regular compacta e conexa é difeomorfa a um dos modelos T_n ou P_n.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

MILNOR, J. **MORSE THEORY**. Princeton: Princeton University Press, 1963. (Annals of Mathematics Studies, n. 51).

TAVARES, G. **Funções de Morse e Classificação de Superfícies**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Um estudo sobre transformações de Möbius

Marcello Capilé Luiz*
marcelloluiz@alunos.utfpr.edu.br

Lilian Cordeiro Brambila (Orientadora)†
lilianc@utfpr.edu.br

Resumo

Neste trabalho exploramos o conceito de transformações de Möbius e analisamos algumas de suas propriedades fundamentais: tais funções preservam circunferências e noções como simetria e orientação. Além disso, uma transformação de Möbius é sempre uma composição de translações, rotações, homotetias e inversões.

Palavras-chave: plano complexo estendido, transformação de Möbius, propriedades geométricas.

Introdução

A noção de transformação de Möbius foi introduzida pelo matemático e astrônomo alemão August Ferdinand Möbius (1790 - 1868). A classe dessas funções é caracterizada por uma estrutura que permite interpretá-la tanto algebricamente quanto geometricamente.

Dentre algumas de suas aplicações, as transformações de Möbius são utilizadas na Teoria de Grupos, na Geometria Complexa e na Física. Em particular, o interesse deste trabalho é entender algumas propriedades geométricas de uma transformação de Möbius.

Como é possível verificar, translações, rotações, homotetias e inversões são exemplos de transformações de Möbius. Mais que isso, dada qualquer transformação de Möbius ela se decompõe como composição de funções desse tipo. Além disso, é possível verificar que essas transformações preservam círculos e também simetria e orientação.

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Licenciando em Matemática.
†Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Resultados Principais

No plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se definem as *transformações de Möbius*.

Definição 1. *Uma* transformação de Möbius *é uma aplicação* $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ *da forma*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *satisfazem* $ad - bc \neq 0$.

A condição $ad - bc \neq 0$ garante que a transformação seja não singular. Além disso, uma transformação de Möbius admite transformação inversa, dada por

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Outra propriedade conhecida é que a composição de duas transformações de Möbius resulta novamente em uma transformação de Möbius. Devido a existência da transformação identidade e da inversa, essa propriedade faz com que o conjunto das transformações de Möbius não singulares forme um grupo com a *composição* como sua operação [1].

Uma das propriedades fundamentais das transformações de Möbius é a possibilidade de decompor uma transformação geral em uma composição de transformações mais simples [2]. Mais precisamente:

Teorema 1. *Toda transformação de Möbius pode ser escrita como composição de transformações dos seguintes tipos:*

- ***Translação****:* $z \mapsto z + \beta$*;*
- ***Rotação****:* $z \mapsto \alpha z,\ |\alpha| = 1$*;*
- ***Homotetia****:* $z \mapsto \rho z,\ \rho > 0$*;*
- ***Inversão****:* $z \mapsto \dfrac{1}{z}$*.*

Essa decomposição permite compreender o comportamento geométrico de uma transformação de Möbius a partir dos efeitos individuais de translações, rotações, homotetias e inversões.

As transformações de Möbius apresentam propriedades que permitem compreender como elas atuam sobre figuras e relações geométricas no plano complexo estendido. Entre essas propriedades, destacam-se o comportamento das circunferências, a preservação da simetria e a preservação da orientação.

Teorema 2. *Se* T *é uma transformação de Möbius, então* T *leva circunferência em circunferência.*

Nesse contexto, uma reta é considerada uma circunferência que passa pelo ponto ∞ no plano complexo estendido. Portanto, uma transformação de Möbius pode transformar uma reta em uma circunferência ou uma circunferência em uma reta.

Outro resultado importante é o seguinte:

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Teorema 3 (Princípio da simetria)**.** *Se uma transformação de Möbius T leva uma circunferência Γ_1 sobre uma circunferência Γ_2, então pontos simétricos em relação a Γ_1 são transformados em pontos simétricos em relação a Γ_2.*

Essa propriedade mostra que uma transformação de Möbius preserva uma relação geométrica entre pontos, mesmo quando a própria circunferência é modificada pela transformação.

Podemos também discutir a noção de orientação de uma circunferência.

Definição 2. *Uma orientação de uma circunferência Γ consiste na escolha de um sentido de percurso sobre ela. Equivalentemente, uma ordenação de três pontos distintos (z_1, z_2, z_3) pertencentes a Γ determina uma das duas possíveis orientações da circunferência. Uma circunferência munida de orientação é chamada de* circunferência orientada*.*

A orientação escolhida determina os lados direito e esquerdo da circunferência; em particular, para a orientação anti-horária, o interior da circunferência está à esquerda durante o percurso.

Finalizamos o trabalho com o seguinte resultado a respeito de orientação.

Teorema 4 (Princípio da Orientação)**.** *Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências em $\mathbb{C}_\infty$, e seja T uma transformação de Möbius tal que $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Seja (z_1, z_2, z_3) uma orientação para Γ_1. Então, T leva o lado direito e o lado esquerdo de Γ_1 sobre, respectivamente, o lado direito e o lado esquerdo de Γ_2, com respeito à orientação $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.*

Referências

[1] DURAN, Franciéli. Transformações de Möbius e Inversões. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

[2] CONWAY, John B. Functions of One Complex Variable. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1978.

VERSÃO PROVISÓRIA

Uma Introdução à Aritmética das Curvas Elípticas

Miguel Augusto Vialich*
miheelt@gmail.com

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)†
giseleteixeira@ufpr.br

Resumo

O objetivo principal deste projeto é investigar propriedades aritméticas de curvas elípticas tanto do ponto de vista teórico quanto utilizando ferramentas de computação científica como PARI/GP. Mais precisamente, utilizando técnicas da teoria algébrica de números, pretende-se obter uma melhor compreensão dos fundamentos da teoria de curvas elípticas definidas sobre corpos numéricos. Essa possibilidade se dá pelo fato de que o conjunto dos pontos racionais de uma curva elíptica pode ser munido de uma operação que o confere estrutura de grupo abeliano. O Teorema de Mordell-Weil afirma que este grupo é finitamente gerado quando a curva elíptica é definida sobre um corpo numérico, como por exemplo, o corpo dos números racionais. Este trabalho concentra-se em curvas elípticas definidas sobre os números racionais, pretendendo aplicar a teoria de curvas elípticas na resolução de equações diofantinas e explorar conexões entre a teoria de números e a geometria.

Palavras-chave: Curvas elípticas; PARI/GP; Teorema de Mordell-Weil.

Introdução

Problemas relacionados à teoria de curvas elípticas (que são certos tipos de curvas descritas por uma equação polinomial de grau 3), remontam dos anos 200 à 300, surgindo na obra de Diofanto de Alexandria, a quem se associa hoje às *equações diofantinas*. Entretanto, somente nos últimos 150 a 200 anos é que as curvas elípticas têm sido fortemente estudadas, o que levou a avanços significativos na compreensão de problemas clássicos em teoria de números e impactos em diversas áreas da matemática. Alguns exemplos disso são a prova de Andrew J. Wiles [6] do Último Teorema de Fermat e o desenvolvimento da criptografia de curvas elípticas.

*UFPR. Estudante de graduação do curso de bacharelado em Matemática. Bolsista no PICME.
†UFPR. Doutora em Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Ainda assim, muitos problemas envolvendo curvas elípticas permanecem em aberto, incluindo as famosas conjecturas de *Birch & Swinnerton-Dyer* e de *Szpiro* [4, Seções VIII.11 e C.16]. No âmbito aritmético, boa parte das dificuldades envolvendo a teoria de curvas elípticas está relacionada a questões algorítmicas/computacionais. Uma pergunta natural é: é possível resolver de maneira completa uma equação diofantina de grau 3 em duas variáveis estudando sua curva elíptica subjacente? Alguns resultados oferecem maneiras promissoras de atacar o problema, para o qual não foi encontrada solução na literatura. Neste trabalho, pretendemos explorar estas conexões de maneira teórica e prática.

Resultados Principais

Uma curva algébrica plana *afim* é um conjunto dos pontos do plano que satisfazem uma equação polinomial em duas variáveis. Comecemos estendendo essa definição:

Definição 1. Seja K um corpo e $F(X, Y, Z)$ um polinômio homogêneo em $K[X, Y, Z]$. Uma *curva algébrica projetiva* (plana) definida sobre K é um conjunto do tipo

$$C = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{P}^2_K \mid F(X, Y, Z) = 0\}.$$

onde $\mathbb{P}^2_K$ denota o *plano projetivo* definido sobre o fecho algébrico de K. O *grau* de C é o grau do polinômio F.

De fato, esta definição pode ser considerada uma extensão da primeira pois toda curva projetiva tem "partes" afins: dividindo a equação da curva projetiva por uma das variáveis (assumindo que seja não nula), obtemos uma nova equação, que descreve uma curva afim.

Uma classe particularmente interessante de curvas algébricas são aquelas cujas *derivadas parciais formais* (ver [1]) do seu polinômio subjacente não se anulam simultaneamente em ponto algum. Isto permite dar uma noção de tangência em seus pontos. A essas curvas chamamos de *não-singulares* ou *suaves*.

Definição 2. Uma *curva elíptica* definida sobre K é uma curva algébrica de grau 3 definida sobre K, não-singular e que possui ao menos um *ponto K-racional*, i.e., um ponto para o qual é possível tomar as coordenadas homogêneas todas em K.

Um importante resultado sobre curvas algébricas conhecido como teorema de Bèzout [1] permite, por meio de uma construção geométrica, munir o conjunto dos pontos racionais de uma curva elíptica de uma operação que o confere uma estrutura de grupo abeliano. Ainda mais, a equação que define uma curva elíptica pode ser transformada através de mudanças convenientes de variável em uma forma simplificada, chamada forma de Weierstrass, o que simplifica consideravelmente os problemas computacionais envolvendo curvas elípticas (ver [3] e [4]).

O resultado principal a ser apresentado é o teorema a seguir, que fornece mais informações a respeito do grupo dos pontos racionais de uma curva elíptica definida sobre um corpo numérico:

Teorema de Mordell-Weil (ver [3] e [4])**.** *O grupo $E(K)$ dos pontos racionais de um curva elíptica E definida sobre um corpo numérico*[1] $K = \mathbb{Q}(\theta)$ *é finitamente gerado.*

[1] Pelo teorema do elemento primitivo (ver [5]), toda extensão algébrica finita $K/\mathbb{Q}$ é simples, i.e. da forma $\mathbb{Q}(\theta)$ com $\theta \in K$. Além disso, podemos supor que θ é um inteiro algébrico (ver [5]).

Em particular, quando E é definida sobre $\mathbb{Q}$, $E(\mathbb{Q})$ é finitamente gerado. Este resultado, historicamente conhecido como Teorema de Mordell, é de extrema importância no estudo da aritmética das curvas elípticas, pois pode ser diretamente aplicado na resolução de equações diofantinas de grau 3. Mais precisamente, unindo o teorema a algumas ferramentas algébricas (e.g. teorema fundamental da estrutura de grupos abelianos finitamente gerados) pode-se obter algoritmos que resultam, possivelmente, em soluções dessas equações.

Alguns cálculos simples são suficientes para percebemos como a complexidade das operações aumenta rapidamente em $E(\mathbb{Q})$. Por isso, é desejável utilizar um sistema computacional capaz de operar adequadamente, como o PARI/GP. Durante o desenvolvimento do projeto, isso foi essencial para encontrar exemplos que ilustrassem certos comportamentos característicos acerca da estrutura de $E(\mathbb{Q})$.

Por outro lado, o desenvolvimento de ferramentas embarcadas ao PARI depende de um avanço teórico. Por exemplo, durante a pesquisa, não foi encontrado na literatura um método ou algoritmo *único* capaz de obter todos os geradores de $E(\mathbb{Q})$ de forma totalmente eficaz. Também não é conhecido nenhum algoritmo semelhante para determinar se uma dada curva cúbica arbitrária possui ou não ponto racional. Por isso, tais funções não existem no PARI/GP. Na apresentação, pretende-se abordar alguns exemplos que ilustram as dificuldades em resolver problemas gerais nesta direção.

Referências

[1] FULTON, W. **Algebraic Curves:** An Introduction to Algebraic Geometry. 2008. *E-Book*. Disponível em: https://users.math.msu.edu/users/magyarp/Math419H/Fulton-Alg-Curves.pdf. Acesso em 26/08/2026.

[2] PARI/GP Home. Disponível em: https://pari.math.u-bordeaux.fr/. Acesso em: 03/09/2026.

[3] SILVERMAN, J; TATE, J. **Rational Points on Elliptic Curves**. Suíça: Springer, 2015.

[4] SILVERMAN, J. **The Arithmetic of Elliptic Curves**. 2. ed. Nova Iorque: Springer, 2009.

[5] STEWART, I; TALL, D. **Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem**. 5 ed. Boca Raton: CRC Press, 2025.

[6] WILES, A. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. **Annals of Mathematics**. Princeton, v. 141, n. 3 p. 443-551, maio 1995. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/2118559?origin=crossref. Acesso em 28/04/2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Otimização

Comissão Científica:

Em breve!

Banca Avaliadora:

Em breve!

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Análise Comparativa do Desempenho do Método do Gradiente para Problemas de Otimização Irrestrita com Diferentes Métodos de Busca Linear

Gabriel Manhães da Cruz*
gabrielmanhaes@alunos.utfpr.edu.br

Profa. Dra. Priscila Savulski Ferreira De Miranda (Orientador(a)) †
psferreira@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de algoritmos de otimização contínua focados no Método de Cauchy, também conhecido como método de máxima descida. A pesquisa explora a implementação manual de rotinas de busca não linear, comparando a eficiência de métodos de busca exata (Seção Áurea e Bisseção) e inexata (Armijo). Através de simulações em MATLAB, avalia-se o comportamento de convergência de 33 funções-teste do conjunto proposto por Moré, Garbow e Hillstrom [3], correlacionando o esforço computacional com os métodos de busca linear empregados.

Palavras-chave: Otimização Irrestrita, Método de Cauchy, Busca Linear, Condição de Armijo, Seção Áurea.

1. Introdução

O método de máxima descida (Cauchy) busca o mínimo de uma função a partir de um ponto inicial x_0 na direção oposta ao gradiente, $d_k = -\nabla f(x_k)$. O algoritmo segue o procedimento iterativo:

1. Dado um ponto inicial x_0 e tolerância ϵ, calcule a direção de descida $d_k = -\nabla f(x_k)$.
2. Se $||\nabla f(x_k)|| < \epsilon$, o processo cessa; caso contrário, aplica-se a busca linear para transformar o problema multivariável em um unidimensional ao longo da direção, determinando um passo adequado $t_k > 0$.
3. Atualiza-se a posição por $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, retornando ao passo 1.

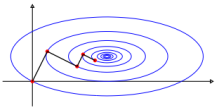


Figura 1: Trajetória das iterações (adaptado de [6]).

A eficiência e o desempenho computacional do método dependem criticamente da estratégia de busca linear, ou seja, do tamanho do passo t_k. Assim, este estudo visa analisar e comparar a robustez, o custo computacional e a trajetória de convergência do Método de Cauchy acoplado a diferentes métodos de busca linear.

Seção Áurea

Busca o mínimo baseando-se na hipótese teórica de unimodalidade local da função ao longo da direção de busca [6]. O intervalo é reduzido assimetricamente pela razão áurea $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, avaliando dois pontos internos (u e v) para descartar subseções que não possuam o minimizador, exigindo apenas uma nova avaliação de $f(x)$ por iteração.

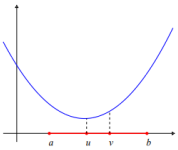


Figura 2: Redução do intervalo na Seção Áurea (adaptado de [6]).

Bisseção

O método baseia-se no Teorema do Valor Intermediário a fim de encontrar a raiz da seguinte derivada direcional:

$$\phi'(t) = \nabla f(x_k + td_k)^T d_k = 0. \tag{1}$$

Como a derivada no ponto inicial x_k é sempre negativa ($\phi'(0) < 0$), uma vez que a direção é dada por $d_k = -\nabla f(x_k)$, o método exige um intervalo inicial $[a, b]$ onde ocorra mudança de sinal ($\phi'(a)\phi'(b) < 0$).

Caso a derivada em b também seja negativa, o limite b é expandido iterativamente até cercar o mínimo. Uma vez estabelecido o intervalo válido, o método divide repetidamente o intervalo ao meio, testando o sinal da derivada no ponto médio, até que o tamanho do intervalo seja menor que a tolerância ϵ_p, e o ponto médio final é então adotado como o passo t.

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
†Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Condição de Armijo

Este método se baseia em uma redução suficiente da função ao longo desta direção e não na minimização exata como as duas outras buscas. Para tanto, é exigido que o tamanho do passo encontrado t forneça uma redução suficiente, de acordo com a seguinte condição :

$$f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \eta t \nabla f(x_k)^T d_k.$$

Com $\eta \in (0, 1)$, a cada iteração dessa subrotina o tamanho do passo é reduzido por um fator α.

Resultados Principais

A eficiência nos 33 problemas da coleção MGH [3] foi comparada usando o Perfil de Desempenho de Dolan e Moré (2002) com base no tempo de CPU. Os testes numéricos foram executados no software MATLAB R2025a [5] em um processador Intel(R) Core(TM) i7-1165G7 com 8 GB de RAM. A métrica $\rho_s(\tau)$ indica a fração de problemas resolvidos pelo método s num tempo até τ vezes o do algoritmo mais rápido:

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{N_p} \text{size}\{p \in \mathcal{P} : r_{p,s} \leq \tau\}$$

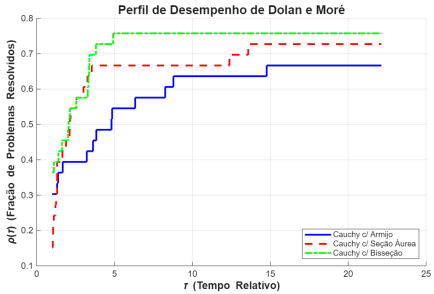


Figura 3: Análise de Desempenho (Perfil gerado no ambiente MATLAB).

Nesse trabalho foram considerados os seguintes parametros:
Cauchy: $\epsilon = 10^{-5}$ e um limite máximo de 10^5 iterações globais.
Seção aurea: $\epsilon_p = 10^{-6}$ e limite de 10^5 iterações internas.
Bisseção: $\epsilon_p = 10^{-6}$ e limite de 10^5 iterações, com limite de expansão de 10^5 passos.
Condição de armijo: $\alpha = 0.5$, $\eta = 10^{-4}$ e limite de 50 iterações internas.
O perfil de desempenho revelou que os algoritmos dependem fortemente da escolha dos parâmetros. O método da bisseção para esses parâmetros adotados se mostrou o mais rápido e mais eficiente, O uso da tolerância de 10^{-6} nos intervalos das buscas exatas foi o que ajudou a resolver mais problemas com a bisseção. Dentre os 6 que não convergiram com nenhum método, o problema de Watson foi o que deu mais trabalho, exigindo muito tempo de processamento. Por sua vez, o Método de Cauchy se mostrou simples e fácil de aplicar. Futuramente, a ideia é conseguir usar essas técnicas de otimização em problemas de física.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] IZMAILOV, Alexey F.; SOLODOV, Mikhail V. *Otimização, Volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[2] LUENBERGER, David G.; YE, Yinyu. *Linear and Nonlinear Programming*. 4. ed. Springer, 2016.

[3] MORÉ, Jorge J.; GARBOW, Burton S.; HILLSTROM, Kenneth E. Testing Unconstrained Optimization Software. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 7, n. 1, p. 17–41, 1981.

[4] NOCEDAL, Jorge; WRIGHT, Stephen J. *Numerical Optimization*. 2. ed. Springer-Verlag, 2006.

[5] PART-ENANDER, Eva; SJÖBERG, Anders; MELIN, Bo; ISAKSSON, Per. *The MATLAB Handbook*. Addison-Wesley, 1996.

[6] RIBEIRO, Ademir A.; KARAS, Elizabeth W. *Um Curso de Otimização*. v. 1. Editora UFPR, 2010.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Cálculo Variacional: Condição Necessária e Suficiente para caracterização da Ciclóide no Problema da Braquistócrona

Carlos Eduardo Dias*
carlosdias@alunos.utfpr.edu.br

Profa. Dra. Priscila Savulski Ferreira De Miranda (Orientador(a))†
psferreira@utfpr.edu.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

O problema da Braquistócrona, proposto por Johann Bernoulli em 1696, questiona qual curva, em um plano vertical unindo dois pontos não alinhados horizontal nem verticalmente, permite que uma partícula sujeita apenas à gravidade percorra o trajeto no menor tempo possível. Historicamente, sua resolução analítica marcou a transição do cálculo diferencial clássico voltado à busca de extremos escalares de funções fixas para o Cálculo das Variações, disciplina que investiga extremos de funcionais definidos sobre famílias inteiras de curvas, consolidando posteriormente o Princípio da Mínima Ação na Mecânica Analítica. Embora soluções geométricas tenham sido apresentadas já em 1696, o formalismo variacional propriamente dito só foi sistematizado décadas mais tarde por Euler, oferecendo um caminho analítico distinto e mais geral. Este trabalho retoma o problema da Braquistócrona sob a ótica estritamente variacional: a partir da modelagem cinemática do tempo de percurso como um funcional integral e da aplicação da Equação de Euler, demonstra-se analiticamente que a curva extremal coincide com um arco de ciclóide. Em seguida, para classificar rigorosamente essa extremal como um minimizador forte, complementa-se a análise verificando as condições de segunda variação através do critério de Legendre e do Teorema de Jacobi., recorrendo à Condição de Legendre que exige a não negatividade da segunda derivada parcial do integrando em relação a y' e ao Teorema de Jacobi, como critério analítico complementar.

Palavras-chave: Braquistócrona; Cálculo das Variações; Ciclóide; Otimização; Mecânica Analítica..

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
†Universidade Tecnológica Federal do Paraná

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

O termo Braquistócrona deriva do grego *brachistos* (o mais curto) e *chronos* (tempo), designando o problema proposto por Johann Bernoulli em junho de 1696 (Bernoulli, 1696). O desafio consistia em determinar, entre as infinitas curvas planas que unem dois pontos não alinhados horizontal nem verticalmente, aquela que minimiza o tempo de descida de uma partícula sujeita exclusivamente à gravidade. Bernoulli lançou o problema como teste à comunidade científica de sua época, e soluções independentes foram apresentadas nos meses seguintes por Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Jakob Bernoulli, todas demonstrando geometricamente que a curva ótima é um arco de ciclóide. Até então, o cálculo diferencial recém-criado limitava-se à busca de pontos extremos isolados de funções fixas. O problema da Braquistócrona exigiu um raciocínio radicalmente distinto: o objeto da otimização deixou de ser um valor escalar associado a uma função para tornar-se a própria curva, escolhida dentro de uma família infinita de trajetórias possíveis. Essa necessidade impulsionou o nascimento de uma área inteiramente nova da Matemática, batizada posteriormente por Euler de Cálculo das Variações (Eves, 2011). Para a Física, as implicações foram igualmente profundas: a constatação de que a natureza parece operar sob um princípio de economia, escolhendo trajetórias que otimizam grandezas físicas, pavimentou a consolidação do Princípio da Mínima Ação e a transição da mecânica vetorial newtoniana para o formalismo analítico de Lagrange e Hamilton (Goldstein; Poole; Safko, 2002). Paralelamente, a ciclóide, curva batizada por Galileu Galilei em 1599 já era conhecida geometricamente como a trajetória descrita por um ponto fixo da borda de uma circunferência de raio a que rola, sem deslizar, sobre uma reta, admitindo as equações paramétricas

$$x(\theta) = a(\theta - \sin\theta) \quad y(\theta) = a(1 - \cos\theta), \tag{1}$$

sendo θ o ângulo de rotação da circunferência. Este trabalho retoma o problema da Braquistócrona sob a ótica estritamente variacional: a partir da modelagem cinemática do tempo de percurso como um funcional integral e da aplicação da Equação de Euler, apresenta-se analiticamente, na seção seguinte, que a curva extremal coincide com o arco de ciclóide, complementando-se a análise com os critérios de Legendre e Jacobi para a caracterização de um mínimo forte.

Resultados Principais

De acordo com a cinemática, a velocidade v é dada por $v = dS/dt$ e S o deslocamento. Pela conservação de energia mecânica, sabendo que no ponto inicial P a partícula sai do repouso, temos que a velocidade pode ser escrita da forma $v = \sqrt{2gy}$ (Thornton; Marion, 2011) sendo g a gravidade e y a distância vertical dos dois pontos. Agora, para encontrarmos o nosso elemento de arco, utilizamos a relação $dS = \sqrt{(x')^2 + 1}dy$, sendo $x' = dx/dy$. Substituindo na nossa equação do tempo, obtemos o seguinte funcional integral:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_P^Q \sqrt{\frac{(x')^2 + 1}{y}} dy. \tag{2}$$

Deste modo, vemos que o nosso tempo t é um funcional da forma $f(x, x', y)$. Inicialmente vamos definir um funcional J genérico da forma:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx. \tag{3}$$

Para encontrarmos a curva que extremiza esse funcional, ou seja, a nossa curva extremal, aplicamos o Lema Fundamental do Cálculo das Variações, que resulta na Equação de Euler (Gelfand; Fomin, 1963; Lemos, 2000), dada por: (Gelfrand; Fomin, 1963; Lemos, 2000), dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{4}$$

Como o nosso funcional do tempo não depende diretamente de x, temos que $\partial f/\partial x = 0$. Então nos resta que a derivada de f em relação a x' deve ser uma constante. Para facilitar o nosso cálculo, atribuiremos um valor específico para essa constante, sendo $1/(2a)$. Após algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\frac{(x')^2}{[(x')^2+1]y} = \frac{1}{2a} \implies x' = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}. \tag{5}$$

Como x será a integral de x', utilizamos a seguinte substituição trigonométrica para encontrarmos nossa posição: $y = a(1-\cos\theta)$ e $dy = a\sin\theta d\theta$. Substituindo na integral e resolvendo, obtemos por fim as clássicas equações paramétricas do arco de uma ciclóide:

$$x = a[\theta - \sin\theta] + C \quad ; \quad y = a(1-\cos\theta). \tag{6}$$

Com isso, verificamos que esta é a curva que minimiza o tempo de descida. Porém, quando estudamos a otimização, precisamos também provar se a trajetória encontrada é um mínimo ou um máximo forte. Para isso, analisamos a segunda variação $\delta^2 J$ do funcional, obtida por expansão de Taylor.

Escrevendo $\delta^2 J = \int [P(x)(h')^2 + Q(x)h^2]dx$, com $P(x) = \frac{1}{2}F_{y'y'}$, podemos utilizar o Lema de Legendre. Ele estabelece que, para o funcional ser não-negativo, precisamos que $P(x) \geq 0$, o que nos fornece a Condição Forte de Legendre (Elsgoltz, 1969):

$$F_{y'y'} > 0. \tag{7}$$

Contudo, essa condição é apenas necessária. Introduzimos o Teorema de Jacobi (Gelfand; Fomin, 1963). Em termos teóricos, este teorema estabelece que, garantida a Condição de Legendre, uma curva extremal só será um minimizador se o intervalo da trajetória não contiver pontos conjugados ao ponto inicial. Geometricamente, a existência de um ponto conjugado define o momento em que trajetórias extremais vizinhas voltam a cruzar-se, indicando que a curva original deixou de ser o caminho ótimo. Para a família de ciclóides geradas a partir da origem, a Equação de Jacobi revela que um ponto conjugado só ocorre quando a circunferência geradora completa uma volta inteira ($\theta = 2\pi$, atingindo $y = 0$ novamente). Como no problema da Braquistócrona a partícula simplesmente desliza para um destino em cota inferior, o ponto final é alcançado muito antes de $\theta = 2\pi$. Portanto, não há pontos conjugados no trajeto. Em conjunto, a Condição Forte de Legendre e o Teorema de Jacobi consolidam a prova analítica de que o arco de ciclóide constitui, rigorosamente, um minimizador forte.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] BERNOULLI, J. Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur. **Acta Eruditorum**, p. 269, jun. 1696.

[2] ELSGOLTZ, L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**. Moscovo: Editorial Mir, 1969.

[3] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[4] GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. **Calculus of Variations**. New Jersey: Prentice-Hall, 1963.

[5] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3. ed. Boston: Addison Wesley, 2002.

[6] LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2000.

[7] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Criação de Famílias Sintéticas via IPF e Otimização Inteira

Vitória Caroline Blau*
vitoria.blau@grad.ufsc.br

Maria Eduarda Pinheiro (Orientador(a))†
maria.eduarda.pinheiro@ufsc.br

Resumo

Este trabalho apresenta um método para a construção de um dataset sintético representando todos os habitantes de Santa Catarina, com vínculos familiares e características demográficas que reproduzem a estrutura do Censo 2022. Partindo dos responsáveis por domicílio (Ordem = 1) já atribuídos a cada família, o problema consiste em atribuir os demais membros (Ordem ≥ 2) preservando os padrões de coabitação observados no Censo 2010, única amostra com microdados pareados de domicílios disponível. A abordagem combina *Iterative Proportional Fitting* (IPF), para ajustar uma matriz de cardinalidade de tipos demográficos às marginais de 2022 preservando a estrutura de correlação da amostra semente de 2010, com um modelo de otimização inteira mista (MILP) que discretiza a solução do IPF satisfazendo exatamente as marginais.

Palavras-chave: síntese populacional, dados sintéticos, *iterative proportional fitting*, otimização inteira mista, censo demográfico.

Introdução

A construção de uma população semissintética busca gerar, a partir de dados agregados e amostrais, um dataset representando cada indivíduo de uma população com seus vínculos familiares e atributos demográficos. Neste trabalho,o objetivo é criar uma população semissintética de famílias, consistente com as marginais do Censo 2022, para os 7,6 milhões de habitantes e 2,8 milhões de famílias de Santa Catarina. Nosso objetivo é atribuir os demais membros (Ordem ≥ 2) de cada família, respeitando o número de moradores (N_M) e a estrutura de correlação demográfica entre os membros de uma mesma família.

O principal obstáculo é que o Censo 2022 ainda não disponibilizou microdados de domicílios pareados, isto é, não é possível saber diretamente, em 2022, quais

*Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Campus Blumenau. Graduanda. Bolsista ITI-A.
†Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Campus Blumenau. Doutora.

indivíduos coabitam. O Censo 2010 é a última amostra pública com essa informação e é usado como *semente* para estimar os padrões de coabitação, que devem ser preservados ao se atribuir os membros de 2022. Como o ajuste e a expansão desses dados geram matrizes com valores fracionários, resolvemos a atribuição final através de um problema de otimização inteira mista, garantindo que o resultado seja inteiro e represente indivíduos reais.

Resultados Principais

Em etapa anterior, o responsável por cada família (Ordem = 1) já foi incluído no dataset semissintético, a partir das marginais do Censo 2022. O problema que resta é atribuir os demais membros (Ordem ≥ 2). Fixado cada município de Santa Catarina, para cada ordem $k \in \{2, \ldots, 15\}$ a ser atribuída, define-se um conjunto de tipos demográficos T, combinando gênero, raça e uma entre nove faixas etárias, restrito aos tipos presentes no município em 2022. O problema é então reduzido à determinação de uma matriz de cardinalidade $X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{N \times N}$, em que X_{ij} é o número de famílias cujo responsável é do tipo i e cujo k-ésimo membro é do tipo j.

A matriz X deve satisfazer três condições:

- **Consistência marginal de linha:** $\sum_j X_{ij} = R_i$, em que R_i é o número de responsáveis do tipo i em residências com número de moradores maior ou igual a k no município em questão.
- **Consistência marginal de coluna:** $\sum_i X_{ij} = C_j$, em que C_j é a demanda projetada de membros do tipo j. Essa demanda é obtida projetando a estrutura da semente para 2022 através do fator de expansão $FE = T_{resp}/T_{sem}$, onde T_{resp} é o total de resónsáveis de 2022 que demandam um membro de ordem k e T_{sem} é o total de membros de ordem k observados na matriz semente. Caso a demanda projetada exceda o estoque disponível C_j^{est} (indivíduos do tipo j em 2022 ainda sem família), a alocação é limitada ao estoque e o excedente é redistribuído ciclicamente entre os tipos demográficos com maior folga, garantindo equilíbrio total.
- **Preservação da estrutura de correlação:** A distribuição interna da matriz deve respeitar os agrupamentos familiares extraídos do Censo de 2010. O uso desse Censo é necessário para ditar as proporções relativas de convivência: se historicamente responsáveis jovens moram com crianças, o modelo obriga que essa correlação seja preservada na alocação atual.

Observação 1. *Sejam R_i e C_j as marginais de linha e de coluna obtidas pelo procedimento de escalonamento e redistribuição de resíduo descrito acima. Então*

$$\sum_{i=1}^{N} R_i = \sum_{j=1}^{N} C_j.$$

A estrutura de correlação é incorporada por meio de uma matriz semente S, construída emparelhando responsáveis com membros de ordem k em cada domicílio da amostra de 2010, com entradas nulas substituídas por $\varepsilon = 0{,}001$. A matriz X é então obtida ajustando S às marginais (R, C) pelo algoritmo *Iterative Proportional Fitting* (IPF) [1], que alterna ajustes de linha ($f_i = R_i / \sum_j X_{ij}$) e de coluna ($g_j = C_j / \sum_i X_{ij}$).

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

O IPF fornece estimativas precisas, mas produz valores fracionários. A matriz representa uma contagem real de indíviduos e famílias, por isso precisamos de valores inteiros. Portanto, formulamos a discretização como um problema de otimização inteira.

Formula-se então o seguinte problema de otimização inteira mista, cuja função objetivo minimiza a distância absoluta total entre a solução inteira Y e a solução contínua X do IPF:

$$\min_{Y,t} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} t_{ij}$$

sujeito a

$$\sum_j Y_{ij} = R_i, \quad \forall i, \qquad \sum_i Y_{ij} = C_j, \quad \forall j,$$
$$-t_{ij} \le Y_{ij} - X_{ij} \le t_{ij}, \quad \forall i,j, \qquad t_{ij} \ge 0,\ Y_{ij} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \quad \forall i,j,$$

em que t_{ij} são variáveis auxiliares que linearizam $|Y_{ij} - X_{ij}|$. As duas primeiras restrições garantem que as marginais são satisfeitas exatamente na solução inteira, e a minimização assegura que a discretização perturbe o mínimo possível a estrutura de correlação recuperada pelo IPF.

Na prática, minimizar essa distância significa que a solução inteira fica o mais proxima possível das proporç es de coabitação estimadas pela IPF a partir do Censo de 2010.

O método foi implementado na linguagem Julia [3], e o modelo foi resolvido com o solver HiGHS [2]. A partir de Y, cada par (i,j) com $Y_{ij} > 0$ é usado para parear, um a um, responsáveis do tipo i ainda sem dependente de ordem k a membros do tipo j com Ordem = 0, atribuindo-lhes o mesmo ID_Familia do responsável. O procedimento é repetido sequencialmente para $k = 2, \ldots, 6$ e, para famílias com mais de seis membros, estendido para $k = 7, \ldots, 15$.

Referências

[1] DEMING, W. E.; STEPHAN, F. F. On a least squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 11, n. 4, p. 427–444, 1940.

[2] HUANGFU, Q.; HALL, J. A. J. Parallelizing the dual revised simplex method. **Mathematical Programming Computation**, v. 10, n. 1, p. 119–142, 2018.

[3] BEZANSON, J.; EDELMAN, A.; KARPINSKI, S.; SHAH, V. B. Julia: a fresh approach to numerical computing. **SIAM Review**, v. 59, n. 1, p. 65–98, 2017.

[4] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Tabela 9606: População residente, por idade e sexo, segundo a forma de declaração da cor ou raça e a cor ou raça - Resultados do Universo. **Sistema IBGE de Recuperação Automática (SIDRA)**, 2024. Disponível em: `https://sidra.ibge.gov.br/tabela/9606`.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Fadiga cognitiva e ganho acumulado em sessões prolongadas de estudo: modelagem matemática e determinação experimental do limiar de interrupção

Carlos Eduardo Raymond de Paula Ramos*
carloseduardoraymond@gmail.com

Manoel Fernando dos Reis (Orientador(a))†
manoel@cmc.g12.br

Resumo

A organização do estudo em intervalos fixos, como na Técnica Pomodoro, tende a interromper o desempenho em momentos inadequados e desconsidera diferenças individuais de fadiga e recuperação. Este trabalho propõe um modelo matemático para determinar, em uma tarefa específica, o instante em que interromper o estudo tende a produzir maior ganho médio do que continuar a prática. A formulação adapta o Teorema do Valor Marginal, originalmente empregado para otimizar o tempo de exploração de manchas de recursos, a ciclos compostos por estudo e descanso. O acúmulo de fadiga foi descrito pela função exponencial de saturação já consagrada na literatura, e a recuperação durante as pausas, pela atenuação exponencial correspondente. A validação experimental utilizou banco de questões de 355 cartões de História Geral e nove sessões realizadas entre 11 e 24 de agosto de 2026, envolvendo o autor, previamente treinado, e um voluntário adulto não treinado. O desempenho foi acompanhado pela duração dos itens, acurácia e taxa de acertos por minuto. A comparação por AICc favoreceu o modelo com piso comum, estimado em 0,2248 acerto por minuto, ao passo que a recuperação permaneceu indecidida. Para os dados do autor, o procedimento de bisseção não encontrou limiar de interrupção aplicável, indicando que, nas condições testadas, a prescrição contínua superou a divisão em ciclos. Os resultados apoiam prescrições individualizadas e evidenciam a necessidade de ampliar a amostra e modelar pausas variáveis.

Palavras-chave: fadiga cognitiva, teorema do valor marginal, otimização de estudo, modelagem matemática, limiar de interrupção.

*Colégio Militar de Curitiba. Estudante do Ensino Médio.
†Colégio Militar de Curitiba. Mestre em Matemática.

Introdução

A Técnica Pomodoro estabelece, tradicionalmente, blocos de 25 minutos de estudo intercalados por pausas de 5 minutos e, após quatro ciclos, por uma pausa mais longa. Embora seja amplamente utilizada, sua prescrição fixa foi construída de modo empírico e não descreve a variabilidade do ritmo cognitivo entre pessoas e tarefas [5]. A interrupção obrigatória também pode ser ineficiente para atividades curtas ou para situações em que o estudante alcança concentração profunda, além de favorecer a extensão artificial do trabalho até o limite do cronômetro [6].

Diante desse problema, o estudo investiga se é possível modelar matematicamente o instante individual em que uma pausa passa a render mais do que a continuidade da prática. A hipótese central é que o ganho de uma sessão pode ser maximizado quando o tempo de estudo e o descanso são definidos a partir da curva de fadiga do indivíduo, em vez de uma regra temporal universal. Para isso, adapta-se o Teorema do Valor Marginal (TVM) como critério de interrupção: o ciclo deve terminar quando o rendimento instantâneo se iguala ao ganho médio global máximo da sessão [1].

Para formalizar essa hipótese, modela-se a fadiga acumulada como a saturação $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, em que λ representa a taxa constante de fadiga inerente ao indivíduo e à tarefa exercida, e a fadiga residual após uma pausa de duração τ como $R(\tau) = F(t) \cdot e^{-\mu\tau}$, com μ representando a taxa de recuperação cognitiva do participante. Tais expressões, assim como a que descreve o nível de fadiga com que se inicia o ciclo subsequente, seguem a formulação consagrada na ergonomia industrial [3], cuja origem no esforço físico recomenda cautela na transposição ao domínio cognitivo. Admitindo um rendimento inicial máximo r_0 e um piso mínimo C (patamar abaixo do qual o desempenho não cai), o rendimento instantâneo assume a forma $r(t) = C + b(1 - R) \cdot e^{-\lambda t}$, onde b é a parcela de rendimento acima do piso. Dessa estrutura, o limiar ótimo de estudo é obtido por $t^* = \dfrac{1}{\lambda} \cdot ln\left[b \cdot (\frac{1-R}{y-C})\right]$, com y correspondendo ao ganho médio de referência da sessão. Por fim, a circularidade inerente entre y e t é resolvida numericamente pelo método da bisseção.

Resultados Principais

Sendo $S(t) = \int_0^t r(u)\,du$ os acertos acumulados, τ a pausa fixa e $\gamma(t) = \dfrac{S(t)}{t+\tau}$ o ganho médio do ciclo, o critério do valor marginal interrompe o estudo quando $r(t^*) = \gamma(t^*)$, valor denotado por y [1].

A fadiga inicial do ciclo subsequente obedece à expressão $F_{i+1}(t) = R + (1 - R)\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$ [3], em que R é a fadiga residual remanescente da pausa anterior, dado que a recuperação é incompleta. Dessa expressão deduz-se, neste trabalho, a lei de decaimento do rendimento: subtraindo ambos os membros de 1 e fatorando $(1 - R)$,

$$1 - F_{i+1}(t) = (1 - R)\left[1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right] = (1 - R)\, e^{-\lambda t}.$$

Admitindo-se que o rendimento varie linearmente com a fração de capacidade preservada, isto é, $r(t) = C + (r_0 - C)\,[1 - F_{i+1}(t)]$, obtém-se, com $b = r_0 - C$, a lei $r(t) = C + b\,(1 - R)\, e^{-\lambda t}$.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Igualando-o ao valor de corte y e isolando o tempo, chega-se ao limiar:

$$C + b\,(1-R)\,e^{-\lambda t^*} = y \implies e^{-\lambda t^*} = \frac{y-C}{b\,(1-R)} \implies t^* = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{b\,(1-R)}{y-C}\right].$$

A expressão define-se apenas para $y \in (C,\ C+b)$: exigindo a interrupção que $y = r(t^*)$, o limiar só existe se o valor de corte pertencer ao intervalo em que varia o rendimento. Valores não otimizados de $\gamma(t)$ podem, em contrapartida, situar-se abaixo de C, uma vez que a pausa integra o denominador sem produzir acertos. O primeiro bloco, isento de fadiga residual, excede os subsequentes, iguais entre si.

O valor de y, contudo, figura nos dois membros, pois depende do limiar que se busca:

$$y = \frac{S(t^*)}{t^*+\tau} = \frac{C\,t^* + (\frac{b}{\lambda})(1-R)\left(1-e^{-\lambda t^*}\right)}{t^*+\tau}, \qquad R = \left[1-\frac{y-C}{b}\right]e^{-\mu\tau},$$

decorrendo a segunda igualdade de $y = C + b\,(1-F)$ no instante da interrupção. Na determinação de y desconsidera-se a maior extensão do primeiro ciclo, pois computá-la à parte faria o valor de corte depender da duração total da sessão; a simplificação aproxima-a por seu regime estacionário, com viés decrescente em sua duração.

A circularidade resolve-se por bisseção: arbitra-se y no intervalo, obtêm-se t^* e R, recompõe-se o ganho médio e toma-se $g(y)$ como a diferença entre este e o arbitrado, retendo-se a metade que o sinal indica até a convergência. Sendo g contínua, o Teorema do Valor Intermediário assegura raiz quando há troca de sinal nos extremos; não havendo, o limiar não existe e nenhuma partição em ciclos supera o estudo contínuo.

Para avaliar empiricamente as previsões desse modelo, foram realizadas nove sessões entre 11 e 24 de agosto de 2026, cinco do autor e quatro de um voluntário adulto não treinado, totalizando 371 itens válidos em cartões de História Geral [2]. Descartou-se o aquecimento inicial [7] e tomou-se o rendimento pelo *rate correct score* [8]. A comparação das especificações por AICc favoreceu o modelo com piso comum às sessões, que apresentou o menor AICc e concentrou 81,9% do peso acumulado entre os modelos considerados. Contra a hipótese de piso nulo, o teste devolveu $p = 0{,}0304$, ao passo que a recuperação permanece indecidida.

Embora o piso comum prevaleça, adotou-se por simplificação a calibração sobre a sessão contínua do autor de 11 de agosto, na qual a duração dos itens cresceu de modo estatisticamente significativo, ao contrário das demais. Dela procedem $C = 0{,}2602$ e $b = 0{,}1931$ acerto por minuto e $\lambda = 0{,}0513$ min^{-1}, ao passo que $\mu = 0{,}0308$ min^{-1} provém da única sessão com pausas desiguais, sem a qual esse parâmetro não se identifica. Com tais valores, g não troca de sinal no intervalo e o limiar não existe, pois cada minuto de pausa devolve no máximo $\frac{b\mu}{\lambda} = 0{,}116$ acerto por minuto e custa o piso $C = 0{,}260$ que se colheria continuando. A medição corrobora a previsão: as sessões cicladas renderam 19,3% e 18,5% menos que a contínua, de sorte que o prescrito é a sessão contínua e que prescrições uniformes de pausa carecem de fundamento individual [4].

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] CHARNOV, Eric L. Optimal foraging, the marginal value theorem. **Theoretical Population Biology**, [S.l.], v. 9, n. 2, p. 129-136, 1976.

[2] FREITAS NETO, José Alves de; TASINAFO, Célio Ricardo. **História geral e do Brasil:** volume único. 3. ed. São Paulo: Harbra, 2016. 980 p.

[3] JABER, Mohamad Y.; GIVI, Zahra S.; NEUMANN, W. Patrick. Incorporating human fatigue and recovery into the learning-forgetting process. **Applied Mathematical Modelling**, [S.l.], v. 37, n. 12-13, p. 7287-7299, 2013.

[4] NEURABLE. Why Pomodoro Can Lead to Inefficiency: Ignoring Cognitive Fatigue. **Neural Science and Productivity Blog**, Boston, dez. 2024. Disponível em: Neurable Insights. Acesso em: 30 ago. 2026.

[5] SANTOS, J. M. et al. A Comparative Study Between Pomodoro and Flowtime Techniques Among College Students. **International Journal of Multidisciplinary: Applied Business and Education Research**, [S.l.], v. 6, n. 3, p. 102-115, 2025. Disponível em: IJMABER Journal. Acesso em: 30 ago. 2026.

[6] SINGH, Akhilesh. Day 41: The Pomodoro Technique: Pros and Cons. **LinkedIn Enterprise & Productivity Analysis**, [S.l.], maio 2024. Disponível em: LinkedIn Articles. Acesso em: 30 ago. 2026.

[7] WEXLER, B.E. et al. Cognitive priming and cognitive training: immediate and far transfer to academic skills in children. **Scientific Reports**, [S.l.], v. 6, art. 32859, 2016. DOI: 10.1038/srep32859. Disponível em: https://www.nature.com/articles/srep32859. Acesso em: 31 ago. 2026.

[8] WOLTZ, Dan J.; WAS, Christopher A. Availability of related long-term memory during and after attention focus in working memory. **Memory & Cognition**, [S.l.], v. 34, n. 3, p. 668-684, 2006.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Otimização Contínua Aplicada à Transferência de Calor em Recipientes

Sabrina Morgan*
sabrinamorgan@alunos.utfpr.edu.br

Prof$_a$ Dr$_a$ Priscila Savulski Ferreira de Miranda†
psferreira@utfpr.edu.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

Este trabalho de Iniciação Científica consiste na formalização matemática, reconstituição analítica e análise de sensibilidade do modelo de otimização térmica em recipientes proposto no artigo "A busca do copo ideal: um estudo de otimização em transferência de calor"de Pellegrini, que aborda a formulação e resolução de um problema de otimização não linear contínua, voltado à minimização da transferência de calor entre um líquido gelado e o ambiente em recipientes. Fisicamente, a conservação da temperatura em bebidas frias durante o consumo é governada pelo aquecimento por convecção térmica. Como os parâmetros termofísicos do fluido são constantes, a minimização do ganho térmico reduz-se à minimização da razão entre a área total exposta do recipiente e o volume contido de líquido. Modelando o recipiente como um sólido de revolução gerado por uma curva em função da altura, a busca pela geometria ótima durante o consumo traduz-se na condição de ponto estacionário da razão área-volume em relação à altura do líquido. Essa condição estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre a área e o volume, conduzindo a uma equação diferencial ordinária separável. Como resultado do artigo, por tentativa e erro, foram propostas três padronizações, gerando uma solução analítica exata para a curva geratriz do recipiente para cada padrão. A imposição de uma restrição geométrica garante que a taxa de variação do raio ao longo da altura seja estritamente positiva, assegurando um perfil estritamente crescente e eliminando soluções associadas ao máximo de troca térmica. Analisando recipientes de vinte centímetros de altura delimitou o domínio de parâmetros fisicamente realizáveis.

Palavras-chave: Otimização não linear; Modelagem matemática; Transferência de calor; Geometria.

*UTFPR. Graduanda em licenciatura em física. iniciação científica voluntária
†UTFPR. Doutora em Matemática.

Introdução e Modelagem Matemática

A determinação de geometrias eficientes para o armazenamento de bebidas frias constitui um problema clássico de interface entre a física e a otimização matemática. A taxa de variação da temperatura do líquido no tempo é descrita pela equação diferencial de resfriamento/aquecimento por convecção:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{h_{\text{cv}}}{\rho c_p}\left(\frac{A_{\text{tot}}}{V}\right)(T_{\text{amb}} - T) \tag{1}$$

sendo h_{cv} o coeficiente de convecção, ρ a densidade, c_p o calor específico e $(T_{\text{amb}} - T) > 0$ a diferença de temperatura. Para parâmetros constantes, a taxa de aquecimento é diretamente proporcional à razão $f = \frac{A_{\text{tot}}}{V}$. Considerando um recipiente de revolução com fundo isolado e altura H, a geometria é descrita pelo raio $r(h)$ para $h \in [0, H]$. No fundo ($h = 0$), $r(0) = R$ (raio do fundo), e na borda superior ($h = H$), $r(H) = R_b$ (raio da boca). A área lateral A_{lat} e o volume V são dadas por:

$$A_{\text{lat}}(h) = 2\pi \int_0^h r(y)\sqrt{1 + [r'(y)]^2}\, dy, \quad V(h) = \pi \int_0^h [r(y)]^2\, dy \tag{2}$$

A minimização de $f = \frac{A_{\text{tot}}}{V}$ exige a condição de ponto estacionário em relação à altura do líquido:

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{A_{\text{tot}}}{V}\right) = 0 \implies A_{\text{tot}} = C_1 V \tag{3}$$

em que $C_1 > 0$ é a constante dimensional de integração.

Desenvolvimento e Solução Analítica

Substituindo as definições integrais na relação $A_{\text{tot}} = C_1 V$ e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo ao derivar em relação a h, obtém-se a EDO separável:

$$\sqrt{1 + (r')^2} = C_2 r - r' \quad \left(C_2 = \frac{C_1}{2}\right) \tag{4}$$

Elevando ao quadrado e separando as variáveis, chega-se à solução analítica exata para a curva geratriz ótima:

$$r(h) = \frac{1}{C_1}\sqrt{4 + (C_1^2 R^2 - 4)e^{C_1 h/2}} \tag{5}$$

Para analisar a estabilidade do ponto crítico sem recorrer à Hessiana de A_{tot}/V, avalia-se o sinal da derivada $r'(h) = \frac{C_1 r}{4} - \frac{1}{C_1 r}$. Para evitar $r'(h) < 0$ (que levaria ao máximo de troca térmica), impõe-se a restrição de monotonicidade $C_1 R > 2$, garantindo $r'(h) > 0$ e um perfil estritamente crescente.

Resultados Principais

O estudo de iniciação científica teve como resultado a realização da reconstituição analítica e a formalização matemática do modelo de otimização de transferência de calor proposto por Pellegrini (2019). A análise de sensibilidade para $H = 20cm$ evidenciou que pequenos incrementos em C_1 (de $0{,}677cm^{-1}$ para $0{,}697cm^{-1}$) aumentam o raio da boca de $15{,}4cm$ para $28{,}5cm$ e a capacidade de $2{,}68L$ para $7{,}77L$, delimitando a faixa de parâmetros fisicamente viáveis para fabricação.

VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

[1] INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.** Local: Rio de Janeiro, LTC Editora, 2014.

[2] LIMA, E. L.**Análise Real - Funções de Uma Variável.** IMPA: Coleção Matemática Universitária, 2009.

[3] PELLEGRINI, C. C.**A busca pelo copo ideal: um estudo de otimização em transferência de calor.** Revista Brasileira de Ensino de Física, Sociedade Brasileira de Física, volume 41,3. páginas 1–12, 2019.

[4] RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Um Curso de Otimização.** Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 2010.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Projetos Matemáticos

Comissão Científica:

Em breve!

Banca Avaliadora:

Em breve!

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

2º PG PLAY - USO DE JOGOS DE TABULEIRO PARA O ENGAJAMENTO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Jamilly Yasmin Borgato Lodovirge[1], Jean Gabriel Warenhuk dos Santos[2], Peterson Luiz do Nascimento da Silva[3]

25006501@uepg.br, 25012101@uepg.br, 25010501@uepg.br

Marcos Teixeira Alves (Orientador)[4]
mtalves@uepg.br

Margarete Aparecida dos Santos (Coorientadora)[5]
margaas@uepg.br

Resumo

É notório desinteresse de estudantes da educação básica em relação à disciplina de matemática, em grande medida devido à escassez de ações voltadas à motivação para os estudos. Partindo desse cenário e da necessidade de uma ação pedagógica voltada para o ensino da matemática, surge o 2º PG Play - Campeonato de Jogos Matemáticos da cidade de Ponta Grossa. Trata-se de uma ação extensionista vinculada ao projeto LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação, que consiste em uma competição que visa incentivar o raciocínio lógico-matemático através de jogos de tabuleiro. O 2º PG Play envolveu estudantes das escolas públicas e privadas da cidade de Ponta Grossa, abrangendo o Ensino Fundamental do 1º ao 9º ano. O evento foi realizado em duas etapas: Seletivas Internas nas escolas participantes, e a segunda, denominada Grande Final, realizada na Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). O evento demonstrou que o uso de jogos proporciona ludicidade, o desenvolvimento do pensamento matemático e a troca de experiências que potencializam a aprendizagem.

Palavras-chave: Jogos matemáticos, Ludicidade, Pensamento matemático, Educação matemática.

Introdução

É amplamente reconhecido que o ensino de Matemática enfrenta elevados índices de desinteresse com impacto direto no desempenho escolar na educação básica. Percebe-se frequentemente a falta de ações que busquem mostrar aos

[1]Voluntária do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação
[2]Bolsista do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação
[3]Bolsista do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação
[4]Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Professor do Departamento de Matemática e Estatística e coordenador do projeto LeMA
[5]Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Professora do Departamento de Matemática e Estatística e supervisora no projeto LeMA

VERSÃO PROVISÓRIA

estudantes como a matemática está presente no cotidiano, tampouco propostas de ensino que estimulem a curiosidade e o interesse no estudo da disciplina.

Desde a antiguidade, o uso de jogos de tabuleiro apresentou características de ensino com aponta Vergara e Martínez (2020), sendo utilizados no desenvolvimento e a capacitação cognitiva para resolução de problemas, além do aprimoramento do raciocínio lógico, da coordenação viso-motora e do pensamento estratégico. Essas características tornam os jogos importantes recursos para o engajamento estudantil, com grande destaque no contexto de ensino da Matemática..

Neste cenário do uso de jogos no ensino, surge o 2º PG Play - Campeonato de Jogos Matemáticos da cidade de Ponta Grossa como uma ação extensionista vinculado ao projeto: LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Tem como objetivo principal estimular o uso de jogos no ensino de Matemática, potencializando habilidades de resolução de problemas, além de estimular o desenvolvimento de aspectos do pensamento matemático, como processos de levantamento de hipóteses, testagem de conjecturas, análise, síntese, abstração e generalização.

Resultados Principais

O 2º PG Play é composto de 4 níveis: Level One (1º ao 3º ano do Ensino Fundamental), Level Two (4º a 5º ano do Ensino Fundamental), Level Three (6º a 7º ano do Ensino Fundamental) e Level Four (8º a 9º ano do Ensino Fundamental) e foi organizado em duas etapas: Seletivas Internas e Grande Final. O Quadro 1 apresenta os jogos de tabuleiro usados nesta segunda edição do PG Play.

Quadro 1 - Jogos de tabuleiro do 2º PG Play

Level	Jogo de tabuleiro
One	Bobail
Two	Pontu
Three	Pogo
Four	Gekitai

Fonte: Disponível em: https://sites.google.com/uepg.br/lemauepg/pg-play/jogos Acesso em: 13 ago. 2026.

Inicialmente, os professores receberam uma formação sobre os jogos utilizados, realizaram a leitura e aprovaram o edital do campeonato e puderam fazer simulações de jogadas. Já nas escolas, os alunos construíram os jogos de tabuleiros, inclusive foram fortemente incentivados a levá-los para casa para jogar com pais, parentes e amigos. Nas Seletivas Internas, cada escola selecionou até 4 alunos para a Grande Final realizada no dia 20/06 nas dependências da UEPG. Esta etapa proporcionou uma experiência rica aos estudantes, marcada pelo protagonismo na elaboração de estratégias, assim como o favorecimento da criatividade, da competição sadia e das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender, alguns registros estão ilustrados na Figura 1.

Figura 1 - Construção dos jogos e realização de partidas nas Seletivas Internas

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA



Fonte: Dados do projeto (2026)

A Grande Final consistiu na etapa em que os estudantes representantes de cada uma das seis escolas inscritas no campeonato disputaram entre si as premiações de 1º, 2º e 3º lugar. A etapa apresentou-se como um espaço de interação com estudantes de diferentes escolas, ao mesmo tempo em que pais e professores puderam acompanhar e torcer, como ilustra a Figura 2.

Figura 2 - Registros da Grande Final



Fonte: Dados do projeto (2026)

O engajamento gerado pelo 2º PG Play evidencia que jogos de tabuleiro são um recurso viável quando o assunto é potencializar a aprendizagem de Matemática, como afirma Oliveira (2024), ao destacar que os estudantes ficam mais ativos e participantes quando interagem com atividades lúdicas. Ademais, o uso dos jogos faz com que os alunos tenham maior autonomia para aprender, tornando-se assim protagonistas de sua aprendizagem, perspectiva essa que condiz com a defesa de Freire (1996). Os relatos coletados ao final do evento de alunos, pais e professores, apresentados no Quadro 2, apontam maior interesse em relação ao uso de jogos de tabuleiro, destacando a importância deste recurso na aprendizagem da matemática.

Quadro 2 - Relatos coletados dos professores após as Grande Final

Participante	Contribuição dos Jogos Matemáticos
P1	Os jogos fortalecem o que o estudante já aprendeu e auxiliam nas dificuldades
P2	O uso de estratégias vai contribuir para a resolução de problemas
P3	Ajuda na participação dos estudantes, e desperta o interesse pela disciplina

Fonte: Dados do projeto LeMA (2026).

Para além das contribuições no âmbito da educação básica, o PG Play potencializa práticas inovadoras na formação inicial de professores de matemática da UEPG, dada sua participação efetiva na preparação e nas experiências com os jogos selecionados e atuação como juízes durante a Grande Final.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

VERGARA, Carmen Rosa Giraldo; MARTÍNEZ, Fabio Enrique Brochero. **Matemática Recreativa**: uma proposta para a sala de aula. Rio de Janeiro: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica, 2020.

OLIVEIRA, Saulo Macedo de. Os jogos matemáticos no ensino e aprendizagem na Educação Básica. **Ensino & Pesquisa**, União da Vitória, v. 22, n. 2, p. 783-797, abr./ago. 2024. Disponível em: Os Jogos matemáticos na Educação Básica: um mapeamento de pesquisas | Ensino & Pesquisa. Acesso em: 09 Ago. 2026. https://doi.org/10.33871/23594381.2024.22.2.8595.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VERSÃO PROVISÓRIA

A Matemática que Acolhe: uma experiência de extensão com crianças em acolhimento institucional

Augusto Henrique da Costa[1], Camila Rios, Mariah Fragallo Ihlenfeldt, Sibeli da Rosa da Rocha[2]

augustocosta.math@gmail.com, camilarios0905@gmail.com, marih.fragallo@gmail.com, sibarocha02@gmail.com

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)[3]
elenilton@ufpr.br

Resumo

A relação dos estudantes com matemática pode ser marcada por sentimentos de medo, insegurança e afastamento por parte dos estudantes, especialmente quando a disciplina de matemática é associada à mecanização. É nesse contexto que se insere o projeto A Matemática que Acolhe vinculado à disciplina Atividades de Extensão Universitária 1. A disciplina contou com a participação de sete estudantes e teve como foco o desenvolvimento de atividades envolvendo matemática e crianças em acolhimento institucional. A partir dessa experiência, este trabalho tem como objetivo relatar e refletir sobre o desenvolvimento do projeto A Matemática que Acolhe, destacando as atividades realizadas durante essa experiência extensionista. A experiência desenvolvida possibilitou aos participantes vivenciar diferentes etapas de um projeto de extensão, desde sua idealização e elaboração coletiva até o planejamento e a aplicação das oficinas nas casas de acolhimento.

Palavras-chave: educação matemática, projeto de extensão, inclusão social, casas de acolhimento, crianças.

Introdução

A relação dos estudantes com matemática pode ser marcada por sentimentos de medo, insegurança e afastamento por parte dos estudantes, especialmente quando a disciplina de matemática é associada à mecanização e à necessidade de entendimento de conteúdos "básicos" para a continuidade no processo de aprendizagem (Menezes; Lanuti, 2020). Nesse sentido, a utilização de propostas de atividades lúdicas com diferentes recursos pode se constituir como uma

[1]Bolsista CNPq de Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC)

[2]Bolsista de mestrado da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

[3]Universidade de São Paulo (USP). Doutor em Educação e professor adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

VERSÃO PROVISÓRIA

oportunidade de aproximar os estudantes de conhecimentos matemáticos, pois pode atuar como uma ferramenta pedagógica capaz de aproximar o conhecimento da realidade dos sujeitos, favorecendo a construção de sentidos e significados para além da mera aplicação de fórmulas ou procedimentos.

É nesse contexto que se insere o projeto A Matemática que Acolhe vinculado à disciplina Atividades de Extensão Universitária 1 ministrada pelo Prof. Elenilton Vieira Godoy durante o segundo semestre de 2025 (2025.2) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná. A disciplina contou com a participação de sete estudantes e teve como foco o desenvolvimento de atividades envolvendo matemática e crianças em acolhimento institucional. A proposta surgiu a partir da orientação de que a turma elaborasse um projeto extensionista voltado à comunidade próxima à universidade.

A partir dessa experiência, este trabalho tem como objetivo relatar e refletir sobre o desenvolvimento do projeto A Matemática que Acolhe, destacando as atividades realizadas durante essa experiência extensionista.

Resultados

A primeira parte da experiência extensionista do projeto foi desenvolvida na Casa de Acolhimento 1, que atende crianças em situação de vulnerabilidade. Foram realizadas cinco visitas, sendo a primeira destinada ao reconhecimento do espaço físico e as quatro seguintes à realização de oficinas quinzenais. O grupo era composto por aproximadamente seis meninos, entre 7 e 11 anos. A participação exclusivamente masculina ocorreu por uma orientação da instituição, considerando que o grupo de voluntários também era composto por estudantes homens e que, por esse motivo, não era recomendado o contato com as meninas acolhidas.

O primeiro contato com as crianças foi marcado por timidez e insegurança, tornando a construção de vínculos um aspecto importante da experiência. Para favorecer essa aproximação, foi realizada uma oficina de produção de tintas naturais, utilizando cola para dar liga, açafrão em pó, pó de beterraba, corante azul e carvão triturado. Durante a produção, as conversas e interações possibilitaram uma aproximação gradual, criando maior confiança para os encontros seguintes.

Com o vínculo estabelecido, foram realizadas a pintura e a montagem de ábacos abertos. Durante essa atividade, surgiu um atrito entre os meninos relacionado à propriedade das argolinhas pintadas no encontro anterior, situação contornada com o apoio da psicóloga da instituição. Posteriormente, foi apresentado o ábaco e seu funcionamento, seguido da brincadeira “Nunca Dez”. A atividade despertou grande engajamento, especialmente pelo caráter competitivo do jogo, proporcionando uma experiência lúdica de aprendizagem matemática. Para encerrar as oficinas, foi realizada uma contação de histórias sobre o surgimento do ábaco, retomando de forma contextualizada o instrumento trabalhado ao longo dos encontros.

Na segunda Casa de Acolhimento visitada, ocorreram dois momentos, organizados de acordo com a disponibilidade da instituição, a fim de não interferir na rotina das crianças e adolescentes. As duas visitas ocorreram com uma semana de diferença, ambas ao sábado pela manhã, após o café das crianças e antes do seu horário de almoço.

Durante o primeiro encontro, houve uma breve introdução sobre a história do ábaco e a oficina de criação de tintas naturais, momento em que foi possível estabelecer uma aproximação com as crianças sem a introdução imediata de conceitos matemáticos. Assim, após o período inicial de conversa, foram

VERSÃO PROVISÓRIA

apresentados diferentes materiais para a confecção das tintas e, em conjunto, ocorreu a criação de diferentes pigmentos e misturas escolhidos pelas crianças.

No decorrer da oficina, foi perceptível que algumas ideias do planejamento inicial necessitariam de adaptação, como, por exemplo, a mudança das argolas do ábaco que, anteriormente, seriam confeccionadas com revistas e jornais reutilizados. Por conta do maior número de crianças e adolescentes, houve a alteração para a construção de argolas a partir de uma massa de cola e de amido. Mesmo com o imprevisto, a mudança se mostrou oportuna, uma vez que foi possível ampliar o caráter de manipulação concreta do material, o que pareceu agradar às crianças.

Desse modo, após a criação das argolas, ocorreu o momento de pintura e de escolha da base do ábaco, formada a partir de caixas de ovos cortadas. Cada aluno escolheu e pintou sua própria caixa e suas respectivas argolas. Após a finalização da atividade, todos os materiais foram deixados para secar em um ambiente fechado da instituição. Por fim, foi explicado para as crianças que, no próximo encontro, o ábaco seria utilizado para "fazer matemática", expressão que as crianças mencionaram durante a oficina.

No segundo e último encontro, após o momento inicial de conversa, as crianças foram orientadas para montarem seus ábacos e, após isso, se iniciaria a explicação do uso do ábaco com exemplos que as próprias crianças sugeriram. Para finalizar a oficina, iniciou-se um momento de contação de histórias em que um dos licenciandos presentes começou a apresentar a ideia de contagem a partir dos elementos da história. No decorrer dessa atividade, as crianças eram estimuladas a responder, sempre com o auxílio do ábaco, problemas presentes na história que envolviam a matematização. Ao final, ocorreu o momento de despedida, em que as crianças expressaram a sua relação com a atividade através de desenhos, textos e pinturas.

Considerações Finais

A experiência desenvolvida possibilitou aos participantes vivenciar diferentes etapas de um projeto de extensão, desde sua idealização e elaboração coletiva até o planejamento e a aplicação das oficinas nas casas de acolhimento. A vivência possibilitou compreender que a atuação extensionista não se limita à execução das atividades previamente planejadas, exigindo sensibilidade para lidar com as relações estabelecidas e com as situações que surgem no decorrer da prática. O contato com as crianças também evidenciou a importância da construção de vínculos e do uso de estratégias lúdicas para aproximar a matemática do cotidiano e das experiências dos participantes.

Dessa forma, considera-se que o projeto alcançou seu propósito ao articular a formação universitária, a prática extensionista e a construção de experiências matemáticas lúdicas em um espaço educativo não escolar. Para além dos conhecimentos matemáticos trabalhados nas oficinas, a experiência proporcionou aos participantes aprendizagens relacionadas à escuta, à sensibilidade, ao planejamento, à adaptação e ao trabalho coletivo.

Referências

MENEZES, L. M; LANUTI, J. E. D. O. E. O ensino de Matemática em uma perspectiva inclusiva: desafios e possibilidades. Projeto de Iniciação Científica – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2020.

VERSÃO PROVISÓRIA

ARReMat: ENFOQUE LÚDICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Jamilly Yasmin Borgato Lodovirge[1], Jean Gabriel Warenhuk dos Santos[2], Peterson Luiz do Nascimento da Silva[3]

25006501@uepg.br, 25012101@uepg.br, 25010501@uepg.br, lema@uepg.br

Marcos Teixeira Alves (Orientador)[4]
mtalves@uepg.br

Luiza Takako Matumoto (Coorientadora)[5]
luizapg@gmail.com

Resumo

O ARReMat - Ateliê de Raciocínio e Recreação em Matemática, vinculado ao projeto LeMA (Licenciandos em Matemática em Ação) da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) é uma ação extensionista que busca intensificar e consolidar a aprendizagem Matemática por meio de atividades recreativas. A ação abrange escolas públicas e privadas, do Ensino Fundamental I ao Ensino Superior, além de instituições não formais de ensino, promovendo a popularização da Matemática e oferecendo recursos metodológicos para os professores. Dentre as edições realizadas em 2026, destaca-se a atividade: "Brincando com os números inteiros" aplicada em uma turma do 7º ano de uma escola de Ponta Grossa - PR. Os participantes demonstraram avanços significativos na compreensão dos conceitos e operações envolvendo números inteiros, confirmando o potencial de atividades lúdicas e recreativas para favorecer a aprendizagem significativa e transformar a relação dos estudantes com a Matemática.

Palavras-chave: Raciocínio matemático, Matemática Recreativa, Educação Matemática, Jogos.

Introdução

A dificuldade de aprendizagem de Matemática na educação básica é um problema estrutural, gerado por lacunas nos anos iniciais, baixos resultados em avaliações nacionais, metodologias pouco eficazes e desvalorização da educação e

[1]Voluntária do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação.
[2]Bolsista do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação.
[3]Bolsista do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação.
[4]Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Professor do Departamento de Matemática e Estatística e coordenador do projeto LeMA.
[5]Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Professora do Departamento de Matemática e Estatística e supervisora do projeto LeMA.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

da profissão professor. Para superar esse quadro, dentre tantas ações necessárias, são necessárias propostas de ensino mais eficazes e inovadoras.

A disciplina de Matemática, apesar de imprescindível para o desenvolvimento cognitivo e a formação cidadã, é frequentemente percebida pelos estudantes como entediante, difícil e desmotivadora. Segundo Jesus (2026), as dificuldades não podem ser reduzidas a déficits individuais ou limitações inatas, mas devem ser examinadas à luz das práticas didáticas, das concepções epistemológicas que orientam o ensino e das condições institucionais em que a aprendizagem ocorre. Ou seja, o problema não está somente relacionado aos alunos, mas também às formas pelas quais o ensino é estruturado.

Para contribuir para a superação das dificuldades no ensino de Matemática, surge o ARReMat - Ateliê de Raciocínio e Recreação em Matemática, uma ação vinculada ao projeto LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação[6]. O ARReMat tem como principal objetivo intensificar e consolidar conteúdos matemáticos através de práticas recreativas, principalmente daqueles que costumam apresentar maior dificuldade para os estudantes. Essa proposta parte do princípio de que a ludicidade estimula a criatividade, a curiosidade, o raciocínio lógico, favorecendo assim um aprendizado mais concretizado e significativo.

O ARReMat é organizado no formato de uma prática de desafios matemáticos, utilizando recursos pedagógicos analógicos e digitais. A seleção do conteúdo acontece a partir de uma escuta com a comunidade, em que professores da educação básica procuram o projeto solicitando intervenções pedagógicas para suprir ou complementar a aprendizagem de conteúdos com maior dificuldade, atendendo alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior, além de instituições não formais de ensino. Nessas atividades, busca-se reforçar a aprendizagem e apresentar diferentes abordagens para tais conteúdos, utilizando fortemente estratégias da Matemática Recreativa. Dessa forma, o ARReMat segue contribuindo para a intensificação e consolidação do aprendizado dos alunos e contribuindo para a valorização da Matemática como instrumento de desenvolvimento intelectual. Ao integrar ensino, extensão e ludicidade, o projeto reforça a importância de se utilizar metodologias inovadoras para enfrentar os desafios da aprendizagem matemática e contribuir para uma relação mais positiva entre os alunos e a disciplina.

Resultados Principais

Uma das ações do ARReMat em 2026 foi a atividade “Brincando com os Números Inteiros”, realizada com 39 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II nas dependências da UEPG. A prática foi organizada a pedido de uma escola que identificava dificuldades recorrentes dos alunos em relação à assimilação do conceito, da representação e das operações com números inteiros. O Quadro 1 apresenta os 5 desafios presentes nesta ação.

Quadro 1: Desafios propostos no “Brincando com os Números Inteiros”

Desafio:	**Objetivo:**
Jogo da Memória	Contextualizar os números inteiros.

[6] Mais informações, como regulamento, estão em: https://sites.google.com/uepg.br/lemauepg/arremat Acesso em: 14 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Corrida na reta numérica	Visão espacial dos números inteiros.
Flash anzan	Cálculo mental com números inteiros.
No alvo	Operações com inteiros.
Ábaco dos inteiros	Assimilação visual das operações.

Fonte: Dados do projeto.

A Figura 1 apresenta registros da participação dos estudantes durante a prática, nos quais é possível visualizar também a mediação dos acadêmicos extensionistas.

Figura 1 - Registros da participação dos estudantes durante o ARReMat



Fonte: Acervo do projeto (2026)

Após a prática, os estudantes responderam a um questionário sobre suas experiências. A Figura 2 apresenta dados relativos à pergunta: Pensando no que jogamos hoje, aprender números inteiros ficou:

Figura 2 - Dados do formulário do ARReMat: “Brincando com os Números Inteiros”

Opção	Quantidade	Percentual
Muito mais fácil e claro	14	48,2%
Um pouco mais fácil	11	37,9%
A mesma coisa de antes	3	10,3%
Continuo achando difícil	1	03,4%

Fonte: Dados do projeto (2026)

Ao unir raciocínio lógico e recreação, o projeto não apenas facilita a assimilação de conteúdos, mas também contribui para a construção de uma relação mais saudável e motivadora com a Matemática, corroborando as contribuições Smole, Diniz e Cândido (2007). A introdução de atividades lúdicas no ensino permite ao aluno “interagir com seus pares, desenvolvendo o raciocínio lógico [...] ao mesmo tempo em que transforma a percepção da matemática em uma atividade motivadora” (p. 12), realçando a proposição de metodologias inovadoras capazes de transformar dificuldades em oportunidades de aprendizado significativo.

VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

JESUS, C. R. Ensino de Matemática e Dificuldades de Aprendizagem. **Revista Tópicos**, Rio de Janeiro, v. 4, n. 30, p. 1-20, 2026. ISSN: 2965-6672.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

TELES, Renato de Sá. **Crise no ensino de matemática ameaça o futuro do país**. Gazeta do Povo, Curitiba, 05 jan. 2026. Disponível em: <https://www.gazetadopovo.com.br/opiniao/artigos/crise-no-ensino-de-matematica-ameaca-o-futuro-do-pais/>. Acesso em: 12 ago. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Pisa — Programa Internacional de Avaliação de Estudantes**. Brasília: Inep, [s.d.]. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa>. Acesso em: 13 ago. 2026.

BEZERRA, Maria da Conceição Alves. **A matemática recreativa e suas potencialidades didático-pedagógicas à luz da teoria da objetivação**. 2021. 217f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2021.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Cândida. **Jogos de Matemática de 1º a 5º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Desinvisibilizando saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

Andressa Balestrin Dasenbrock[1], Camilly Silva dos Anjos[2], Isabele Andrade Vichinieski[3], Marcel Henrique Gonçalves Sobrinho[4], Mariah Fragallo Ihlenfeldt[5], Mateus Adiers[6], Poliana Pereira Palhano[7], Rafaela Riemi Marynowski Hachiya[8]

projetoservidorasufpr@gmail.com

Carla Cristina Pompeu (Orientadora)[9]
carla.pompeu@ufpr.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma reflexão sobre a oficina “Numeramento como prática social”, desenvolvida com mulheres trabalhadoras da limpeza da Universidade Federal do Paraná (UFPR), no âmbito do projeto “Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública". A proposta parte da compreensão de que os conhecimentos matemáticos estão presentes em diferentes práticas sociais e cotidianas, embora nem sempre sejam reconhecidos como saberes matemáticos. Nesse sentido, a pesquisa justifica-se pela necessidade de valorizar e tornar visíveis os conhecimentos construídos pelas trabalhadoras em suas experiências de vida e trabalho. O objetivo foi identificar e discutir práticas de numeramento presentes no cotidiano das participantes, reconhecendo seus saberes e suas diferentes formas de mobilizar a matemática. A oficina foi organizada a partir de uma roda de conversa e de atividades práticas com bordados e miçangas, explorando conceitos como contagem, sequência, padrões, estimativa, organização e planejamento. Ao final, as participantes relacionaram a matemática a situações como organização do tempo, cronogramas, salário e descontos, escolhas financeiras, porcentagem e planejamento. Os resultados evidenciam que o

[1]Voluntária do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[2]Bolsista do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[3]Voluntária do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[4]Voluntário do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[5]Voluntária do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[6]Bolsista do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[7]Voluntária do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[8]Bolsista do projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública

[9]Universidade de São Paulo (USP), Doutora em Educação e professora adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

numeramento está presente em diversas dimensões da vida cotidiana, contribuindo para a valorização de conhecimentos que, muitas vezes, permanecem invisibilizados.

Palavras-chave: numeramento; práticas sociais; mulheres trabalhadoras; educação matemática; saberes cotidianos.

Introdução

O trabalho de limpeza constitui uma atividade indispensável para o funcionamento da universidade pública, embora seja frequentemente invisibilizado no cotidiano institucional. Na Universidade Federal do Paraná (UFPR), esse trabalho é desempenhado majoritariamente por mulheres, muitas delas atravessadas por desigualdades relacionadas ao gênero, raça, classe e escolarização. Nesse contexto, O projeto Desinvisibilizar saberes e corpos: mulheres da limpeza e a universidade pública propõe justamente a criação de espaços de escuta e partilha, reconhecendo os saberes experienciais dessas trabalhadoras como conhecimentos legítimos.

Entre os diferentes saberes mobilizados pelas participantes, adquiridos ao longo de sete oficinas, destacaremos neste resumo as práticas de numeramento. As práticas matemáticas estão presentes em diferentes situações da vida cotidiana, ainda que nem sempre sejam reconhecidas como formas de conhecimento. Nesse sentido, o numeramento pode ser compreendido para além da aquisição de habilidades matemáticas escolares, considerando os modos como as pessoas mobilizam conhecimentos matemáticos em suas experiências e interações sociais. Para Fonseca (2004) e Yasukawa et al. (2018), as práticas de numeramento estão relacionadas aos contextos sociais e culturais nos quais os sujeitos estão inseridos, valorizando aquilo que fazem com a matemática em situações concretas.

A partir dessa perspectiva, este trabalho apresenta reflexões decorrentes da oficina de numeramento realizada com as trabalhadoras da limpeza da UFPR, tomando como foco os saberes matemáticos mobilizados em suas experiências cotidianas, mas também nos saberes matemáticos existentes em artesanatos, que serviram de apoio prático para a oficina. A oficina foi desenvolvida como espaço de diálogo, compartilhamento e reconhecimento de práticas que, embora fundamentais para a realização de suas atividades, muitas vezes não são legitimadas como formas de conhecimento. Assim, busca-se evidenciar como o numeramento se constitui nas práticas sociais dessas mulheres, além de apresentá-las a matemática presente em práticas de artesanato, contribuindo para o processo de desinvibilização de seus saberes e reconhecimento de seu pertencimento no espaço da universidade.

Resultados principais

A oficina se iniciou numa roda de conversa, instigada por perguntas como: “em quais momentos do trabalho vocês precisam contar, organizar ou calcular?”; ”como organizam o tempo para realizar suas tarefas”; “como dividem os espaços que precisam limpar?”; “como calculam as quantidades de produtos de limpeza?”, na qual as participantes foram convidadas a refletir sobre situações do cotidiano de trabalho em que mobilizam conhecimentos matemáticos. Em seguida, as participantes foram organizadas em duas estações de atividades: bordados e

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

miçangas. A partir da observação de bordados do tipo Sashiko, foram discutidos padrões, repetições, sequências, contagem e organização, relacionando esses elementos às práticas realizadas pelas próprias participantes.

Na estação das miçangas, a proposta consistiu na construção de uma pulseira cuja sequência de cores, formas e quantidades representasse aspectos significativos de suas histórias de vida. A atividade possibilitou discutir diferentes estratégias de contagem, estimativa, organização, planejamento e identificação de padrões, especialmente durante a definição da quantidade de miçangas e do espaço disponível para a construção. Dessa forma, as atividades práticas possibilitaram evidenciar que conhecimentos matemáticos são mobilizados em diferentes situações, ainda que nem sempre sejam reconhecidos como matemática.

Ao final da oficina, foi realizado um momento de compartilhamento, no qual as participantes refletiram sobre as estratégias utilizadas durante as atividades e sobre a presença da matemática em seu cotidiano. As palavras apresentadas no encerramento (como sequência, contagem, padrão, planejamento, ordenação, cronograma, tempo para limpar, salário/desconto salarial e escolhas financeiras) sintetizaram diferentes formas pelas quais as participantes reconhecem a matemática em suas experiências. Assim, a oficina constituiu-se como um espaço de valorização dos saberes experienciais, evidenciando o numeramento como uma prática social presente nas atividades cotidianas e profissionais das trabalhadoras.

Os resultados da oficina evidenciaram a presença de diferentes práticas de numeramento nas experiências cotidianas das trabalhadoras da limpeza. Durante as discussões e atividades, as participantes reconheceram que mobilizam conhecimentos relacionados à contagem, sequência, organização, planejamento, identificação de padrões e estimativas, tanto no trabalho quanto em outras situações de suas vidas. As atividades com bordados e miçangas possibilitaram tornar visíveis esses conhecimentos, especialmente por meio da observação e construção de padrões, da organização de sequências e da definição de quantidades. Nesse sentido, a atividade permitiu perceber que o conhecimento matemático não se restringe às situações escolares, estando presente em práticas desenvolvidas pelas participantes a partir de suas experiências.

No momento final de compartilhamento, as participantes associaram a matemática a diferentes situações de seu cotidiano, destacando aspectos como salário e descontos salariais, escolhas financeiras, cronogramas, tempo para realizar as tarefas, organização de como chegar aos lugares, ordenação, contagem e planejamento. Esses apontamentos reforçam a compreensão do numeramento como prática social, uma vez que os conhecimentos matemáticos identificados pelas participantes estão relacionados a situações concretas e significativas de suas vidas. Assim, a oficina contribuiu para evidenciar e valorizar saberes que, embora presentes em suas práticas cotidianas, muitas vezes permanecem invisibilizados.

Referências

FONSECA, Maria da Conceição F. R. (Org.). Letramento no Brasil: habilidades matemáticas. São Paulo: Global; Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação: Instituto Paulo Montenegro, 2004. p. 213-224.

YASUKAWA, K.; JACKSON, K.; STREET, B.; ROGERS, A. Numeracy as Social Practice. In: Mathematics Education and Society Conference, 2018.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Guia 1

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Detetives da Baía

Isabela Tavares Gomes Santana
isabelaawn@gmail.com

Flávio Samuel Amorim Terra Ribeiro
flavio.ribeiro.56@estudante.unespar.edu.br

Caroline de Morais Ferreira do Carmo
ferreiracaroline639@gmail.com

Solange Maria Gomes dos Santos
solange.santos@unespar.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta o relato de experiência da atividade "Detetives da Baía", desenvolvida e aplicada por nós com uma turma do Ensino Fundamental para trabalhar conceitos matemáticos junto com a educação ambiental no contexto da Baía de Paranaguá. O objetivo foi praticar a contagem, a separação de dados, operações simples de adição e a montagem de gráficos de barras a partir de uma dinâmica de coleta e separação do lixo. A atividade foi realizada em co-docência (em trio), dividindo a aula em momentos de conversa inicial, dinâmica prática e registro no papel. Como resultado, os alunos se mostraram super engajados, conseguiram relacionar a contagem do lixo com o cuidado com os animais da nossa região e entenderam os conteúdos de forma leve e prática.

Palavras-chave: Matemática Ambiental, Sustentabilidade, Conscientização e Cidadania.

Introdução

Juntar a Matemática com a Educação Ambiental é uma forma eficiente de aproximar o conteúdo escolar da realidade viva dos alunos. Conforme destaca Santos (2022), a articulação entre a matemática e a pauta ambiental fortalece os processos de alfabetização e letramento matemático, permitindo integrar ferramentas numéricas à leitura crítica de problemas ecológicos no cotidiano da sala de aula.

Nessa perspectiva, D'Ambrosio (2018) defende que o ensino de matemática deve ser contextualizado e voltado à formação cidadã e à sustentabilidade, preparando os estudantes para responder às ameaças socioambientais do seu próprio ambiente. Aqui no nosso litoral, abordar a preservação do ecossistema e da fauna da Baía de

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Paranaguá (como botos, golfinhos e caranguejos) através de dados matemáticos conecta o aprendizado à vivência direta das crianças.

A partir desses pressupostos, preparamos e aplicamos a atividade "Detetives da Baía", no Colégio Estadual Cidália Rebello Gomes, em uma turma de 6º ano, Ilha de Valadares, no Município de Paranaguá. A regência foi conduzida pelos três discentes (Caroline, Isabela e Flávio) em regime de co-docência. Esse formato compartilhado permitiu acompanhar de perto cada etapa da mediação pedagógica, facilitando o apoio individualizado durante a manipulação dos materiais e a representação gráfica dos dados coletados.

A atividade foi dividida em quatro (4) momentos:

No primeiro momento foi realizada uma reflexão com os alunos sobre a importância da preservação do meio ambiente no local onde eles moram, que é uma comunidade insular e, sobre a separação de resíduos em lixeiras ecológicas. Nesse momento a proposta foi transformar os alunos em "investigadores ambientais" que tinham a missão de proteger o ecossistema local.

No segundo momento separamos a turma em equipes de 3 (três) alunos, distribuímos o material que continha: uma folha plastificada com uma ilustração da baía com colagens de figuras representando sólidos, domésticos, descartados indevidamente.

No terceiro momento as equipes começaram a separação das figuras, colocando em lixeiras ecológicas, usando o processo de contagem e a classificação de resíduos sólidos.

No quarto momento realizaram a aplicação da matemática, através da estatística, construindo gráficos de barras simples.

Essa atividade veio contribuir diretamente para a nossa formação acadêmica, pois vivenciar a co-docência em um contexto real de sala de aula nos permitiu aprimorar a gestão do tempo, a mediação pedagógica e o trabalho colaborativo entre os regentes. Para os alunos do 6º ano, a experiência mostrou-se altamente engajadora: o caráter investigativo e a forte relação com a realidade da Ilha de Valadares transformaram a matemática em algo concreto e significativo. Ao associarem a coleta e organização de dados à preservação do seu próprio território, os estudantes demonstraram grande interesse, participação ativa e facilidade na compreensão da estatística e da classificação dos resíduos.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018.

SANTOS, Samuel Reis. **Matemática ambiental**: estudo a partir da alfabetização e letramento matemático. Joinville: Clube de Autores, 2022.

VERSÃO PROVISÓRIA

Detetives do Consumidor: Matemática, Educação Financeira e Defesa dos Direitos nas Compras

Jéssica Souza da Cunha
jessicaestudosprof@gmail.com

Liceia Alves Pires
liceia.pires@unespar.edu.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

O projeto "Detetives do Consumidor: Matemática, Educação Financeira e Defesa dos Direitos nas Compras" foi desenvolvido com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental com o propósito de aproximar conteúdos escolares de situações concretas de consumo. A proposta articulou Educação Financeira, raciocínio lógico, análise de informações, tomada de decisão e conhecimentos básicos do Código de Defesa do Consumidor (CDC), instituído pela Lei nº 8.078/1990. A oficina foi aplicada nas turmas 8º A, 8º B e 8º D da Escola Cívico-Militar Professor Vidal Vanhoni. Em cada turma, os estudantes foram organizados em cinco grupos de cinco a seis integrantes, totalizando quinze grupos. Cada equipe recebeu um caso fictício de conflito de consumo, preencheu uma ficha de investigação e analisou o problema, as provas disponíveis, os direitos envolvidos e as possíveis formas de resolução. Na etapa seguinte, os grupos representaram um mini tribunal do consumidor, assumindo papéis como consumidor, fornecedor, advogados, juiz e júri. Observou-se elevada participação e boa aceitação das turmas, com envolvimento nas discussões e apresentações. A atividade também foi organizada de modo a favorecer a participação de estudantes com necessidades educacionais específicas. A experiência evidencia a possibilidade de trabalhar Educação Financeira de forma contextualizada, colaborativa e vinculada à formação cidadã.

Palavras-chave: Educação Financeira; Educação Matemática; consumo consciente; metodologia ativa; cidadania.

Introdução

A Educação Financeira pode ser trabalhada na escola para além do cálculo de valores, porcentagens ou planejamento de gastos, envolvendo também leitura crítica de situações de consumo e tomada de decisões fundamentadas. Nesse sentido, o projeto "Detetives do Consumidor: Matemática, Educação Financeira e Defesa dos Direitos nas Compras" foi elaborado para aproximar os conteúdos escolares de situações presentes no cotidiano dos estudantes, como compras pela internet, produtos com defeito, atrasos na entrega, serviços que não correspondem ao anunciado e conflitos entre consumidores e fornecedores.

A proposta dialoga com D'Ambrosio (1996), ao valorizar uma prática de Educação Matemática conectada a situações significativas e à realidade social dos estudantes,

e com Vigotski (2007), ao considerar a interação entre os sujeitos e a mediação docente como elementos importantes do processo de aprendizagem. Esses referenciais sustentam a escolha por problemas contextualizados, trabalho colaborativo e construção coletiva de argumentos durante a oficina.

A proposta foi desenvolvida com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da Escola Cívico-Militar Professor Vidal Vanhoni, nas turmas 8º A, 8º B e 8º D. Antes da atividade prática, foram realizadas duas aulas sobre situações de consumo e princípios básicos do Código de Defesa do Consumidor (CDC), instituído pela Lei nº 8.078/1990 (BRASIL, 1990). Foram abordados o direito à informação, o cumprimento da oferta, a responsabilidade do fornecedor, a importância das provas e as possibilidades de solução diante de conflitos de consumo.

A oficina foi estruturada como uma atividade colaborativa de resolução de problemas. Em cada turma foram formados cinco grupos, com cinco a seis integrantes. Cada equipe recebeu um entre quatro casos fictícios: um controle de videogame anunciado como compatível que não funcionava; um livro comprado pela internet com entrega atrasada; a proibição de entrada em um cinema com alimento comprado em outro estabelecimento; e um serviço de internet cuja velocidade entregue era muito inferior à contratada. Os casos foram selecionados por sua proximidade com situações cotidianas e por permitirem diferentes formas de análise e argumentação.

Na primeira etapa, os grupos preencheram uma ficha de investigação. As questões orientadoras solicitavam a identificação do problema, do possível prejuízo, das provas disponíveis, do primeiro passo para buscar uma solução, da providência que poderia ser solicitada e do órgão ou canal a procurar caso o conflito não fosse resolvido. A atividade mobilizou leitura e interpretação de informações, organização de dados, comparação de situações, raciocínio lógico, argumentação e tomada de decisão, relacionando esses processos à Educação Financeira e ao consumo consciente.

Após a investigação, cada grupo elaborou um roteiro e apresentou um “Mini Tribunal do Consumidor”. Os estudantes assumiram os papéis de consumidor, fornecedor, advogado do consumidor, advogado do fornecedor, juiz e, quando havia integrante adicional, júri. O juiz conduzia a apresentação, ouvia as versões e as defesas e apresentava um veredito final com base no caso e nas orientações do CDC. Durante o processo, houve mediação da professora para orientar a leitura, esclarecer dúvidas e estimular a participação. A organização considerou diferentes formas de participação, com instruções escritas, funções definidas e apoio de intérprete na turma em que havia estudante surdo.

Resultados Principais

A oficina foi realizada nas três turmas previstas, com cinco grupos em cada uma, totalizando quinze grupos. Durante a aplicação, observou-se alto envolvimento dos estudantes no preenchimento das fichas, na preparação dos roteiros e na apresentação dos mini tribunais. As turmas demonstraram interesse pelos casos, discutiram possibilidades de solução e distribuíram os papéis de forma colaborativa.

As apresentações permitiram transformar a análise escrita em argumentação oral. Ao representar consumidores, fornecedores, advogados, juízes e júris, os grupos precisaram organizar informações, selecionar provas, defender pontos de vista e justificar decisões. Esse formato favoreceu a participação ativa e aproximou a

VERSÃO PROVISÓRIA

Educação Financeira de situações concretas, nas quais escolhas, prejuízos, ofertas, serviços e direitos precisam ser analisados antes de uma decisão.

Outro resultado relevante foi a adaptação da dinâmica às características dos estudantes. A divisão clara das funções, o apoio visual das fichas e as diferentes formas de participação favoreceram uma organização inclusiva. Na turma em que havia estudante surdo, a intérprete realizou a tradução, possibilitando sua participação no trabalho coletivo e na apresentação.

A avaliação ocorreu de forma processual e predominantemente qualitativa. As duas aulas anteriores à oficina forneceram a base conceitual para a análise dos casos. Durante a atividade, foram observados participação, envolvimento, capacidade de argumentação, identificação dos direitos do consumidor, utilização de provas e proposição de soluções. Ao final, as produções e apresentações dos grupos integraram o processo avaliativo das turmas e receberam nota. Como não foram aplicados instrumentos equivalentes de pré-teste e pós-teste, não se pretende mensurar quantitativamente o ganho de aprendizagem; contudo, a qualidade das discussões, das produções e do desempenho nos mini tribunais indicou compreensão dos conteúdos trabalhados. A experiência nas três turmas sugere potencial de adaptação da proposta a outros contextos do Ensino Fundamental. Como continuidade, pode-se propor a produção coletiva de um guia do consumidor consciente, ampliando a articulação entre Matemática, Educação Financeira e cidadania.

Referências

BRASIL. Lei nº 8.078, de 11 de setembro de 1990. **Código de Defesa do Consumidor**. Brasília, DF, 1990.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VERSÃO PROVISÓRIA

Formação de professores/as da EJA na matemática

Alexandre Caetano de Oliveira Teixeira[1], Amanda Aparecida Sarote[1], Poliana Pereira Palhano[2]

caetanoalexandre@ufpr.br, amandasarote@ufpr.br, pereirapalhano@ufpr.br

Carla Cristina Pompeu (Orientadora)[3]
carla.pompeu@ufpr.br

Resumo

A formação continuada de professores/as da Educação de Jovens, Adultos e Idosos (EJA) constitui um aspecto importante e fundamental para o desenvolvimento da prática docente de professores/as. Pensando nisso, o projeto de extensão "A matemática na Educação de Jovens, Adultos e Idosos" visa formar professores que ensinam matemática na EJA, acompanhando as práticas compartilhadas, experiencias e discussões de professores/as da EJA de diferentes estados brasileiros. A participação no projeto é de suma importância para discentes que cursam matemática e pedagogia na Universidade Federal do Paraná, pela possibilidade de aproximar os discentes da graduação da modalidade EJA. Os resultados evidenciam que a participação no projeto possibilita conhecer diferentes experiências de professores que trabalham na EJA, além de promover reflexões sobre as práticas pedagógicas desenvolvidas nessa modalidade e seus diversos desafios.

Palavras-chave: EJA, Educação Matemática, formação continuada de professores, extensão.

Introdução

A Educação de Jovens, Adultos e Idosos (EJA) ocupa lugar importante nas políticas educacionais brasileiras ao garantir o direito à escolarização para sujeitos que não tiveram acesso ou continuidade de estudos na idade considerada regular.

[1]Voluntários do projeto de extensão A matemática na Educação de Jovens, Adultos e Idosos.
[2]Bolsista do projeto de extensão A matemática na Educação de Jovens, Adultos e Idosos.
[3]Universidade Federal do Paraná. Docente do Departamento de Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Entretanto, a modalidade enfrenta desafios relacionados às condições de oferta, à organização curricular e à formação de professores. Segundo Julio Emílio Diniz-Pereira (2011, p.3) "[…] podemos afirmar que, no caso da profissão docente, particularmente quanto aos cursos de formação de professores, já existiam nas décadas de 1980 e 1990 nítidos sinais de uma profunda crise do magistério no Brasil."

Olhando para a formação de professores, o projeto de extensão "A matemática na Educação de Jovens, Adultos e Idosos", vinculado ao Departamento de Matemática (DMAT), da Universidade Federal do Paraná (UFPR), com parceria do Instituto de Matemática e Estatística (IME-USP), tem por objetivo acompanhar um curso de extensão para professores que atuam na EJA e ensinam matemática nessa modalidade. O curso reúne professores de diferentes estados brasileiros, onde lecionam em escolas públicas federais, estaduais, municipais e escolas privadas. Segundo a Lei de Diretrizes e Bases de Educação Básica (Brasil, 1996, p.48):

> Art. 65. A formação docente, exceto para a educação superior, incluirá prática de ensino de, no mínimo, trezentas horas.

Os encontros do curso são realizados de forma remota, totalizando dez encontros, com duração de duas horas cada. A proposta consiste em criar espaços de diálogo, reflexão e compartilhamento de práticas pedagógicas, considerando as especificidades da Educação Matemática na EJA e os diferentes contextos e territórios em que os professores participantes desenvolvem seu trabalho.

O projeto além de envolver estudos teóricos, envolve a sistematização de práticas docentes, análise de documentos curriculares e acompanhamento das experiências compartilhadas pelos participantes, valorizando os saberes produzidos nos cotidianos escolares. Nesse sentido, a extensão também possibilita uma aproximação entre a formação acadêmica dos estudantes de graduação em Matemática e Pedagogia e a realidade da EJA. A participação no projeto permite acompanhar discussões sobre questões específicas dessa modalidade, conhecer diferentes experiências docentes e refletir sobre práticas desenvolvidas em sala de aula. As experiências compartilhadas contribuem, assim, para ampliar a formação acadêmica e social dos/as futuros/as professores/as. Segundo Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira (2001, p.5), os professores sentem-se motivados pela necessidade de construir o seu próprio conhecimento sobre aspectos que são fundamentais para a sua profissão.

A interdisciplinaridade presente no projeto também se mostra fundamental para compreender diferentes possibilidades de ensino e aprendizagem que, muitas vezes, não são contempladas de maneira aprofundada na formação inicial. Tanto na pedagogia quanto na matemática, não há um estudo aprofundado de disciplina em específico sobre as particularidades do ensino destinado a jovens, adultos e idosos. Dessa forma, o projeto contribui para aproximar essas duas áreas do conhecimento, promovendo uma formação mais ampla e sensível às necessidades dos/as estudantes da EJA.

Um aspecto que chama a atenção nas experiências compartilhadas dos/as professores/as, é a relação de cuidado e valorização dos saberes dos/as estudantes. Para eles/as, um avanço significa muito, a cada dia, a cada coisa novo conhecimento compartilhado. Os estudantes da EJA, conforme compartilhado por docentes cursistas, são incentivados a reconhecer outras matemáticas, a conhecer uma relação diferente que foge do tradicional de contas e problemas, seja tentando os ajudar a pensar financeiramente, relacionar com o trabalho ou até mesmo mostrar que o estudante não chega à sala de aula sem conhecimento matemático. Ao contrário do

VERSÃO PROVISÓRIA

que nós licenciandos/as acompanhamos em escolas regulares, os/as estudantes da EJA trazem as experiências de vida para dentro da sala de aula, as experiências de trabalho e outras diferentes formas de resolver problemas. O curso de extensão, a partir do que professores/as fazem nas salas de aula da EJA, evidencia a importância que é escutar a história de vida e valorizar os saberes dos/as estudantes da EJA.

Além de contribuir para a formação continuada de professores/as da educação básica, o projeto também fortalece a formação inicial de estudantes de graduação envolvidos nas ações extensionistas, promovendo a articulação entre ensino, pesquisa e extensão. A iniciativa fundamenta-se em princípios de interação dialógica, interdisciplinaridade e compromisso social, buscando contribuir para práticas matemáticas mais inclusivas, contextualizadas e comprometidas com os/as estudantes jovens, adultos e idosos da EJA.

Referências

DINIZ-PEREIRA, Júlio Emílio. O ovo ou a galinha: a crise da profissão docente e a aparente falta de perspectiva para a educação brasileira. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília, v. 92, n. 230, p. 34–51, jan./abr. 2011.

SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. O professor como investigador: leitura crítica de investigações em educação matemática. In: XII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2001, Vila Real. Actas. Vila Real: [s.n.], 2001. p. 29–55.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/642419/LDB_7ed.pdf. Último acesso em: 03 de setembro de 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

Instrumentos de Avaliação em Matemática: um estudo sobre "Carta para a Tia" no Licenciar

Amanda Grütter Jacon[1], Camila Rios[2], Emanuela Gonçales Lopes Rodrigues[1], Luiz Felipe Bezerra[1], Melissa Coelho França Bini[2]

amagrutterjacon@gmail.com, camilarios0905@gmail.com, lopesemanuelag@gmail.com, luizfelipebezerra31415@gmail.com, Coelhofbinimelissa@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)[3]
gabriel.santos22@gmail.com

Ani Tais Witt (Coorientadora)[4]
aniwitt.capanema@gmail.com

Resumo

Neste projeto, o grupo entende a avaliação como um processo. O objetivo deste projeto do Licenciar é estudar instrumentos de avaliação alternativos à prova escrita tradicional, analisando produções de estudantes da educação básica. Diante desses instrumentos, foi escolhida a "Carta para a Tia", elaborada com a finalidade de oportunizar um ambiente seguro para o estudante relatar suas experiências cotidianas relacionadas à matemática. Até o momento, a "Carta para a Tia" foi aplicada em uma turma de 4° ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná - campus Capanema, que possui 21 estudantes. Neste resumo serão apresentadas cinco análises, referentes a cinco cartas diferentes.

Palavras-chave: Educação Matemática, Avaliação da Aprendizagem Escolar, Instrumentos de Avaliação, Programa Licenciar.

Considerações iniciais

Neste projeto do Programa Licenciar, denominado "Instrumentos de Avaliação em Matemática", o grupo entende a avaliação como um processo (Buriasco; Silva, 2023) e que a avaliação também é tomada como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. Sendo assim, o objetivo deste projeto é estudar instrumentos de avaliação alternativos à prova escrita, analisando produções de

[1] Bolsista do Programa Licenciar, Projeto Instrumentos de Avaliação em Matemática.
[2] Voluntária do Programa Licenciar, Projeto Instrumentos de Avaliação em Matemática.
[3] Universidade Federal do Paraná. Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
[4] Universidade Federal do Paraná. Mestra em Educação em Ciências e em Matemática.

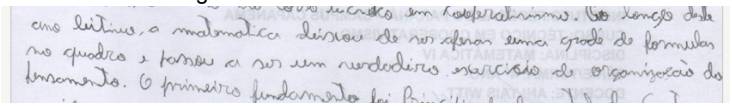
VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

estudantes da Educação Básica. Entre os instrumentos de avaliação estudados pelo projeto ao longo do ano de 2026, foi escolhida a “Carta para a Tia” (Santos, 2008), elaborada com o intuito de oportunizar um ambiente seguro para o estudante relatar suas experiências com matemática.

Análise das “Cartas para a Tia”

A “Carta para a Tia” foi aplicada em uma turma de Ensino Médio que possui 21 estudantes. Após a aplicação, as cartas foram codificadas e, posteriormente, cada participante do projeto ficou responsável por analisar uma quantidade de cartas, de forma que cada carta foi analisada por ao menos dois membros da equipe. Das cartas analisadas, alguns excertos foram selecionados para serem discutidos neste trabalho. Esta é uma pesquisa em desenvolvimento. O enunciado da carta foi elaborado pela coorientadora deste trabalho e professora da turma, com o intuito de que os estudantes explorassem os conceitos estudados nas aulas de Matemática, em 2026. Foi solicitado também que utilizassem ilustrações e cálculos que não fossem uma cópia direta do caderno, além de apresentar aspectos emocionais e reflexões em relação aos conteúdos estudados. Diante disso, nas figuras abaixo são apresentados os excertos selecionados das cartas analisadas.

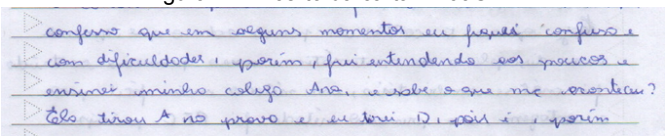
Figura 1 - Excerto da carta AE05CT1.



Fonte: Acervo LEAMat.

Ao longo da carta, o estudante mostra um possível apreço pela matemática. Ao usar termos como "deixou de ser uma grade de fórmulas no quadro e passou a ser um verdadeiro exercício de organização do pensamento", "a beleza real surgiu quando passamos a investigar como as coisas se organizam" e "fascinante conectar isso com o cotidiano", o estudante apresenta um bom aproveitamento dos seus momentos com a disciplina.

Figura 2 - Excerto da carta AE09CT1.

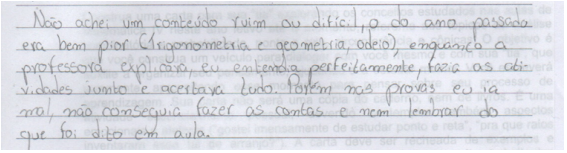


Fonte: Acervo LEAMat.

Este excerto permite observar e refletir os diversos aspectos (método de estudo, nervosismo, tempo, entre outros) que podem ter influenciado no desempenho dos estudantes, mesmo que tenham compartilhado momentos de estudos.

Figura 3 - Excerto da carta AE11CT1.

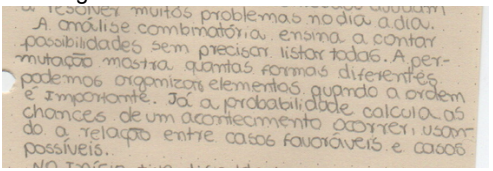
VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA


Não achei um conteúdo ruim ou difícil, o do ano passado era bem pior (trigonometria e geometria, odeio), enquanto a professora explicava, eu entendia perfeitamente, fazia as atividades junto e acertava tudo. Porém nas provas eu ia mal, não conseguia fazer as contas e nem lembrar do que foi dito em aula.

Fonte: Acervo LEAMat.

Neste excerto, evidencia-se como determinados instrumentos de avaliação podem desfavorecer alguns estudantes. O relato apresentado demonstra que, embora o estudante compreenda os conteúdos trabalhados em aula e consiga aplicá-los nas atividades propostas em sala, ele apresenta dificuldades para expressar seus conhecimentos na prova escrita tradicional.

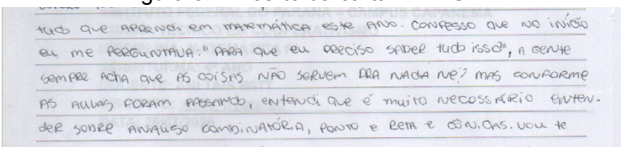
Figura 4 - Excerto da carta AE14CT1.


resolver muitos problemas no dia a dia. A análise combinatória ensina a contar possibilidades sem precisar listar todas. A permutação mostra quantas formas diferentes podemos organizar elementos, quando a ordem é importante. Já a probabilidade calcula as chances de um acontecimento ocorrer, usando a relação entre casos favoráveis e casos possíveis.

Fonte: Acervo LEAMat.

Ao analisar este trecho, observa-se como o estudante apresenta os conceitos matemáticos aprendidos em sala de aula utilizando suas próprias palavras, demonstrando sua compreensão acerca dos conteúdos trabalhados. A Carta para a Tia é um instrumento que oportuniza ao estudante ensinar sobre aquilo que está aprendendo, o que também o auxilia em seu processo de aprendizagem.

Figura 5 - Excerto da carta AE17CT1.


tudo que aprendi em matemática este ano. confesso que no início eu me perguntava: "para que eu preciso saber tudo isso?", a gente sempre acha que as coisas não servem para nada né? mas conforme as aulas foram passando, entendi que é muito necessário entender sobre analise combinatória, ponto e reta e cônicas. vou te

Fonte: Acervo LEAMat.

O estudante apresenta a ideia de que é difícil perceber a utilidade dos conteúdos apresentados em aula no dia a dia, e chega a generalizar quando afirma “a gente sempre acha que as coisas não servem para nada né?”. Uma possível intervenção consiste nos professores ampliarem as aplicações dos conteúdos matemáticos, para que os estudantes consigam refletir como podem utilizar o que aprendem.

Por fim, fica a reflexão da importância de se utilizar diferentes instrumentos avaliativos. Na Carta para a Tia, destaca-se a frequência que os estudantes decidem relatar experiências relacionadas aos seus sentimentos. É possível associar isso ao fato de que, constantemente, a escola oportuniza que eles falem de conteúdos matemáticos. Mas com que frequência os estudantes podem se expressar a respeito das relações que têm com os conteúdos matemáticos?

VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

SANTOS, Sandra Augusta. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: LOPES, Celi Espasandin (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009, p. 127-141.

SILVA, Gabriel dos Santos e; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 9, p. 1-17, 2023.

VERSÃO PROVISÓRIA

MATEMÁTICA EM MOVIMENTO: EXPOSIÇÃO ITINERANTE DE MATEMÁTICA E O APRENDIZADO LÚDICO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Jamilly Yasmin Borgato Lodovirge[1], Jean Gabriel Warenhuk dos Santos[2], Peterson Luiz do Nascimento da Silva[3]

25006501@uepg.br, 25012101@uepg.br, 25010501@uepg.br

Marcos Teixeira Alves (Orientador)[4]
mtalves@uepg.br

Scheila Valechenski Biehl[5]
svbiehl@uepg.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

A Exposição Itinerante de Matemática (EIMat) surge com o propósito de aproximar os alunos da educação básica da disciplina de matemática através de atividades lúdicas, promovendo um aprendizado significativo e contextualizado para a vida. Ainda predominam, em muitos contextos escolares, práticas de ensino baseadas na repetição mecânica de procedimentos, o que acaba afastando os estudantes e diminuindo o interesse pela disciplina. Em contrapartida, a Matemática Recreativa, uma abordagem que estimula o raciocínio lógico e resgata a curiosidade natural dos alunos, vem ganhando mais espaço como uma ferramenta inovadora para ensinar e aprender. Essa iniciativa é promovida pelo projeto de extensão: Licenciandos em Matemática em Ação (LeMA) da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). O objetivo principal da ação é levar a matemática recreativa ao ambiente escolar, evidenciando possibilidades metodológicas mais dinâmicas para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Durante as exposições, os estudantes têm a liberdade de observar, interagir e manipular os objetos e jogos matemáticos da forma que preferirem. Todo esse processo é mediado pelos acadêmicos dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática que integram o projeto. No ano de 2026, foram realizadas 5 ações da EIMat em diferentes escolas da cidade de Ponta Grossa - PR. Os resultados coletados pelos acadêmicos extensionistas são positivos, apontando protagonismo, motivação e socialização dos estudantes, bem como qualificação profissional para os futuros professores de matemática.

[1]Voluntária do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação
[2]Bolsista do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação
[3]Bolsista do Projeto de Extensão LeMA - Licenciandos em Matemática em Ação
[4]Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Professor do Departamento de Matemática e Estatística e coordenador do projeto LeMA.
[5]Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Professora do Departamento de Matemática e Estatística e coorientadora do projeto LeMA.

Palavras-chave: Matemática Recreativa, Jogos Matemáticos, Educação Matemática, Atividades Lúdicas, Exposição Itinerante.

Introdução

A EIMat tem como finalidade aproximar a Matemática da comunidade por meio de atividades lúdicas e interativas. A iniciativa oferece a estudantes e professores da Educação Básica a oportunidade de vivenciar jogos, quebra-cabeças e experimentos que estimulam o raciocínio lógico, a criatividade e o prazer em aprender. É visto que os alunos se sentem motivados e empolgados a cada novo desafio proposto. Esse ambiente lúdico fortalece a interação entre os estudantes, os professores, a comunidade externa e os acadêmicos do projeto. Além disso, cada experiência vivenciada enriquece a visão dos futuros professores sobre o ensino e aprendizagem da matemática. O intuito é garantir que os participantes vivenciem a disciplina de forma propícia à aprendizagem, valorizando também o trabalho docente.

Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo principal apresentar os resultados coletados pelos acadêmicos extensionistas durante as ações da EIMat. Buscamos demonstrar como as exposições influenciam positivamente a vida dos alunos do Ensino Fundamental, além de destacar as contribuições do projeto para o processo de ensino e aprendizagem, beneficiando tanto o desenvolvimento discente quanto à formação inicial.

Resultados Principais

A primeira etapa metodológica do trabalho consiste na organização e confecção dos materiais, em conjunto com o estudo aprofundado de cada jogo que irá compor o acervo itinerante. Em seguida, as escolas interessadas entram em contato com o projeto para realizar o agendamento da visita (LeMA, 2026).[6] A partir dessa inscrição, reserva-se uma data e todo o ambiente é preparado para garantir que os estudantes vivenciem uma experiência interativa e participativa. O engajamento gerado por essa dinâmica pode ser traduzido pelas palavras de Suleiman (2008, p. 18): “Compreendi que o jogo envolvia os alunos e os motivava. Mesmo quando perdiam uma partida, queriam voltar a jogar, repetir o jogo, porque queriam vencer, vencer o melhor, vencer a si mesmos talvez...”. Esse relato reflete exatamente um dos principais resultados observados pela comissão organizadora: os alunos demonstram curiosidade e sentem-se instigados a resolver cada desafio, inspirando-se a cada nova tentativa.

Historicamente, a Matemática Recreativa surgiu com o objetivo de proporcionar entretenimento, estimular o prazer intelectual e exercitar o raciocínio lógico por meio de jogos, charadas e enigmas, rompendo com a rigidez das abordagens puramente teóricas. Estes princípios tornaram-se o pilar central da EIMat. A receptividade da abordagem pode ser observada no engajamento dos estudantes durante as atividades. Afinal, como destaca Bártolová (2016, p. 13), “A história da matemática é muito longa, e a matemática recreativa é um veículo ideal para comunicar os aspectos históricos e multiculturais da matemática.”

[6]Mais informações disponíveis em: https://sites.google.com/uepg.br/lemauepg/eimat Acesso em: 14 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

Durante as mediações, a equipe faz questão de evidenciar aos participantes que a mesma matemática exigida na sala de aula está presente naqueles jogos, buscando promover um olhar diferente e desmistificar a disciplina. Esse aspecto lúdico revela-se ainda mais crucial no contexto da educação inclusiva. Muitas vezes, crianças com Necessidades Educacionais Especiais (NEE) precisam de metodologias alternativas para consolidar a aprendizagem, e os jogos matemáticos oferecem um formato interativo e concreto com o qual elas facilmente se identificam. Com base na perspectiva de Vygotsky (1998), o jogo é criador de zonas de desenvolvimento proximal. Ao participar dessas dinâmicas, o aluno com necessidades especiais beneficia-se da mediação e da interação com os colegas, superando limitações individuais por meio do trabalho coletivo. Esse impacto positivo estende-se também aos docentes das escolas visitadas, que frequentemente relatam sentir-se inspirados a adotar novas práticas metodológicas, o que amplia as contribuições educacionais do projeto. A Figura 1 apresenta alguns recursos utilizados pela EIMat.

Figura 1 — Alguns dos materiais disponíveis na EIMat

Materias - EIMat		
Material	**Descrição**	**Objetivo Pedagógico**
Cubo Mágico	Quebra-cabeça tridimensional com combinações de cores.	Desenvolver raciocínio lógico, memória e estratégias de resolução.
Tangram	Quebra-cabeça geométrico composto de formas geométricas plana.	Explorar conceitos de geometria plana, formas e criatividade.
Torre de Hanói	Jogo de lógica formado por discos e torres.	Trabalhar sequências, planejamento e resolução de problemas.
Jogos de Tabuleiro	Jogos com enfoque lógico-matemático.	Estimular pensamento crítico, tomada de decisão e interação social.
Quebra-cabeças manipuláveis	Puzzles variados com peças físicas.	Incetivar criatividade e percepção espacial.
Experimentos interativos	Atividades práticas que demonstram conceitos matemáticos.	Relacionar teoria e prática, mostrando a Matemática no cotidiano.
Atividades Suplementares	Atividades que reforçam o ensino da matemática de forma lúdica.	Desenvolver a curiosidade e o ensino em áreas específicas da matemática.

Fonte: EIMat (2026).

No ano de 2026, a EIMat realizou 5 ações em diferentes escolas do município de Ponta Grossa - PR. A Figura 2 apresenta momentos de participação dos alunos. Os resultados coletados pelos acadêmicos extensionistas são positivos, apontando protagonismo, motivação e socialização dos estudantes, bem como qualificação profissional para os futuros professores de matemática.

Figura 2 - Diferentes momentos da EIMat



Fonte: Dados do projeto (2026).

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

LEMA – Licenciandos em Matemática em Ação. Regulamento – **EIMat**: Exposição Itinerante de Matemática. Ponta Grossa: Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2026. Disponível em: https://sites.google.com/uepg.br/lemauepg/eimat/regulamento Acesso em: 08 ago. 2026.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

BÁRTLOVÁ, Tereza. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics**. 2016. 153 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, 2016.

SULEIMAN, Amal Rahif. **O jogo e a educação matemática**: Um estudo sobre as crenças e concepções dos professores de matemática quanto ao espaço do jogo no fazer pedagógico. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Escolar) – Faculdade de Ciências e Letras – Unesp/Araraquara, 2008.

VERSÃO PROVISÓRIA

Memórias Matemáticas

Angélica Maria Pinheiro de Lara[1], Bruno Bonassoli[1], Igor Chemberg Ayub[1], João Vitor de Almeida[1], José Divaldo Xavier da Silva[2], Luiza Tomielo Paraizo[1], Maria Paula de Lara de Paula[1], Nicolas da Verca Scholze[1]

memoriasmatematicas@gmail.com

Elisangela de Campos (Coordenadora)[3]
elismat@ufpr.br

Maria Eugênia Martin (Vice-coordenadora)[4]
eugenia@ufpr.br

VERSÃO PROVISÓRIA

Resumo

O projeto "Memórias Matemáticas" iniciou sob a coordenação das professoras Elisangela de Campos e Maria Eugênia Martin em fevereiro de 2026, com o objetivo de promover a divulgação científica e aproximar a Matemática da sociedade por meio das memórias matemáticas de docentes, discentes e da comunidade em geral. Em uma disciplina optativa/extensionista da UFPR, a ideia foi apresentada aos alunos, que abraçaram a iniciativa e propuseram que a documentação das trajetórias fosse realizada no formato de *podcast*. A proposta encontrou espaço e incentivo no projeto, ganhando força graças à autonomia metodológica concedida pela coordenação. Essa abertura permitiu à equipe construir uma abordagem criativa, que rompe com a rigidez tradicional do ambiente acadêmico. O projeto iniciou as gravações em 1º de maio, com a entrevista do professor Adonai Sant'Anna. A partir disso, a série expandiu-se rapidamente, registrando a participação de diversos docentes. As conversas não se restringem ao âmbito local da UFPR: a iniciativa já ultrapassou os muros institucionais, incorporando relatos de professores da UFRJ e, em breve, de outras universidades. Complementando o universo do *podcast*, a comunicação da iniciativa estende-se às redes sociais, onde a equipe compartilha rotineiramente postagens dinâmicas sobre curiosidades, resultados matemáticos e recortes inspiradores das histórias dos entrevistados. Dessa forma, o "Memórias Matemáticas" vai além de uma simples ação acadêmica: preserva a história das pessoas, divulga o conhecimento de forma acessível e fomenta um espaço acolhedor de reflexão sobre a trajetória de quem constrói a ciência e a educação.

Palavras-chave: divulgação científica; extensão universitária; educação matemática; podcast.

[1]Voluntário(a) do projeto de Extensão “Memórias Matemáticas”.
[2]Bolsista do projeto de Extensão “Memórias Matemáticas”.
[3]Universidade Federal do Paraná. Doutora em Educação.
[4]Universidade Federal do Paraná. Doutora em Matemática.

VERSÃO PROVISÓRIA

Introdução

O campo da Educação Matemática enfrenta o desafio histórico e persistente de desconstruir visões estereotipadas da Matemática. Afirmações de que a "matemática é uma disciplina difícil", de que "não é uma área para mulheres" ou de que "os docentes da área são figuras excessivamente exigentes e distantes" permeiam o imaginário coletivo de forma excludente. Tais estigmas atuam como barreiras para a aprendizagem e contribuem para o fenômeno da *ansiedade matemática* enfrentada por diversos estudantes. A desmistificação dessas crenças configura-se, portanto, como uma tarefa importante para a prática docente e para a democratização do conhecimento em todos os níveis de ensino. Nesse contexto, o projeto "Memórias Matemáticas" foi estruturado com o propósito de aproximar a comunidade geral dos profissionais que atuam na pesquisa e no ensino da Matemática. Para efetivar tal aproximação, adotou-se a divulgação científica por meio das plataformas digitais. O projeto visa promover o reconhecimento da pluralidade de experiências com a disciplina, destacando sua presença em diferentes contextos sociais e profissionais.

A metodologia fundamenta-se na produção audiovisual, com participação ativa dos estudantes em todas as etapas do processo. Como resultado dessa construção coletiva, foi criado um formato de *videocast* de entrevistas, com duração aproximada de uma a uma hora e meia, inspirado em aspectos da dinâmica de canais como o *Profcast* (PROFCAST, 2022). A atuação é multiplataforma: o *YouTube* hospeda os episódios completos, enquanto o *Instagram* e o *TikTok* veiculam recortes e postagens de curiosidades matemáticas (Memórias Matemáticas, 2026). Ademais, superou-se o desafio logístico da falta de equipamentos institucionais com a mobilização de materiais próprios dos estudantes (câmeras, iluminação e computadores) e a parceria com o Laboratório de Estudos em Avaliação da Aprendizagem e Educação Matemática (LEAMAT), que cedeu o espaço para as gravações. A execução contínua desenvolveu as habilidades dos discentes em oratória, design e gestão de mídias, o que evidencia que projetos dessa natureza ampliam a formação universitária ao articular saberes acadêmicos e práticas de comunicação (Alves; Oliveira; Schnorr, 2023).

Resultados Principais

A expansão do projeto pode ser mensurada tanto pela diversidade dos convidados quanto pelos indicadores de engajamento digital. Após a entrevista inaugural, a série integrou docentes da Universidade Federal do Paraná e estendeu se a outras instituições federais, como a UFRJ. A compilação de dados fornecidos pelas plataformas *Meta* (META, 2026) e *Google* (GOOGLE, 2026) demonstra a efetividade da proposta. No *YouTube*, com a disponibilização de seis vídeos públicos, o canal acumulou 1.900 visualizações, 113 inscritos, 254 horas de exibição e mais de 9.000 impressões. Já no *Instagram*, os resultados evidenciam um alcance expressivo, ultrapassando a marca de 40.000 visualizações e mais de 220 seguidores em menos de três meses. A análise demográfica fornecida pela plataforma aponta para uma audiência composta majoritariamente pelo público feminino, representando 58% dos acessos, contra 42% do público masculino. Em relação à faixa etária, o perfil atinge predominantemente jovens e jovens adultos:

24% da audiência situa-se entre 18 e 24 anos, e 35% encontra-se entre 25 e 34 anos. Tais dados atestam que o projeto tem alcançado seus objetivos de dialogar com uma nova geração e de comunicar a ciência para além dos limites estruturais da academia.

O trabalho mostra que é possível estruturar iniciativas produtivas e de amplo alcance público, mesmo diante de limitações de recursos materiais, desde que haja engajamento discente e parcerias institucionais efetivas. O alcance demográfico obtido demonstra que há interesse por narrativas científicas quando estas são apresentadas de maneira humana e acessível. Além disso, a autonomia garantida pelas coordenadoras não apenas viabilizou a execução técnica do *podcast*, mas fomentou um espaço que os estudantes puderam exercer a tomada de decisão, o pensamento crítico e a gestão de um projeto em sua totalidade. Mais do que um acervo de divulgação, a ação estabelece um patrimônio histórico. Registrar as vivências matemáticas de professores, alunos, figuras históricas e da sociedade como um todo garante a preservação da identidade plural da disciplina. Para os discentes envolvidos, a manutenção do "Memórias Matemáticas" vai além da formação convencional e firma um legado construído para a comunidade acadêmica. Trata-se da convicção de que o fazer matemático não reside apenas nos teoremas e nas demonstrações, mas, intrinsecamente, nas histórias das pessoas que o constroem e o compartilham.

Referências

ALVES, Bruna; OLIVEIRA, Marília de; SCHNORR, Samuel Molina. Extensão e divulgação científica: a contribuição de projetos de extensão na formação dos universitários. Cidadania em Ação: Revista de Extensão e Cultura, Florianópolis (SC), v. 7, n. 2, p. 51 - 70, jul./dez. 2023.

PROFCAST. ProfCast.YouTube, [2022]. Disponível em: https://youtube.com/@profcastoficial?si=aNUU6qryRBtCjdY0. Acesso em: 29 ago. 2026.

GOOGLE. YouTube Studio Analytics. Painel de métricas do canal Memórias Matemáticas. 2026. Disponível em: https://studio.youtube.com. Acesso em: 30 ago. 2026.

META. Meta Business Suite / Instagram Insights. Painel de métricas do perfil @memoriasmatematicas. 2026. Disponível em: https://business.facebook.com. Acesso em: 30 ago. 2026.

MEMÓRIAS MATEMÁTICAS: projeto de extensão do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná. Curitiba: 2026. Canal no YouTube: @MemóriasMatemáticas. Disponível em: https://www.youtube.com/@Mem%C3%B3riasMatem%C3%A1ticas. Acesso em: 31 ago. 2026. Perfil no Instagram: @memoriasmatematicas. Disponível em: https://www.instagram.com/memoriasmatematicas/. Acesso em: 31 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

Mulheres, Educação Financeira e Autonomia Econômica no Litoral do Paraná

Karolyna da Silva Batista[1]
Karolynasilva76@gmail.com

Marjory Castelhone Camargo[2]
marjoryccamargo@gmail.com

Liceia Alves Pires (Orientadora)[3]
Liceia.pires@unespar.edu.br

Cleonis Viater Figueira(Coorientadora)[4]
cleonis@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta a continuidade de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do PIBIC entre 2024 e 2026, que investigou, por meio da aplicação de questionários, as relações entre mulheres, Matemática Financeira e Educação Financeira. Na primeira etapa (2024–2025), participaram 34 mulheres vinculadas aos cursos de Administração, Ciências Contábeis, Licenciatura em Matemática e à UNATI. Na segunda etapa (2025–2026), foram obtidas 101 respostas de participantes dos cursos de História, Pedagogia, Letras e Engenharia de Produção, além da UNATI. Esses estudos investigaram práticas, percepções e desafios relacionados às questões financeiras, evidenciando lacunas no acesso à Educação Financeira formal, dificuldades com investimentos e endividamento, bem como a permanência de barreiras culturais e sociais que atravessam a autonomia econômica feminina. Nesta nova etapa, amplia-se o estudo para mulheres não acadêmicas da comunidade do litoral do Paraná, buscando compreender como diferentes grupos percebem as finanças, a gestão do dinheiro e a autonomia econômica. O objetivo é investigar a relação entre mulheres, Matemática Financeira e Educação Financeira, considerando direitos econômicos femininos, desafios na gestão financeira e possíveis influências da formação nas práticas financeiras. A pesquisa adota abordagem qualitativa, com sustentação na História Cultural, especialmente nos conceitos de práticas e representações. Espera-se contribuir para identificar lacunas formativas e subsidiar ações educativas voltadas ao fortalecimento da autonomia econômica feminina.

VERSÃO PROVISÓRIA

[1] Bolsista pela Fundação Araucária do Paraná, do Programa PIBIC, da Universidade Estadual do Paraná, Campus de Paranaguá.

[2] Bolsista pelo CNPq, do Programa PIBIC, da Universidade Estadual do Paraná, Campus Paranaguá.

[3] Universidade Estadual do Paraná, Campus de Paranaguá. Doutora em Educação.

[4] Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR Campus de Pato Branco. Pós-doutoranda em Educação Antirracista pela Universidade Federal de Alagoas. Doutora em Matemática.

Palavras-chave: Educação financeira, matemática financeira, mulheres, disciplinas escolares.

Introdução

A Educação Financeira tem assumido crescente relevância nas discussões educacionais contemporâneas, especialmente diante da necessidade de formar sujeitos capazes de compreender, planejar e tomar decisões financeiras de maneira crítica e autônoma. No Brasil, documentos como a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) evidenciam a importância da inserção desse tema desde as etapas iniciais da escolarização, reconhecendo sua contribuição para a formação cidadã de jovens e adultos (Brasil, 2018).

No entanto, ao considerar a trajetória histórica das mulheres, torna-se necessário problematizar em que medida o acesso desigual aos conhecimentos de Matemática Financeira e Educação Financeira contribuiu, e ainda contribui, para a manutenção de desigualdades socioeconômicas e para a limitação da autonomia feminina nas decisões relacionadas ao dinheiro. Historicamente, a gestão financeira esteve associada ao domínio masculino, enquanto às mulheres foram atribuídos papéis ligados ao cuidado, à domesticidade e à dependência econômica. Embora avanços legislativos e sociais tenham ampliado sua presença no mercado de trabalho e nas instituições de ensino, persistem desigualdades salariais, barreiras culturais e representações sociais que ainda afastam muitas mulheres das discussões sobre finanças, investimentos e planejamento.

Diante desse contexto, este estudo compreende tais desigualdades como construções históricas e sociais, vinculadas a relações de poder. Para sua análise, adota-se a perspectiva da História Cultural, fundamentada em Chartier (1990, 2002) e Barros (2011), por possibilitar a compreensão das representações e apropriações constituídas socialmente acerca das mulheres, do dinheiro e da participação feminina nas esferas econômicas. Assim, a pesquisa objetiva investigar a relação entre mulheres, Matemática Financeira e Educação Financeira, considerando direitos econômicos, desafios na gestão financeira e diferentes contextos formativos.

.

Resultados Principais

Como a pesquisa empírica terá início em setembro de 2026, ainda não há resultados decorrentes da nova etapa. No entanto, estudos desenvolvidos entre 2024 e 2026 já permitem apontar dados parciais que fundamentam sua continuidade. Na pesquisa de 2024-2025, com acadêmicas de Administração, Ciências Contábeis, Licenciatura em Matemática e participantes da UNATI, foram obtidos 34 questionários. Os dados indicaram que cerca de 70% das participantes eram responsáveis diretas pela gestão das finanças domésticas, enquanto 25% mencionaram gerenciamento compartilhado. As maiores dificuldades apontadas foram investimentos, com 52,9%, e gerenciamento de dívidas, com 32,4%. Além disso, aproximadamente 65% afirmaram não ter tido contato formal com Educação Financeira, evidenciando lacunas formativas e barreiras culturais à autonomia econômica feminina.

VERSÃO PROVISÓRIA

A pesquisa de 2025-2026, ainda em andamento até agosto de 2026, conta até o momento com 101 respondentes de diferentes cursos e faixas etárias.
Fundamentada na História Cultural, a investigação indica que as práticas financeiras femininas não devem ser compreendidas apenas como escolhas individuais, mas como práticas socialmente construídas, influenciadas por valores culturais, experiências geracionais, processos históricos e relações de poder.

Os dados parciais apontam percepções distintas sobre Educação Financeira e autonomia econômica. Destaca-se que 98% das participantes consideram que esse conhecimento deveria ser obrigatório nas escolas, evidenciando o reconhecimento da temática como parte importante da formação dos indivíduos. Ao mesmo tempo, a maioria considera que homens e mulheres ainda não possuem as mesmas oportunidades no campo financeiro.

As respostas também indicam dificuldades relacionadas ao planejamento financeiro, aos investimentos e à administração de dívidas. Observa-se, portanto, uma aparente contradição entre o reconhecimento da importância da Educação Financeira e as inseguranças ainda presentes na prática cotidiana. Esses resultados são preliminares, e a análise será aprofundada nas próximas etapas da investigação.

Referências

BARROS, José D'Assunção. A Nova História Cultural - considerações sobre o seu universo conceitual e seus diálogos com outros campos históricos. **Cadernos de História**, Belo Horizonte, v. 12, n. 16, p. 38–63, 2011. DOI: https://doi.org/10.5752/P.2237-8871.2011v12n16p38.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 13 ago. 2026.

CHARTIER, Roger. **À beira da falésia**: a história entre incertezas e inquietudes. Roger Chartier, Trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Ed. Universidade/UFRGS, 2002.

CHARTIER, Roger. **A História Cultural**: entre práticas e representações. Trad. De Maria Manuela Galhardo. Rio de Janeiro: Berthand Brasil, 1990.

VERSÃO PROVISÓRIA

Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM)

Carolina Maíza de Rezende Marcos[1], Kauan Alves de Oliveira[2], Luis Eduardo Vitorino Gonçalves[3], Luis Filipe Nazaré Lopes[4], Melissa Coelho França Bini[5], Matheus Dias da Silva[6].

oprm@ufpr.br

José Carlos Eidam[7]
eidam@ufpr.br

Wagner Augusto Almeida de Moraes[8]
wagnermoraes@ufpr.br

Resumo

A **OPRM** é uma competição direcionada aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio das escolas das redes pública e privada do Estado do Paraná. Idealizada e realizada desde 2016, a OPRM já se consolidou como uma das maiores competições científicas do nosso estado

Palavras-chave: Olimpíadas de Matemática; Ensino de Matemática; Educação.

Introdução

A OPRM tem como intuito estimular o estudo da Matemática, despertando a curiosidade em aprender por meio de questões desenvolvidas com um espírito diferente daquele encontrado, por exemplo, nos livros didáticos. O projeto também visa identificar jovens talentos e incentivar estes a seguir na área científica e tecnológica. A iniciativa também contribui para a aproximação entre a UFPR e a Educação Básica.

O projeto, devidamente registrado na UFPR como projeto de extensão e também participante do Programa Licenciar/UFPR, é patrocinado pelo SINEPE – Sindicato das Escolas Particulares do Paraná e apoiado pelo Departamento de Matemática da UFPR.

A prova é aplicada em escolas (públicas e privadas) do Estado do Paraná em três níveis:

- **Nível 1** – alunos matriculados no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental;

[1] Bolsista da OPRM. [2] Bolsista da OPRM. [3] Bolsista da OPRM. [4] Bolsista da OPRM.
[5] Bolsista da OPRM.[6] Bolsista da OPRM. [7] UFPR. Orientador. [8] UFPR. Coorientador.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

- **Nível 2** – alunos matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental;
- **Nível 3** – alunos matriculados em qualquer série do Ensino Médio.

A OPRM possui duas fases, compostas da seguinte maneira:

1a Fase – Prova objetiva com 20 questões e duração de 2 horas e 30 minutos para todos os níveis. Após a aplicação da prova, a Coordenação do projeto define, com base no desempenho dos alunos, a nota de corte para a segunda fase. Os alunos cujas notas forem maiores que a nota de corte são convidados para a 2ª fase.

2a Fase – Prova discursiva com 6 questões e duração de 4 horas para todos os níveis.

Após a correção das provas é realizada uma cerimônia de encerramento, onde os alunos que obtiverem as melhores pontuações da competição, de cada nível, são premiados com medalhas de ouro, prata e bronze.

A participação dos estudantes no projeto (bolsistas e voluntários) envolve atividades tais como elaboração, aplicação e correção de provas, elaboração de gabaritos e manuais de resolução de questões, organização e execução da cerimônia de premiação, entre outras atividades.

Resultados Principais

Desde a primeira edição da OPRM em 2016, é realizada ao final do processo uma Cerimônia de Premiação para entrega de medalhas para os alunos melhor classificados e para os colégios com melhor desempenho. Na edição 2025, a Cerimônia de Premiação ocorreu no Auditório do Colégio Curitibano Adventista do Bom Retiro, em Curitiba. Estiveram presentes cerca de 700 pessoas, entre estudantes, familiares, professores, gestores escolares e autoridades.

Figura 1 — Cerimônia de premiação OPRM 2024.



Fonte: Galeria OPRM

Além das medalhas para os estudantes, a OPRM oferta troféus de reconhecimento para as escolas participantes que obtiveram maior destaque na competição. Na edição 2025, foram laureados 14 estabelecimentos de ensino do

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Paraná, pertencentes a diversas regiões do estado. A distribuição de medalhas segue a proporção 12/24/36 (ouro, prata e bronze) por nível.

A edição 2026 da OPRM, atualmente em curso, teve cerca de 18 mil participantes de cerca de 150 escolas paranaenses. A equipe de bolsistas da edição 2026 está atualmente trabalhando em um manual de soluções da OPRM. Neste material, serão apresentadas todas as soluções das questões desde a primeira edição. As soluções são elaboradas, digitalizadas, revisadas e comentadas pelos bolsistas, em um trabalho que se destinará a compor o acervo de treinamento utilizado no projeto POTI/UFPR, que caminha em estreita parceria com a OPRM. Neste material, será incluído também um índice de assuntos no qual são referenciadas as aulas e tópicos que compõem o programa de treinamento ofertado no POTI. Esta atividade contribuirá muito para a formação dos estudantes que atuam no projeto, envolvendo desde o conhecimento dos mesmos sobre as ferramentas de trabalho (Latex, por exemplo) até o conhecimento matemático necessário para a resolução das questões.

A equipe de bolsistas e voluntários também atuará na correção das provas da 2a fase da OPRM, que deverá ocorrer no mês de outubro de 2026. Esta é uma atividade que contribuirá muito para o crescimento profissional dos estudantes, uma vez que oferece a possibilidade de perceber de forma muito nítida como funciona a dinâmica da olimpíada e também como é o desempenho dos estudantes na competição.

Figura 1 — Cerimônia de premiação OPRM 2025.



Fonte: Galeria OPRM

Referências

A Olimpíada paranaense de matemática premia 240 estudantes e mobiliza escolas de todo o estado. Notícias. Curitiba, 2025. Disponível em: https://ufpr.br/olimpiada-paranaense-de-matematica-premia-240-estudantes-e-mobiliza-escolas-de-todo-o-estado/. Acesso em: 12 ago. 2026

VERSÃO PROVISÓRIA

Edital OPRM 2026. Informações. Curitiba, 2026. Disponível em: https://oprm.ufpr.br/. Acesso em: 12 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

POTI/TOPMAT - Programa de Treinamento Olímpico em Matemática

Arthur Massarolo Santos[1], Camila Rios[2], Felipe Pucineli Valla[3], João Gabriel Marques dos Santos[4], Luis Felipe Nazaret Lopes[5]

poti@ufpr.br

José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
poti@ufpr.br

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Coorientador)
poti@ufpr.br

Resumo

O POTI/TOPMAT integra uma iniciativa nacional coordenada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), voltada ao incentivo ao estudo da Matemática, com foco olímpico, entre estudantes do ensino fundamental e médio de todo o Brasil. O polo sediado na Universidade Federal do Paraná (UFPR) iniciou suas atividades em 2016 e já treinou cerca de 2.000 estudantes de Curitiba e Região Metropolitana. Anualmente, aproximadamente 300 estudantes participam do projeto, que oferece treinamento em Álgebra, Geometria, Teoria de Números e Combinatória. Em 2025, os participantes conquistaram cerca de 150 medalhas em competições matemáticas. Além do desempenho em olimpíadas, o projeto promove a integração entre universidade, escolas e famílias, contribuindo para a formação matemática dos estudantes e para a aproximação da UFPR com a comunidade paranaense.

Palavras-chave: Educação Matemática, Matemática Olímpica, Ensino Fundamental e Médio, Formação de Estudantes, Integração Universidade-Escola.

Introdução

As competições matemáticas constituem uma importante ferramenta para estimular o interesse pela Matemática, desenvolver o raciocínio lógico e proporcionar desafios diferenciados aos estudantes da educação básica. Nesse contexto, o POTI/TOPMAT atua como uma iniciativa de formação e preparação de

[1]UFPR, Graduando, Bolsista do POTI/TOPMAT
[2]UFPR, Graduando, Bolsista do Licenciar
[3]UFPR, Graduando, Bolsista do Licenciar
[4]UFPR, Graduando, Bolsista do Licenciar
[5]UFPR, Graduando, Bolsista do Licenciar.

VERSÃO PROVISÓRIA

estudantes para competições matemáticas, inserindo o estado do Paraná nesse cenário nacional.

O polo da UFPR iniciou suas atividades em 2016 e, desde então, vem ampliando sua atuação em Curitiba e Região Metropolitana. As aulas são ministradas por estudantes de graduação da UFPR, selecionados a cada ano, e estão estruturadas em quatro disciplinas: Álgebra, Geometria, Teoria de Números e Combinatória. O projeto também desenvolveu seu próprio material didático, que vem sendo continuamente aprimorado e adaptado à realidade e às necessidades dos estudantes participantes.

Resultados Principais

Desde o início de suas atividades, o POTI/TOPMAT já proporcionou treinamento matemático a cerca de 2.000 estudantes. Atualmente, o projeto atende aproximadamente 300 estudantes por ano, demonstrando sua consolidação como uma iniciativa de incentivo ao estudo da Matemática no Paraná.

Um dos principais resultados observados é o crescimento do número de estudantes premiados em competições matemáticas. Em 2025, os participantes do projeto conquistaram cerca de 150 medalhas, evidenciando o impacto do treinamento oferecido e a evolução do desempenho dos estudantes.

Além dos resultados em competições, o POTI/TOPMAT tem fortalecido a relação entre a universidade e a educação básica. Para os estudantes de graduação da UFPR, o projeto proporciona uma experiência diferenciada de ensino e contato com estudantes interessados e talentosos em Matemática. Para os alunos do ensino fundamental e médio, oferece a oportunidade de vivenciar um ambiente universitário e ter acesso a uma formação matemática especializada.

O projeto também promove uma interação significativa com as famílias dos estudantes, especialmente durante a prova de seleção, realizada em fevereiro, e a cerimônia de encerramento, realizada em novembro. Essas atividades contribuem para aproximar a UFPR da comunidade e evidenciam o papel da universidade na promoção da educação e do desenvolvimento científico no estado do Paraná.

Dentre as atividades desenvolvidas pelos cerca de 40 alunos de graduação que compõem a equipe de trabalho do projeto, destacamos a ministração periódica de aulas e monitorias das disciplinas que integram o treinamento bem como a elaboração, aplicação e correção de simulados. Na presente edição do projeto, os bolsistas também estão envolvidos na elaboração de um manual de soluções de todos exercícios constantes no material didático. O impacto de todas estas atividades na formação acadêmica de cada um dos estudantes envolvidos no projeto é grande, pois permite que a equipe vivencie uma ampla gama de situações no âmbito das ações e, desta forma, alcance uma formação muito mais sólida e antenada com a realidade local.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

Referências

DORICHENKO, Sergey. **Um Círculo Matemático de Moscou**: problemas semana-a-semana. Rio de Janeiro: AMS/IMPA, 2019.

ITENBERG, Ilia; GENKIN, Sergey; FOMIN, Dmitri. **Círculos Matemáticos**: a experiência russa. Rio de Janeiro: AMS/IMPA, 2015.

STANKOVA, Zvezdelina; RIKE, Thomas. **Uma década do Círculo Matemático de Berkeley**: a experiência americana. Rio de Janeiro: AMS/IMPA, 2018.

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

Semana da Matemática 2026

Alisson Gabriel Struz[1], Ana Carla de Carvalho Honório[1], Augusto Henrique da Costa[2], Daniel Thiago Ivanchechen[2], Felipe Monteiro Kiotheka[1], Gabriela Saki Kunii[1], Guilherme de Lima Sampaio[1], Gustavo Guimarães de Souza[1], Katrine Goulart Habkoste[1], Kaue Novaki João[1], Lucas Bisoni[1], Luis Filipe Nazaret Lopes[2], Miguel Augusto Vialich[2], Nicolas da Verça Scholze[2], Pedro Henrique Andrade[1], Pedro Lascowski Laguna[2], Samuel Henrique Gomes Velez Benito[1], Tiago Filipe Pires Galu[1]

petmatematicaufpr@ufpr.br

Cleber de Medeira (Orientador)[3]
clebermedeira@ufpr.br

Resumo

A Semana da Matemática 2026 foi um evento realizado em fevereiro do ano em questão, que contou com a organização de diferentes entidades, entre elas, o PET Matemática. O evento teve como objetivos a recepção dos calouros e a integração dos estudantes do curso de Matemática da UFPR. Foram realizadas mesas-redondas com alunos e/ou egressos, palestras de divulgação científica e mesas-redondas com professores da UFPR e da UTFPR, contemplando as várias possibilidades de currículo do curso e integrando alunos, egressos e corpo docente. Os minicursos, de caráter prático e interativo, forneceram aos participantes diferentes formas de enxergar o ensino básico. Com a participação tanto de calouros quanto de outros alunos do curso, os objetivos do evento foram atingidos e os resultados obtidos envolveram os três pilares de atuação do PET: ensino, pesquisa e extensão. O presente trabalho explora tais resultados ao expor o planejamento, a execução e a recepção do evento a partir da perspectiva do PET Matemática.

Palavras-chave: Programa de Educação Tutorial, semana acadêmica, divulgação científica, formação acadêmica, integração.

Introdução

O Programa de Educação Tutorial (PET) visa envolver os estudantes participantes em um processo de formação acadêmica amplo que alinha ensino,

[1]Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática UFPR.
[2]Voluntário(a) do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática UFPR.
[3]UFPR. Professor do Departamento de Matemática da UFPR.

pesquisa e extensão, proporcionando a partir desses três princípios um desenvolvimento acadêmico de excelência para seus membros. Entre os objetivos específicos do programa está a evolução do processo de atuação coletiva, planejamento e execução, atrelados à elaboração de atividades voltadas para os demais discentes do curso de Matemática (PET MATEMÁTICA UFPR, s.d.). Nesse contexto, destaca-se a importância de criar um ambiente de fomento científico e educacional para os alunos do curso, sejam calouros ou veteranos. Além disso, é de igual importância acolher os alunos ingressantes e integrá-los ao ambiente universitário. A fim de atingir tais objetivos, é organizada anualmente, no início do período letivo, a Semana da Matemática.

Resultados Principais

Assim como na edição de 2025, a Semana da Matemática (SMAT) 2026 foi planejada em conjunto com a Coordenação do Curso de Matemática (CMAT) da UFPR e com o Centro Acadêmico de Matemática (CAM) da mesma instituição. O evento ocorreu entre os dias 23 e 27 de fevereiro de 2026 no Campus Centro Politécnico da UFPR. A CMAT ficou responsável pela programação do primeiro dia, na segunda-feira, o PET pela programação de terça e quarta e o CAM pela programação de quinta e sexta.

As atividades desenvolvidas pelo PET no segundo dia e no terceiro dia da SMAT 2026 estão explicitadas na Tabela 1, na qual “MR” se refere às mesas-redondas com professores e “MRA” às mesas-redondas com alunos e/ou egressos do curso.

Tabela 1 — Cronograma da SMAT 2026

Horário	DIA 2 - 24/02	DIA 3 - 25/02
13h30	Maria Tereza Soares - Palestra: Escola ⇔ Universidade: Percursos e Percalços de uma Pretensa Educadora Matemática	Wagner Moraes - Palestra: Escolhemos escolher, mas a que custo? O Axioma da Escolha e alguns de seus paradoxos
14h30	Tanise Pierin, Thiago Quinelato e Eduardo Hoefel - MR: Intercâmbio e Pós-Graduação no Exterior	Leonardo Cortez, Samuel Velez, Laura Ferrandin - MRA: Diferentes currículos do graduando de Matemática da UFPR
15h40	Coffee Break	Coffee Break
16h	Paula Lima e Ximena Mujica - Minicurso 1: Jogos de Tabuleiro no MatematicATIVA	Paula Lima e Ximena Mujica - Minicurso 1: Jogos de Tabuleiro no MatematicATIVA
19h	Cleber de Medeira, Neusa Tocha (UTFPR) e Carla Pompeu - MR: Desafios da profissão de professores pesquisadores	Andressa Dasenbrock, Elissandro Sikora e Fernanda Uhlig - MRA: Diferentes currículos do graduando de Matemática da UFPR
20h	(Gabriel dos Santos / LeaMat) - Minicurso 2: O que podemos aprender com a análise da produção escrita em	(Gabriel dos Santos / LeaMat) - Minicurso 2: O que podemos aprender com a análise da produção escrita em

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

	matemática?	matemática?
21h30	Coffee Break	Coffee Break

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

As palestras, com caráter de divulgação científica, foram pensadas a fim de apresentar aos graduandos as possíveis áreas em que um matemático pode atuar.

As mesas-redondas de professores tiveram como foco o diálogo no futuro da graduação dos ouvintes e na realidade atual da profissão. Além de aproximar os alunos do curso de Matemática de seu respectivo corpo docente, tendo em vista a grande quantidade de calouros participando da SMAT.

As mesas-redondas de alunos tiveram como ponto focal diferenciar os currículos do curso de Matemática (bacharelado e licenciatura), explicando suas especificidades. Para atingir esse objetivo foram escolhidos alunos com perfis diferentes de graduação, que estudaram em turnos diferentes e que tiveram, desta forma, experiências distintas na universidade. O objetivo de diversidade foi atingido e a conversa com os ouvintes foi bem fluida e significativa; essa percepção foi reforçada pelos *feedbacks* positivos que recebemos após o evento.

Os minicursos foram atividades com maior participação ativa dos ouvintes. Uniu-se a explicação à prática levantando-se questões complexas como “avaliação da produção escrita” e “metodologias de ensino” de forma divertida e dinâmica.

De maneira geral, a programação do PET nesses dois dias da SMAT 2026 contemplou com as mesas-redondas e palestras as possibilidades de currículo do curso, diferentes áreas de pesquisa do corpo docente da UFPR, e por meio dos minicursos diferentes formas de enxergar o ensino básico e como levar a universidade até ele de maneira inovadora. Dessa forma acreditamos ter seguido os três pilares de atuação do PET: ensino, pesquisa e extensão.

Quanto ao planejamento, os membros do PET se dividiram em equipes: E-mails (convites e comunicação), Credenciamento (recepção e crachás), Fotografia (registro do evento), Organização de formulários, Mediação de mesa-redonda, Assistência de sala (apoio técnico e logístico) e Coffee break (alimentação e integração).

Um diferencial da SMAT de 2026, em comparação com a do ano anterior, foi a introdução de coffee breaks também no período noturno em cada um dos dois dias que estiveram sob a organização do PET. Além disso, o grupo optou por manter as mesas-redondas com alunos e/ou egressos do curso, as quais foram implementadas pela primeira vez na edição anterior.

Por fim, como nos anos anteriores, o planejamento da SMAT do ano seguinte é iniciado com a devida antecedência em meados do segundo período letivo, a fim de se analisar e incorporar os *feedbacks* dos participantes e garantir o bom andamento do evento, bem como seu aprimoramento constante.

Referências

PET Matemática UFPR. Disponível em: https://petmatematica.ufpr.br/. Acesso em: 31 ago. 2026.

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

VERSÃO PROVISÓRIA

XXI Brincando de Matemático: uma experiência de ensino e aprendizagem

Alisson Gabriel Struz, Ana Carla de Carvalho Honório, Daniel Thiago Ivanchechen, Felipe Monteiro Kiotheka, Gabriela Saki Kunii, Guilherme de Lima Sampaio, Gustavo Guimarães de Souza, Katrine Goulart Habkoste, Kaue Novaki João, Lucas Bisoni, Luis Filipe Nazaret Lopes, Miguel Augusto Vialich, Nicolas da Verça Scholze, Pedro Henrique Andrade, Pedro Lascowski Laguna, Samuel Henrique Gomes Velez Benito, Tiago Filipe Pires Galu*
petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. Cleber de Medeira (Orientador)†
clebermedeira@ufpr.br

Resumo

O XXI Brincando de Matemático foi um evento de extensão realizado no recesso de julho de 2026 pelo PET Matemática da UFPR, voltado a estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Sob a temática "O Labirinto dos Códigos", o evento teve como objetivos apresentar conceitos de Teoria de Códigos e Álgebra de forma lúdica, além de proporcionar uma experiência de formação docente aos membros do PET. Foram promovidas exposições conceituais, dinâmicas de *escape room*, jogos educativos e atividades colaborativas guiadas por *storytelling*, acompanhadas da entrega de um material didático exclusivo aos participantes. O presente trabalho expõe a estrutura, a execução e os impactos do evento sob a perspectiva do grupo PET.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Ensino de álgebra. Programa de Educação Tutorial. Divulgação científica. Teoria de Códigos.

Introdução

A aprendizagem da matemática no ensino básico é frequentemente marcada por metodologias focadas na memorização de algoritmos e no cumprimento estrito de

*Universidade Federal do Paraná (UFPR). Graduandos em Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Integrantes Bolsistas e Voluntários do Programa de Educação Tutorial Matemática (PET).
†Universidade Federal do Paraná (UFPR). Doutor em Matemática (USP).

conteúdos programáticos. Essa abordagem abstrata e descontextualizada costuma afastar os estudantes do raciocínio lógico-dedutivo genuíno, gerando desinteresse, aversão à disciplina e a percepção equivocada de que a matemática é uma ciência inacessível ou desconectada da realidade. Para superar essas barreiras, torna-se fundamental criar espaços de aprendizagem que promovam o ensino investigativo, a intuição e a resolução de problemas de forma lúdica e participativa. É nesse cenário que o Brincando de Matemático se insere.

O Brincando de Matemático é um evento de extensão organizado pela equipe do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR) voltado para estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio, tendo como principal objetivo trabalhar conceitos e ideias matemáticas que não são usualmente explorados nos currículos das instituições de ensino. A intenção é promover uma experiência de ensino e aprendizagem que seja significativa tanto para os estudantes inscritos quanto para os integrantes do PET, através de propostas de atividade que estimulem a interação discente e a participação, bem como contribuam para o processo de formação docente dos envolvidos.

O evento é realizado no campus Centro Politécnico da UFPR, com duração de três dias consecutivos, geralmente no mês de julho, durante o período de recesso letivo das escolas estaduais, visando permitir a participação de um maior número de estudantes e evitar o conflito com as atividades escolares. Mesmo sendo realizado somente no segundo semestre, a organização das atividades para o evento ocorre desde o início do ano, através de discussões realizadas durante as reuniões internas do grupo PET, em que se estabelecem as funções de cada integrante, o tema e as dinâmicas a serem realizadas.

Resultados Principais

A edição de 2026 teve como tema "O Labirinto dos Códigos", explorando ao longo de três dias uma introdução à Teoria Algébrica de Códigos.

- **1º Dia:** Foram apresentados os conceitos de alfabetos, blocos de código e detecção e correção de erros. Para ilustrar o conceito de ruído no canal de comunicação, utilizou-se a dinâmica do "telefone sem fio", seguida de atividades em grupo de codificação para resolução de um desafio estilo *escape room* em um labirinto.

- **2º Dia:** O foco foi introduzir elementos de Álgebra Linear e corpos finitos ($\mathbb{Z}_p$), como vetores e espaços vetoriais. O conteúdo foi consolidado através de jogos dinâmicos, incluindo atividades com cartas e um jogo de perguntas no formato Passa ou Repassa.

- **3º Dia:** Integraram-se os conceitos prévios para a realização de operações com códigos lineares. Os estudantes participaram de um jogo de dominó matemático e de uma simulação final de decodificação guiada por *storytelling*, na qual cada participante desempenhou uma função específica no processo de decodificação.

O evento registrou 42 inscritos, contando com 30 presentes no primeiro dia, 31 no segundo e 29 no terceiro, evidenciando uma alta taxa de retenção do público. O público-alvo, com faixa etária de 11 a 17 anos, foi predominantemente composto por

VERSÃO PROVISÓRIA
VERSÃO PROVISÓRIA

estudantes da rede privada de Curitiba e participantes do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) da UFPR, com parcela menor oriunda da rede pública.

Os participantes demonstraram elevado engajamento, formulando perguntas aprofundadas sobre Teoria da Informação e buscando o auxílio dos professores para a resolução de problemas matemáticos externos, evidenciando o evento como uma importante ponte entre os estudantes e a universidade, oferecendo um espaço de suporte docente e científico para a resolução de problemas complexos que extrapolavam o contexto escolar regular.

Para dar suporte às atividades, a equipe do PET elaborou um material didático exclusivo e impresso, contendo capítulos estruturados para cada dia de evento, revisado por docentes do Departamento de Matemática da UFPR e entregue aos estudantes.

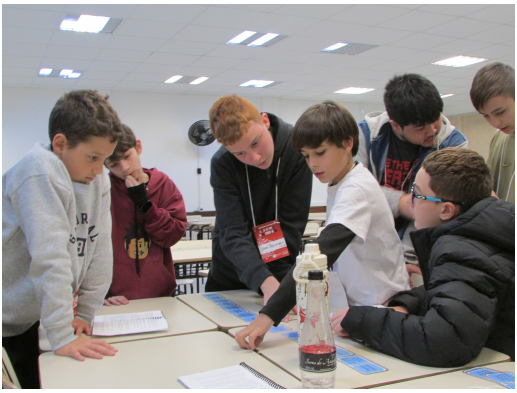


Figura 1: Alunos em trabalho em equipe durante uma das dinâmicas práticas no encerramento do evento.

Sob a perspectiva da formação docente, os membros do PET relataram uma experiência muito positiva de regência, apontando como principal desafio a transposição didática, isto é, a adaptação da linguagem acadêmica para uma abordagem lúdica e acessível à faixa etária atendida.

Referências

[1] IEZZI, G. *et al.* **Fundamentos da Matemática Elementar**: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. v. 4. São Paulo: Atual, 2013.

[2] LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

[3] LING, S.; XING, C. **Coding Theory**: A First Course. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[4] MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969.

[5] SINGH, S. **O Livro dos Códigos**: a ciência dos códigos e como decifrá-los. Rio de Janeiro: Record, 2004.

VERSÃO PROVISÓRIA