Um passeio pela teoria dos grafos

Um passeio pela teoria dos grafos

XIV Brincando de Matemático

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Estudantes:	Bianca Elena Wiltuschnig Gabriel Alves de Lima Gabriel Felipe Dalla Stella Gustavo Henrique Silva Sarturi João Antonio Francisconi Lubano Thomé Lais Gabrielle Barboza Maciel Lana Muriel Souza dos Santos Letícia do Rocio Oliveira Letícia Ferreira Gomes Lucas Nacif Giacomin Luiz Henrique Lara dos Santos Marcel Thadeu de Abreu e Souza Matheus Daniel Galvão de Melo Nelson Ivo de Souza Ferreira Rafael Correa de Lima Nisgoski Rogério Otávio Mainardes da Silva Vinicius Medeiros Prantl dos Santos Vitor Emanuel Gulisz
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Facebook:	www.facebook.com/PetMatUFPR
E-mail:	petmatufpr@gmail.com
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	17 a 20 de julho de 2018

Curitiba, julho de 2018.

Apresentação

Prezado Estudante!

É uma grande alegria tê-lo conosco nesta edição do Brincando! Tenho certeza que estes dias serão muito especiais para a sua formação matemática e trarão muitos conhecimentos novos para você!

O Brincando é uma atividade de extensão gratuita da UFPR planejada, organizada e conduzida pelos alunos do PET - Matemática com o intuito de oferecer aos estudantes de Ensino Médio que possuam interesse e potencial em Matemática a oportunidade de estudar e aprender sobre um tema matemático relevante apresentado de forma acessível e lúdica. Além disso, o Brincando oferece ao estudante uma oportunidade de conhecer melhor não somente a infraestrutura física da UFPR, mas também de interagir com docentes e estudantes de Matemática.

O tema desta edição desperta muito interesse, possui aplicações variadas e foi estudado intensamente pelos integrantes do PET durante mais de um semestre.

Gostaria de agradecer, de maneira especial, aos colegas do Departamento de Matemática que têm apoiado este trabalho, à Direção do Setor de Ciências Exatas e especialmente a cada um dos estudantes do PET, pela dedicação e esmero com que realizam todas as atividades!

Prof. José Carlos Eidam
Tutor do PET-Matemática
Chefe do Departamento de Matemática

Sumário

Capítulo 1

Definições e Primeiros Resultados

1.1 Introdução

Problemas de abastecimento

Vamos supor 3 casas vizinhas. Estas precisam ser ligadas a uma rede de água, luz e telefone, todos dispostos de maneira que as linhas não se cruzem. Você consegue conectar cada casa a estes 3 itens sem que as linhas se cruzem?

Este é um problema clássico de grafos. Mas afinal, o que são grafos?

Antes de entrarmos mais a fundo nestas questões, vamos analisar outros problemas a fim de entender melhor a origem da teoria de grafos.

Pontes de Koeninsberg

Imagine que você vive na Cidade de Koeninsberg do desenho abaixo. Um dia, você foi desafiado a passar por todas as sete pontes da cidade e retornar ao seu ponto de partida passando somente uma vez em cada ponte. Acha que consegue?

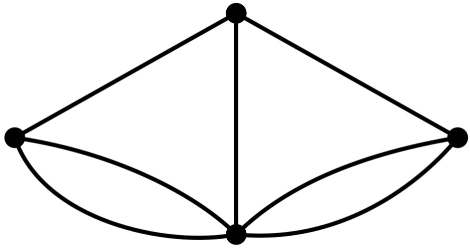


Figura 1.1

Sem ideias? Então tente este outro problema a seguir:

Sorvete? Onde?

Imagine que você é dono de uma sorveteria e quer iniciar a venda de sorvetes pelas esquinas de um parque que tem o seguinte mapa:

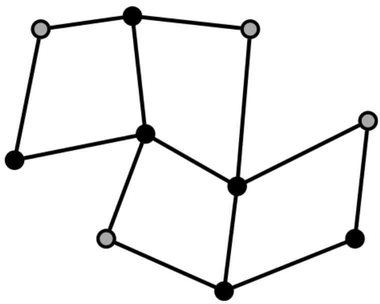


Figura 1.2

Mas pense bem: vale a pena ter sorveteiros em duas esquinas consecutivas (próximas)? E ainda, você tem que reduzir custos, consegue colocar o menor número possível de carrinhos sorvete de modo que todas as ruas do parque tenham acesso ao sorvete? Ficou mais difícil?

Calma, a seguir vamos formalizar alguns conceitos para ajudar a elucidar esses problemas e trazer possíveis soluções.

1.2 Conceitos Básicos

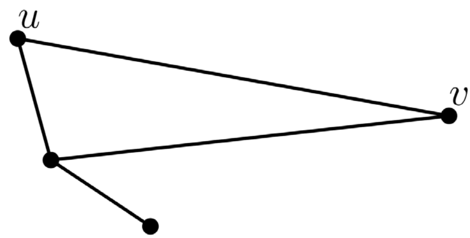


Figura 1.3

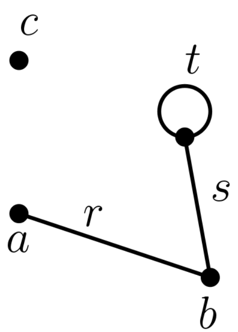


Figura 1.4

As figuras acima são grafos, denotados normalmente com letras maiúsculas (por exemplo, "grafo G"). Aos "pontos pretos", a, b e c, nas figuras damos o nome de **vértices** (denotados por ($V(G)$), e as linhas r, s e t que ligam os "pontos pretos" nas figuras chamamos de **arestas** ($A(G)$).

Por vezes, quando indicamos somente os vértices do grafo, como na figura 1.4, indicamos a aresta do grafo que ligam os vértices u e v, por $\{u, v\}$, ou simplesmente uv, se essa aresta existir.

Quando dois vértices de um grafo estão conectados por uma aresta dizemos que são **vértices adjacentes**.

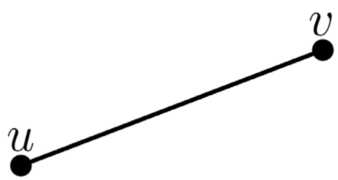


Figura 1.5

Exemplo 1.2.1.

Um caso especial de aresta é aquela que liga um vértice a ele mesmo. Uma tal aresta é chamada de **laço**.

Exemplo 1.2.2.

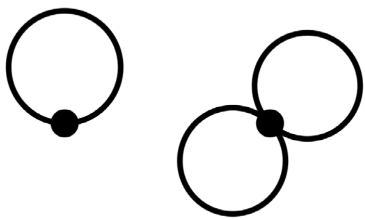


Figura 1.6

Mas existem casos mais simples e práticos para estudarmos, por exemplo, podemos ter um caso onde os vértices estão conectados por mais de uma aresta?

Sim! A resposta é com certeza sim! A estes grafos em especial atribuímos o nome de **Multigrafo**. Veja só:

Exemplo 1.2.3.

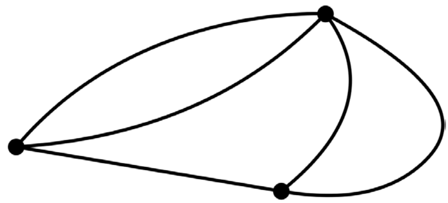


Figura 1.7

O nome de "**Multigrafo**"vem da ideia de "multiplicidade" das arestas.

Quando um grafo não é um multigrafo e não tem os estranhos laços, também damos um nome especial: **Grafo Simples**. Bonito, não é? São como nos exemplos a seguir:

Exemplo 1.2.4.

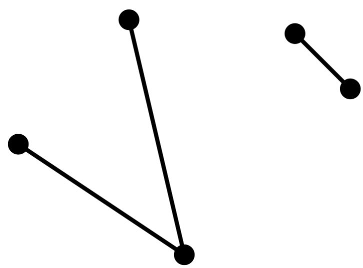


Figura 1.8

Uma coisa interessante para fazermos com os vértices, é contar quantas arestas chegam nele. Este número é o que damos o nome de **grau do vértice**(que denotamos por $d(v)$).

Agora, partindo disto, vamos dar um passo adiante nestes grafos. Analise os grafos a seguir e responda:

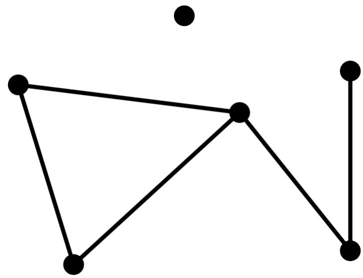


Figura 1.9

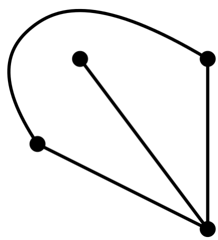


Figura 1.10

(a) Qual o grau de cada vértice?

(b) Quanto vale a soma de todos os graus de um mesmo grafo?

(c) Qual o número de arestas de cada grafo?

E então? Notou alguma relação entre o número da soma dos graus de todos os vértices com o número das arestas do mesmo grafo?

Vamos então para o primeiro resultado importante:

Teorema 1.2.5. Para todo grafo G:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2A(G)$$

Em outras palavras, estamos dizendo que a soma do número de graus dos vértices de um grafo G é igual ao dobro do número de arestas de um mesmo grafo G. Interessante, não acha? Faça um teste você mesmo, desenhe alguns e note como isto sempre acontece!

Seguindo adiante, veja a figura a seguir e diga: temos quantos grafos? Um ou dois?

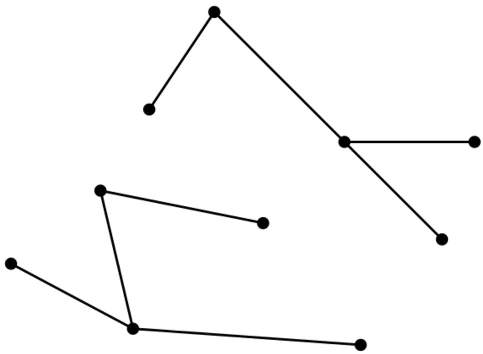


Figura 1.11

Então, podemos dizer que depende da situação. Podemos sim interpretar como sendo dois grafos distintos, mas também podemos pensar como sendo apenas um grafo de um caso especial. Pense assim: Imagine que o grafo como um todo descrevia uma rede de telefone, ou seja, os vértices são os postes e as arestas são os cabos.

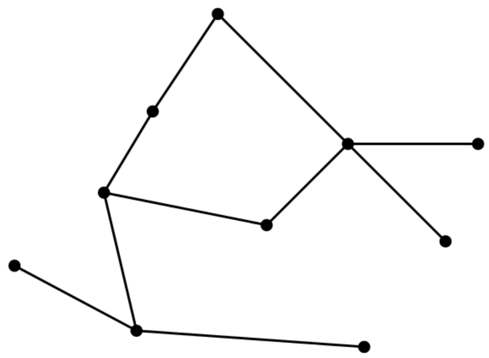


Figura 1.12

Então, após uma ventania muito poderosa, tivemos alguns cabos desconectados e então obtemos aquele estranho grafo separado do começo (Figura 1.11).

Captou a ideia?

Agora sim, dando os devidos nomes aos bois, veja só como faz sentido: Se considerarmos o grafo da figura 1.11 como um só, teremos o que chamamos de **Grafo Desconexo**, pois ele não está inteiramente conectado. E ainda, dando nomes a cada um de seus pedaços, dizemos que cada um deles é uma **Componente conexa** do grafo todo.

E para fechar tudo com um laço perfeito de conceitos, se um grafo é inteiramente conectado, isto é, não temos nenhuma componente conexa perdida em algum canto, como nos postes antes de desconectarem alguns de seus cabos, damos a ele o nome de **Grafo Conexo**.

ISOMORFISMO. Palavra bonita, não acha? Diga-se de passagem, palavra muito importante na matemática, mas, e no contexto dos grafos? Para que serve? Veja só:

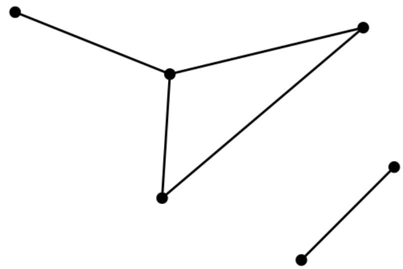


Figura 1.13

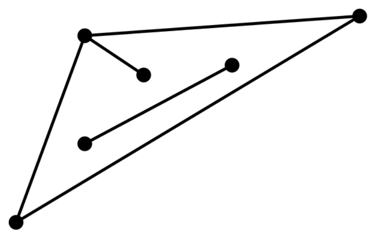


Figura 1.14

Exemplo 1.2.6.

Percebeu que os dois grafos do exemplo tem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas? Além disso, percebeu que os graus dos vértices dos dois grafos são bem semelhantes? Na verdade, percebeu que você está olhando para dois grafos iguais porém apenas desenhados de maneiras diferentes? Sim, você pode reorganizar um para ficar igual ao outro! Nestes casos, dizemos que os grafos são **isomorfos**.

Aposto que gostou da ideia. Mas vamos formalizar melhor isto então: Dizemos que um grafo G é **isomorfo** a um grafo V quando é possível estabelecer uma correspondência 1-a-1 entre os seus vértices de acordo com seus devidos graus. Note que foi exatamente como relacionamos no exemplo anterior, associamos um vértice de um dos grafos com o vértice do outro grafo com o mesmo grau, sim, você faz isso intuitivamente e sem perceber. Faça agora uns testes com os exemplos a seguir:

Exemplo 1.2.7. Diga se estes seguintes grafos são isomorfos dois a dois:

Vamos aproveitar o embalo já que estamos falando de isomorfismos entre grafos e tratemos agora de tipos diferentes de grafos, veja só como é legal classificá-los:

1. **Subgrafo:** É possível existir um grafo dentro de um grafo? Sim! E subgrafo é o nome que ele recebe, perceba:

   Exemplo 1.2.8.

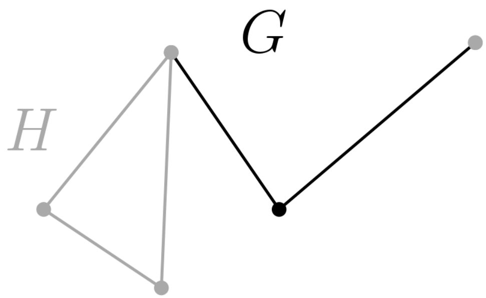
   

   Figura 1.15

   A partir disso podemos dizer que um grafo G é subgrafo de sí próprio? Reflita! (Mas a resposta é sim).

2. **Subgrafo Gerado:** Agora, vamos apelar um pouco: Considere um grafo G e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ alguns dos vérti-

ces de G. O subgrafo H de G gerado por estes vértices é dado da seguinte maneira:

(i) Os vértices de H são $v_1, v_2, \ldots, v_n$;

(ii) As arestas de H são todas as arestas de G que ligam os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Exemplo 1.2.9.

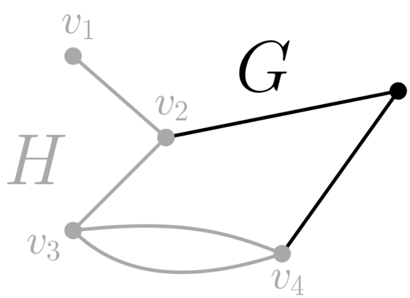


Figura 1.16

3. **Grafo Completo:** Imagine uma sala com 6 pessoas das quais todas se conhecem e conversam entre si. Agora, trazendo para nosso mundo no momento, você pode entender cada pessoa como um vértice e cada "conhecer" como uma aresta, logo, você tem um grafo onde todas os os vértices estão ligados entre si, ou seja, não existe vértice que não é ligado a outro vértice. A este tipo de grafo, atribuímos o nome de **Grafo Completo**. Veja no exemplo (que representa a sala dita).

   Exemplo 1.2.10.

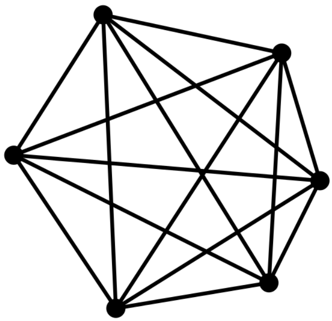


Figura 1.17

4. **Grafo Complementar:** Voltemos ao exemplo da sala anterior e vamos separar a mesma sala de pessoas em "grupos de conversa" diferentes, porém com o mesmo número de pessoas, como no exemplo a seguir:

   Exemplo 1.2.11.

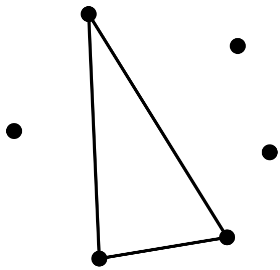


Figura 1.18

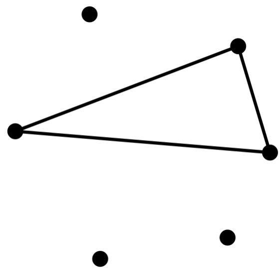


Figura 1.19

Sendo a sala representada pelo grafo G anterior, na figura 1.17, à estes dois grafos obtidos agora chamamos de **Grafos Complementares** de G. Pode-se dizer que um grafo complementar de G é um subgrafo de G com o mesmo número de vértices porém com número menor de arestas.

5. **Grafo Vazio ou Nulo:** Para sermos rápidos e práticos, um grafo vazio ou nulo é chamado assim quando não tem arestas. Como neste exemplo:

   Exemplo 1.2.12.

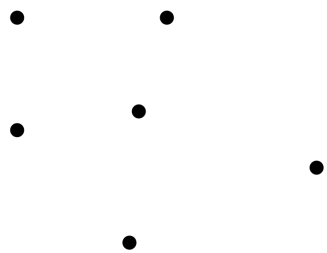
   

   Figura 1.20

6. **Grafo Regular:** É dado esse nome aos grafos cujos todos os vértices tem o mesmo grau, veja só:

   Exemplo 1.2.13.

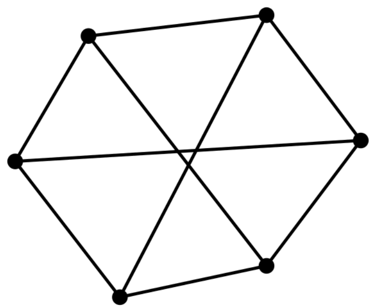
   

   Figura 1.21

   Mas pense bem, se todos os vértices tem o mesmo grau, podemos associar uma nomenclatura a este grafo que varia apenas de acordo com o grau dos vértices. Portanto, dado um grafo regular onde todos os vértices tem grau 3, podemos chamá-lo de **Grafo 3-regular**. Generalizando, se temos um grafo regular onde todos os vértices tem grau k, chamaremos este de um grafo $k - regular$.

7. **Ciclo:** Podemos ser formais aqui, certo? Um ciclo é um grafo conexo e 2-regular. Ok, eu explico: Ele é um grafo que todos seus vértices tem grau 2 e em algum momento ele se "fecha" nele mesmo, formando um... ciclo, é, isso mesmo. Veja nos exemplos abaixo:

   Exemplo 1.2.14.

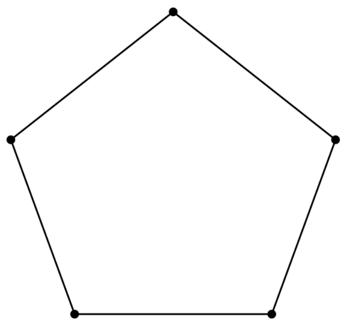
   

   Figura 1.22

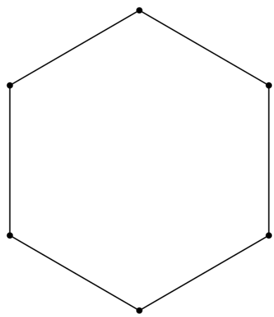
   

   Figura 1.23

   Perceba que estes Ciclos também recebem uma nomenclatura especial: C_n, onde C denota o grafo ser um Ciclo e o n denota o número de vértices do ciclo. Note que nos exemplos acima temos o C_5 e o C_6.

8. **Caminho:** Para obtermos este grafo, basta retirarmos uma aresta de um Ciclo, simples assim. Ainda, o comprimento de um caminho é número de arestas existente neste tipo de grafo. Mas preste atenção: Um grafo desta forma denotamos como P_n, você pode interpretar a letra representativa P como "Passos do caminho"

porém, este n aqui, diferente de um ciclo, **não** denota o número de vértices neste caso. n aqui denota o *número de arestas do caminho*, não se esqueça. Resumindo, para obtermos um caminho P_n precisamo retirar uma aresta de um ciclo C_{n+1}. Observe os exemplos a seguir:

Exemplo 1.2.15.

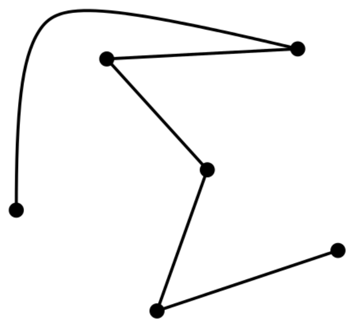


Figura 1.24

1.2.1 Exercícios

Exercício 1.2.16. Quatro casais foram à uma festa. Em meio à festa houve vários apertos de mãos. Obviamente ninguém cumprimentou a si mesmo, mas também não cumprimentou sua esposa ou marido, e além disso ninguém cumprimentou uma pessoa mais de uma vez. Depois de todos os apertos de mão alguém perguntou à cada pessoa, incluindo sua esposa (marido), quantas mãos cada pessoa apertou. Cada uma deu uma resposta diferente. Quantas pessoas a esposa (marido) de quem perguntou cumprimentou?

Resposta 1.2.17. Como cada um que foi questionado cumprimentou um número diferente de pessoas os únicos números possíveis de apertos de mão são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, pois se houvesse alguém que deu 6 apertos de mão ou mais teria que repetir uma pessoa ou cumprimentar sua esposa (marido). Podemos utilizar grafos para ter uma noção melhor da situação na figura 1.25 (*H* representa o homem que faz a pergunta).

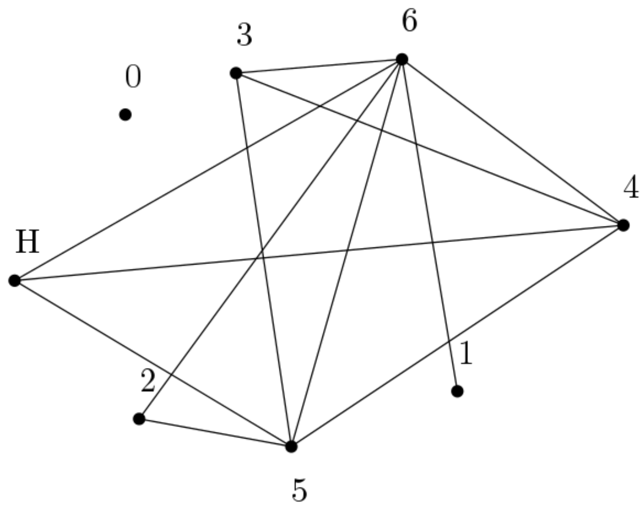


Figura 1.25

Como podemos ver a pessoa que cumprimentou 6 pessoas só não cumprimenta seu marido (esposa), ou seja, a pessoa que não cumprimentou ninguém, pois a pessoa que . Por um raciocínio parecido podemos ver que os pares de pessoas que cumprimentaram 6/0, 5/1, 4/2, são casais. A única pessoa que restou foi a minha mulher, com 3 apertos de mão.

Exercício 1.2.18. Temos um tabuleiro com 2 peças de cavalo preto e 2 peças de cavalo branco. É possível que os cavalos na configuração da figura 1.26 fiquem na configuração da figura 1.27? (Obviamente temos que usar o movimento do cavalo no xadrez senão a resposta seria muito fácil.)

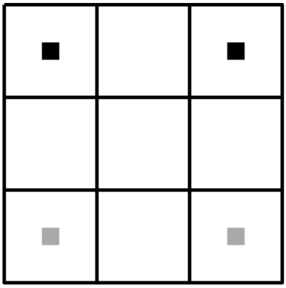


Figura 1.26

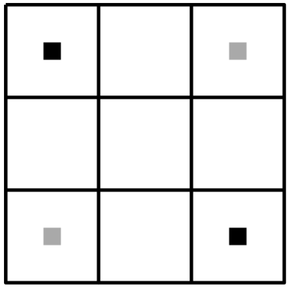


Figura 1.27

Resposta 1.2.19. Vamos primeiro enumerar as casas como em 1.28

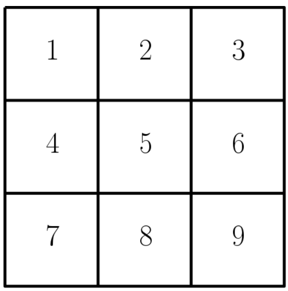


Figura 1.28

Agora vamos construir o grafo no qual um cavalo em um vértice do grafo só pode ir para os vértices adjacentes. Assim temos o seguinte grafo:

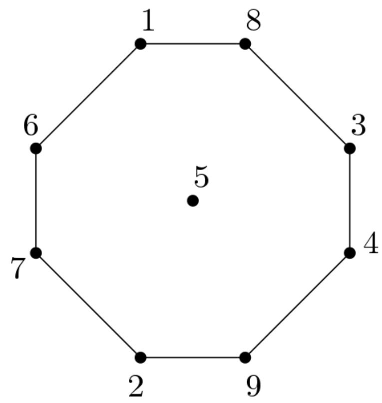


Figura 1.29

Colocando os cavalos nas configurações da figura 1.26 e da figura 1.27 sobre as respectivas posições do grafo da figura 1.28, vemos que é impossível mudar de uma configuração para a outra, pois a posição relativa dos cavalos no grafo não pode mudar.

Exercício 1.2.20. Seja G um grafo finito e simples com exatamente 2 vértices de grau ímpar. Mostre que existe caminho entre os mesmos.

Resposta 1.2.21. Considere os únicos vértices u e v de grau ímpar. Então suponha u em uma componente conexa H(pode ser que seja todo G), e notando que H é um subgrafo de G temos que v deve estar em H, pois o número de vértices de grau ímpar de um grafo deve ser par e v é o único vértice de grau ímpar diferente de u.

Exercício 1.2.22. Mostre que num grupo de mais de uma pessoa existem pelo menos duas pessoas conhecem o mesmo número de integrantes do grupo.

Resposta 1.2.23. Primeiro note que podemos consideram o grupo de pessoas como um grafo simples G. Temos também que o grau máximo do grafo é $n-1$.

Suponha que G é um grafo conexo. Então as possibilidades de graus são $1, 2, \dots, n-1$, pois cada vértice deve ter pelo menos um vértice adjacente (G é conexo). Como o número de vértices é n que é maior que o número de possibilidade para o grau $(n-1)$, pelo princípio da casa dos pombos existe pelo menos dos vértices com mesmo grau.

Suponha agora que G não é conexo. Então G não pode ter vértices de grau $n-1$ e tem um vértice de grau 0, porque G não é conexo. Novamente pelo princípio da casa dos pombos temos que existem pelo menos dois vértices com mesmo grau.

Exercício 1.2.24. Um grafo complementar à um grafo regular é regular? Se for verdadeiro mostre, e se for falso de um contraexemplo.

Capítulo 2

Conceitos Mais Avançados

2.1 Introdução

No século XVIII haviam sete pontes que cruzavam o rio Pregel e conectavam ilhas e porções continentais presentes na cidade prussiana de Königsberg (Figura 2.2). Por muito tempo, os habitantes da região questionavam se era possível atravessar todas as sete pontes em uma caminhada contínua, passando por cada ponte apenas uma vez. Esse problema passou a ser conhecido como o **Problema das Pontes de Königsberg**.

Outro problema famoso é o **Problema do Desenho da Casa**, que questiona a possibilidade de desenhar a casa representada na Figura 2.1 sem tirar o lápis do papel.

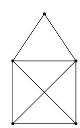


Figura 2.1: Casa.

E então, conseguiu achar uma solução para esses problemas? Neste capítulo, vamos aprender conceitos que nos ajudarão a resol-

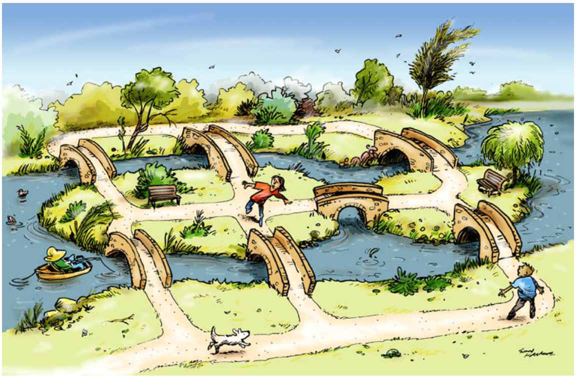


Figura 2.2: Ilustração das pontes de Königsberg, por Simon Kneebone.

ver, não só esses, mas também alguns outros problemas.

2.2 Passeios, Trilhas e Caminhos

Ao longo de nossa jornada pela teoria dos grafos, iremos nos deparar com alguns termos como passeio, trilha e caminho. Nesta seção estudaremos o significado de alguns desses termos e como podemos utilizá-los para resolver problemas. Neste capítulo, salvo menção em contrário, todos os grafos sob consideração são simples e finitos.

Definição 2.2.1. Um **passeio** de comprimento $k \geq 1$ em um grafo G é uma sequência $\mathcal{P} = (u_0, u_1, ..., u_k)$ de vértices (não necessariamente distintos) de G, tal que u_i é adjacente a u_{i-1}, para $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Um passeio $\mathcal{P}$ como acima é **fechado** se $u_0 = u_k$.

Exemplo 2.2.2. Observe o grafo representado na Figura 2.3.

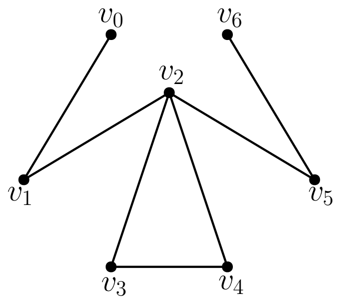


Figura 2.3

A sequência de vértices $\mathcal{P} = (v_0, v_1, v_2, v_4, v_3, v_2)$ define um passeio. Por outro lado, a sequência de vértices $\mathcal{Q} = (v_0, v_1, v_3, v_2, v_5)$ **não** define um passeio, pois os vértices v_1 e v_3 não são adjacentes.

Definição 2.2.3. Um passeio em um grafo G com todas as suas arestas distintas é chamado de **trilha**. Se $\mathcal{T} = (u_0, u_1, ..., u_k)$ é uma trilha, em que $u_0 = u_k$, dizemos que $\mathcal{T}$ é **fechada**.

Exemplo 2.2.4. Observe o grafo representado na Figura 2.4.

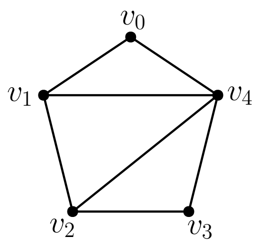


Figura 2.4

A sequência de vértices $\mathcal{T} = (v_2, v_4, v_0, v_1, v_2)$ define uma trilha. Note que $\mathcal{T}$ é uma trilha fechada.

Definição 2.2.5. Um passeio em um grafo G com todos os seus vértices distintos é chamado de **caminho**.

Definição 2.2.6. Um **ciclo** em um grafo G é um passeio fechado $\mathcal{P} = (u_0, u_1, ..., u_{k-1}, u_0)$ em G, de comprimento $k \geq 3$ e tal que $(u_0, u_1, ..., u_{k-1})$ é um caminho.

Exemplo 2.2.7. Observe o grafo representado na Figura 2.5.

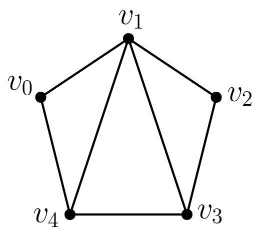


Figura 2.5

A sequência de vértices $\mathcal{C} = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0)$ define um ciclo.

Definição 2.2.8. Um grafo é **conexo** se existir um passeio entre dois quaisquer de seus vértices. Um grafo que não é conexo é dito **desconexo**.

Exemplo 2.2.9. Observe que o grafo representado na Figura 2.6 é desconexo, pois não há um passeio entre v_3 e os outros vértices.

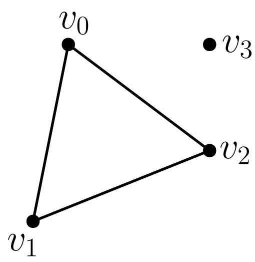


Figura 2.6

Resumindo as definições acima:

	Vértices e arestas quaisquer	**Arestas distintas**	**Vértices distintos**
Começa e termina em qualquer vértice	passeio	trilha	caminho
Começa e termina no mesmo vértice	passeio fechado	trilha fechada	ciclo

A seguir, problemas são propostos para você treinar esses novos conceitos. Alguns deles requerem um pouco de criatividade para obter o resultado, então não desanime se não conseguir resolvê-los de imediato. Conceitos estudados no capítulo anterior também serão necessários para resolver alguns problemas.

2.2.1 Problemas

1. Observe o grafo representado na Figura 2.7. Verifique se cada sequência a seguir define um passeio e, se definir, classifique-a em **trilha**, **caminho** ou **ciclo**.

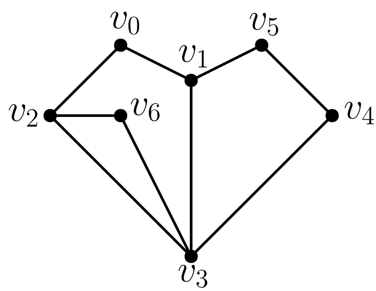


Figura 2.7

   (a) $\mathcal{A} = (v_0, v_2, v_5, v_4)$

   (b) $\mathcal{B} = (v_2, v_3, v_6, v_2)$

   (c) $\mathcal{C} = (v_1, v_5, v_4, v_3, v_1)$

   (d) $\mathcal{D} = (v_0, v_1, v_0)$

   (e) $\mathcal{E} = (v_3, v_5, v_4)$

   (f) $\mathcal{F} = (v_0, v_2, v_6, v_3, v_2)$

2. Em cada grafo abaixo (Figura 2.8), encontre caminhos de comprimento 9 e 11, e ciclos de comprimento 5, 6, 8 e 9, se possível.

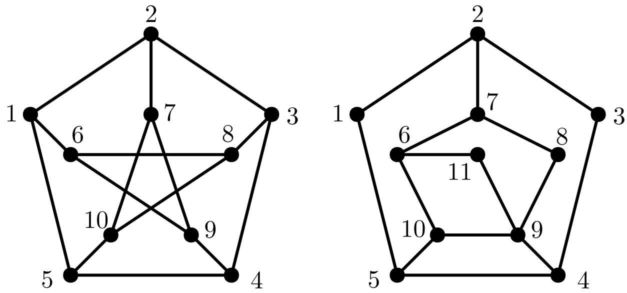


Figura 2.8

3. O grafo G tem ordem 13 e 3 componentes conexas. Mostre que uma das componentes tem pelo menos 5 vértices.

4. Mostre que em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.

5. Mostre que há um passeio entre dois vértices de um grafo se, e somente se, há um caminho entre os mesmos.

6. Seja G um grafo que possui exatamente dois vértices de grau ímpar. Mostre que existe um caminho entre esses vértices.

7. Dados um grafo G e um vértice u de G, seja $H = (V; E)$, onde V é o conjunto dos vértices de todos os caminhos em G que partem de u e E é o conjunto formado pelas arestas desses caminhos. Mostre que H é a componente conexa de G que contém u.

8. Uma aresta ϵ de um grafo G é dita uma *aresta de corte* se $G - \epsilon$ tiver mais componentes conexas que G. Se G é um grafo conexo e ϵ é uma aresta de corte de G, mostre que $G - \epsilon$ tem exatamente duas componentes conexas.

9. Mostre que, em todo grafo conexo, existe um vértice tal que o grau médio de seus vizinhos é maior ou igual que o grau médio de todos os vértices do grafo.

10. Um grafo G é dito *r-regular* se todos os vértices de G têm grau r.

    (a) Seja G um grafo r-regular com n vértices. Mostre que 2 divide nr e que G tem exatamente $\frac{nr}{2}$ arestas.

    (b) Mostre que todo grafo é um subgrafo induzido de um grafo r-regular.

    (c) Mostre que todo grafo 2-regular é um ciclo.

2.3 Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Definição 2.3.1. Uma **trilha euleriana** em um grafo conexo é uma trilha fechada que passa por todas as arestas do grafo. Dizemos que um grafo é **euleriano** se contiver uma trilha euleriana. Se o grafo não é euleriano, mas tem uma trilha aberta que passa por todas as suas arestas, ele é dito **semieuleriano**.

Exemplo 2.3.2. (Problema do Desenho da Casa). Na introdução, perguntamos se é possível desenhar a casa da Figura 2.1 sem tirar o lápis do papel. A Figura 2.9 mostra uma possível solução para o problema.

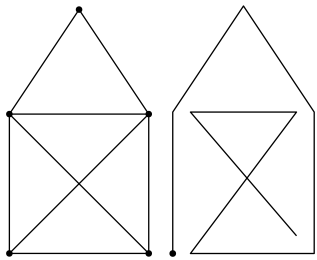


Figura 2.9

Note que o grafo que representa essa casa é semieuleriano, pois possui uma trilha fechada que passa por todas as suas arestas.

Lema 2.3.3. Se todo vértice de um grafo G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.

Demonstração.

Partindo de um vértice v_0 qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um outro vértice, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, em algum momento chegaremos em um vértice já visitado. Logo, G contém um ciclo. □

Teorema 2.3.4. (Euler). Um grafo conexo e não trivial G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que G tenha uma trilha fechada de comprimento m. Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

($\Leftarrow$) Seja m o número de arestas de um grafo G. Usaremos indução sobre m. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo Lema 2.3.3, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todos as trilhas fechadas em G, escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices do grafo têm grau par, pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H, e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T. □

Exemplo 2.3.5. (Problema das Pontes de Königsberg). Na introdução, perguntamos se é possível atravessar todas as sete pontes da Figura 2.2, sem passar por alguma ponte mais de uma vez. Podemos representar essa situação em um grafo, em que cada ponte é uma aresta (Figura 2.10). Observação: Perceba que esse grafo possui arestas múltiplas, ou seja, ele não é simples.

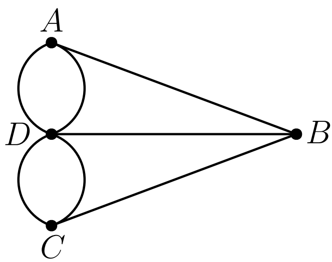


Figura 2.10

Pelo Teorema 2.3.4, concluímos que esse grafo não possui uma trilha fechada que passa por todas as arestas, pois nem todos os vértices têm grau par. Por conta disso, não é possível atravessar todas as sete pontes, sem passar por alguma delas mais de uma vez.

Corolário 2.3.6. Um grafo conexo G é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.

Exercício 2.3.7. Vimos que o grafo que representa a casa no Exemplo 2.3.2 é semieuleriano. Verifique que ele satisfaz as condições do Corolário 2.3.6.

Definição 2.3.8. Um **ciclo hamiltoniano** em um grafo conexo é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Dizemos que um grafo é **hamiltoniano** se contiver um ciclo hamiltoniano. Se o grafo não é hamiltoniano, mas tem um caminho aberto que passa por todos os seus vértices, ele é dito **semi-hamiltoniano**.

Teorema 2.3.9. (Dirac). Se G é um grafo com $n \geq 3$ vértices e tal que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Exemplo 2.3.10. Observe o grafo a seguir (Figura 2.11).

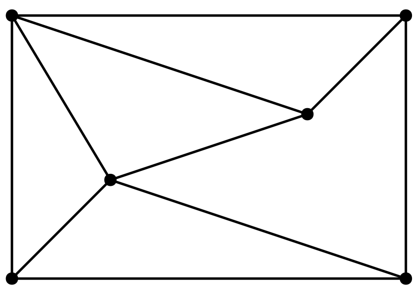


Figura 2.11

Pelo Teorema 2.3.9, temos que esse grafo é hamiltoniano. Tente achar um ciclo hamiltoniano nele!

Note que o teorema de Dirac é suficiente, mas não necessário para a existência de um ciclo hamiltoniano em um grafo. O grafo da Figura 2.12 é hamiltoniano, mas $\delta(G) = 3 < \frac{n}{2}$, onde $n = 20$, não satisfazendo as hipóteses do teorema de Dirac.

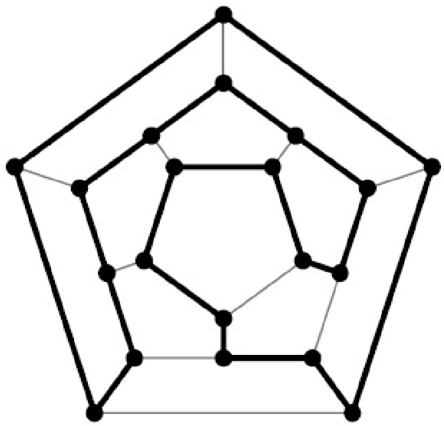


Figura 2.12

Vamos agora colocar em prática o que aprendemos!

2.3.1 Problemas

1. Prove o Corolário 2.3.6.

2. Verifique se os grafos abaixo (Figura 2.13) possuem passeios eulerianos ou ciclos hamiltonianos.

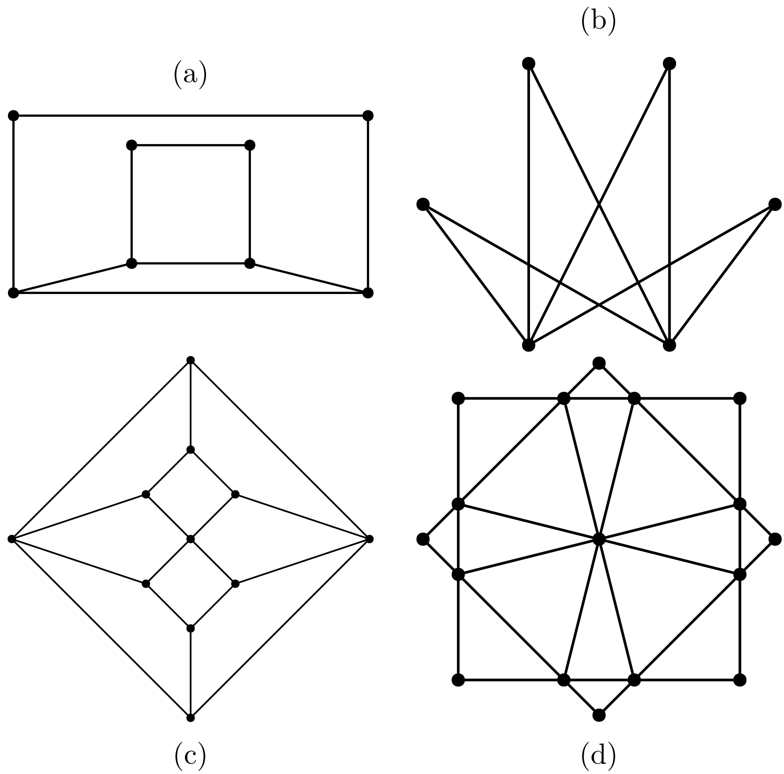


Figura 2.13

3. Seja G um grafo hamiltoniano que não é um ciclo. Mostre que G tem pelo menos dois vértices de grau 3.

4. Seja G um grafo euleriano. Mostre que se removermos uma aresta de G, então G ainda será conexo.

5. Mostre que o grafo de Petersen (Figura 2.14) não é hamiltoniano.

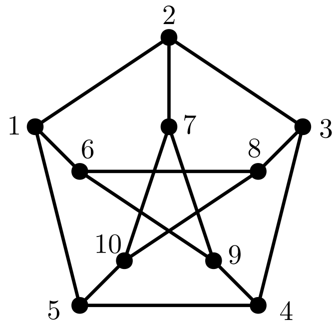
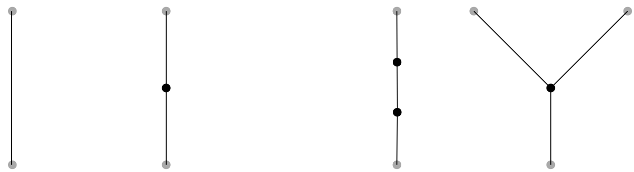


Figura 2.14

2.4 Árvores

Trabalharemos nesta seção com um caso muito recorrente de grafos: as árvores. Dizemos que um grafo é uma **árvore** se ele é *conexo* e *acíclico*. Vejamos abaixo alguns exemplos para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ (Figura 2.15).



n = 2 n = 3 n = 4

Figura 2.15

Exercício 2.4.1. Desenhe todas as árvores com 6 vértices.

Exercício 2.4.2. Existe alguma regra que relacione o número de arestas com o número de vértices de uma árvore?

Exercício 2.4.3. Existe alguma regra que nos ajude a determinar o número de árvores diferentes que são possíveis dado o número de vértices?

Podemos depreender algumas propriedades interessantes:

- *Número de arestas:* Guiando-nos pela imagem, podemos especular que o número de arestas de uma árvore seja $n - 1$. Ao considerarmos os grafos do Exercício 2.4.1 tal palpite ainda parece se confirmar. Entretanto, será que ele é válido para qualquer árvore? Vejamos que sim: note que toda árvore com $n \geq 2$ apresenta pelo menos duas folhas (vértices de grau um, representados acima na cor cinza). Considere v uma folha da árvore G e seja $G' = G - v$. Como v não conecta vértices de G', sua exclusão não irá afetar a conexidade de G' e tampouco irá introduzir um ciclo. Podemos concluir, então, que G' é uma árvore com $n - 1$ vértices. Isso significa que podemos obter novas árvores simplesmente ao adicionarmos (ou removermos) folhas.

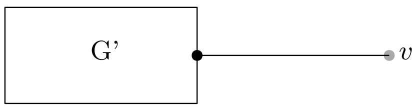


Figura 2.16: Esquema da demonstração: Árvore G' e folha v

- *A cada par de vértices existe apenas um único caminho:* Como uma árvore é por definição conexa, cada par (u, v) de vértices de G deve pertencer a pelo menos um caminho. Entretanto, se existisse um par pertencente a dois caminhos diferentes, G passaria a ter um ciclo e deixaria de ser uma árvore.

- *Adicionar uma aresta à árvore gera um ciclo:* Esta propriedade decorre da anterior; como G é uma árvore, o par (u, v) de vértices quaisquer é conectado por um caminho único. Introduzir uma aresta uv a este caminho redunda em um ciclo.

Finalmente, podemos definir como uma **floresta** o grafo cujas componentes conexas sejam árvores. Vejamos um exemplo:

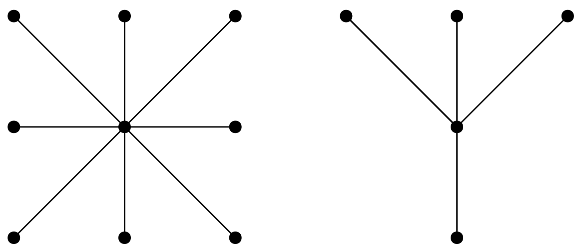


Figura 2.17: Uma floresta.

Exercício 2.4.4. Se G é uma floresta com n vértices e k componentes, qual é o número de arestas de G? Argumente.

2.4.1 Árvores Geradoras

Dado um grafo *conexo* qualquer, podemos encontrar uma árvore que contenha todos os seus vértices. Para tanto, basta retirarmos arestas do grafo até que este não apresente ciclos. A este subgrafo damos o nome de **árvore geradora**.

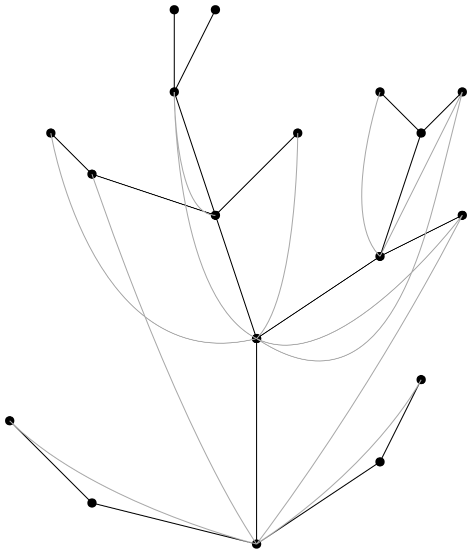


Figura 2.18: Árvore Geradora (em preto) de um grafo.

A lógica é totalmente análoga para o caso de florestas: obteremos as árvores geradoras de cada componente do grafo. Note que o número de arestas será o mesmo que discutimos acima para cada um dos casos (Exercício 2.4.2 e Exercício 2.4.4).

Exercício 2.4.5. Desenhe todas as árvores geradoras do grafo a seguir (Figura 2.19).

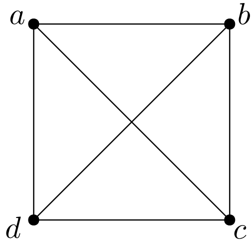


Figura 2.19

2.4.2 Sequência de Prüfer

Considerando uma árvore etiquetada G, podemos associá-la a uma sequência de números denominada *Sequência de Prüfer*. Além da sua utilidade (conforme veremos na próxima seção), sua obtenção não é difícil. Vejamos o algoritmo:

- *Passo 1*: Selecione a folha de menor valor e descarte-a.
- *Passo 2*: Adicione o valor do vizinho à sequência.

Repita os passos 1 e 2 até que o grafo tenha se reduzido a dois vértices. Ao final do algoritmo, teremos uma sequência $f(T) = (a_1, a_2, ..., a_{n-2})$. Consideremos o exemplo a seguir:

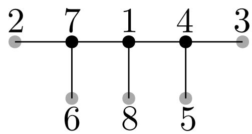


Figura 2.20

Começaremos o algoritmo pela folha de valor 2. Como uma folha apresenta grau um, sempre haverá apenas um vizinho. Incorporaremos o 7 à sequência, donde $a_1 = 7$. Em seguida teremos:

$$\begin{aligned}
&\text{folha } 3 \longrightarrow a_2 = 4\\
&\text{folha } 5 \longrightarrow a_3 = 4\\
&\text{folha } 4 \longrightarrow a_4 = 1\\
&\text{folha } 6 \longrightarrow a_5 = 7\\
&\text{folha } 7 \longrightarrow a_6 = 1
\end{aligned}$$

Sobrarão apenas os vértices 1 e 8, e $f(T) = (1, 4, 4, 1, 7, 1)$.

Exercício 2.4.6. Obtenha a sequência de Prüfer do grafo a seguir (Figura 2.21).

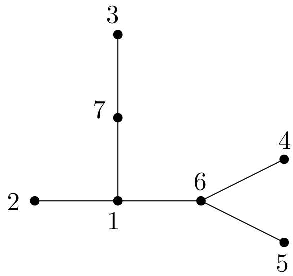


Figura 2.21

Exercício 2.4.7. Seja G uma árvore tal que $n = 2018$. Quantos elementos terá a sequência $f(G)$?

2.4.3 Enumeração de Árvores

Com apenas dois vértices, somente uma árvore pode ser formada. Dados três vértices, podemos construir três diferentes árvores – perceba que, embora os grafos apresentem uma forma semelhante (isomorfos), a etiquetação dos vértices se faz importante. Para $n = 4$ temos duas formas distintas (Figura 2.22).

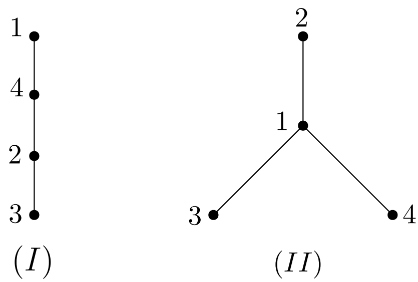


Figura 2.22: Formas.

- *Forma I*: $\frac{4!}{2} = 12$ maneiras
- *Forma II*: O vértice central pode ser etiquetado de quatro maneiras diferentes.

Totalizando 16 maneiras de etiquetar árvores com quatro vértices (compare com o Exercício 2.4.5). Procedendo analogamente, descobriríamos que existem 125 árvores quando $n = 5$. Haverá uma regra para a enumeração? Vejamos.

Teorema 2.4.8. (Cayley). Há exatamente n^{n-2} árvores etiquetadas de n vértices.

Para entendermos este resultado, ser-nos-á útil o tratamento apresentado na seção anterior. Note que o número de sequências $f(G) = (a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ que poderíamos construir a partir de n vértices é

$$\underbrace{n.n.n \ ... \ n}_{} = n^{n-2}$$

$$n - 2 \ fatores$$

Exercício 2.4.9. Quantas árvores etiquetadas podemos construir com 6 vértices?

Exercício 2.4.10. Compare o resultado anterior com o Exercício 2.4.1.

2.4.4 O Problema do Conector Mínimo

Suponha que desejemos construir uma malha ferroviária conectando n cidades tal que um passageiro possa viajar de uma cidade a qualquer outra. Se, por questões econômicas, a quantidade total de trilhos deve ser mínima, então o grafo formado ao tomarmos as n cidades como vértices deve ser uma árvore. O problema agora é encontrar uma maneira eficaz que nos permita decidir entre as n^{n-2} árvores possíveis.

Podemos também formular o problema em termos de grafos valorados – nosso objetivo será encontrar a árvore geradora com o menor valor possível. Para tanto, empregaremos o **Algoritmo de Kruskal**, descrito pelos seguintes passos:

- *Passo 1*: Escolha uma aresta cujo valor seja o menor possível.
- *Passo 2*: Novamente escolha uma aresta cujo valor seja o menor possível. Se essa aresta não introduzir um ciclo no grafo, adicioná-la à árvore. Caso contrário, verificar a próxima aresta.

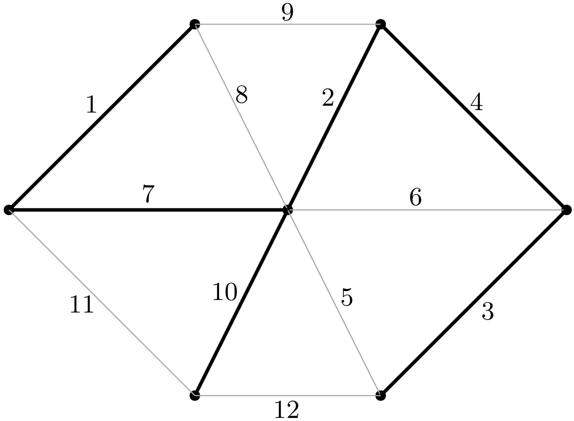


Figura 2.23: Conector mínimo através do Algoritmo de Kruskal.

2.4.5 Problemas

1. Mostre que G é uma árvore se, e somente se, há um único caminho em G ligando quaisquer dois de seus

vértices.

2. Se uma árvore T tem um nó de grau k, mostre que T tem pelo menos k folhas.

3. Mostre que duas árvores geradoras de um grafo conexo G têm um mesmo número de arestas.

4. Seja G um grafo conexo com uma única árvore geradora. Mostre que G é uma árvore.

5. Mostre que G é uma árvore se, e somente se, G é conexo e toda aresta de G é uma aresta de corte.

6. O *Algoritmo de Dijkstra* é descrito pelos seguintes passos:

    - *Passo 1*: Escolha um vértice e a aresta de menor peso nele incidente.
    - *Passo 2*: Após escolhidos certo número de vértices e arestas, escolha a aresta de menor peso ainda não escolhida e ligando um vértice já escolhido a um vértice ainda não escolhido.
    - *Passo 3*: Repita o item anterior enquanto possível.

    Prove que esse algoritmo também constrói árvores geradoras minimais de grafos valorados.

Capítulo 3

Coloração

Depois de introduzirmos o estudo de pontinhos e linhas como algo mais difícil do que parece, vamos colocar um pouco de cor nessa história. Não, a apostila não ficará colorida daqui em diante, ela continuará em preto e branco, e, mesmo assim, vamos "colorir" esses pontinhos e linhas nesta seção.

3.1 Definições Iniciais

Coloração: Não precisamos necessariamente de cores para realizar a coloração de um grafo. A coloração de grafos consiste em atribuir rótulos (cores) a elementos de um grafo, seguindo certas restrições, como dois vértices/arestas adjacentes não poderem possuir a mesma cor. Os rótulos podem ser números, símbolos ou cores (mais comum). Sempre iremos nos referir a uma coloração de vértices/arestas, pois não há apenas um resultado possível para a coloração de um grafo G. Nesse material utilizaremos $c_1, c_2, ...$ para indicar as cores que serão utilizadas para colorir cada elemento do grafo.

Número Cromático: É o menor número de cores para colorir os vértices/as arestas de um grafo G, sendo denotado por $\chi(G)$. Se o número de cores utilizado na coloração de um grafo for igual a $\chi(G)$ a coloração é dita ótima.

Conjunto Independente: Um conjunto independente de um grafo G é um conjunto S de vértices/arestas de G tal que não existem dois vértices/duas arestas adjacentes contidas em S. Por exemplo, se v_1 e v_2 são vértices quaisquer de um conjunto independente, não há aresta entre v_1 e v_2; da mesma forma, se a_1 e a_2 são arestas quaisquer de um conjunto independente, não há vértice entre a_1 e a_2.

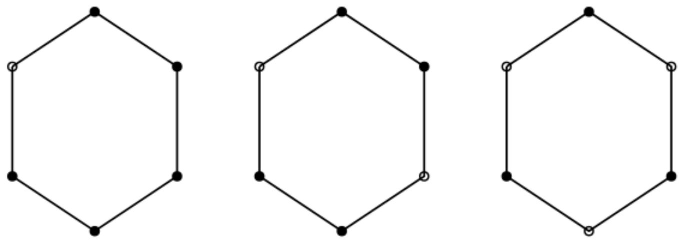
Conjunto Independente Maximal: Um conjunto independente é dito maximal quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.

Conjunto Independente Máximo: Um conjunto independente é máximo se todos os outros conjuntos independentes do grafo têm número de elementos menor ou igual a desse conjunto.

Número de Independência: É o número de elementos de um subconjunto independente máximo de um grafo G, e é denotado por $\alpha(G)$. Para grafos que contêm laços, assumimos $\alpha(G) = 0$.

3.2 Conjuntos Independentes

3.2.1 Conjuntos de Vértices Independentes



Grafo 1 **Grafo 2** **Grafo 3**

Nos Grafos 1, 2 e 3 os vértices representados por círculos sem preenchimento são exemplos de conjuntos de vértices independentes. No Grafo 2, temos um conjunto independente maximal, pois não conseguimos acrescentar mais nenhum vértice ao conjunto sem perder a independência. Já no Grafo 3, temos um conjunto independente máximo, pois não existe um conjunto com mais de 3 vértices e que seja independente nesse grafo.

Teorema 3.2.1. Se G é um grafo simples, G possui pelo menos um subconjunto independente máximo.

Algoritmo 3.2.2. Vamos introduzir um algoritmo (passo a passo) para construir um conjunto independente maximal de vértices de um grafo G:

1. Faça uma lista V dos vértices do grafo G em ordem crescente de grau. Em caso de empate, escolha arbitrariamente.

2. Selecione um vértice de menor grau ainda não considerado;

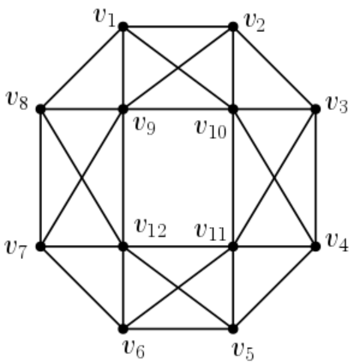
3. Se este vértice não possuir conflitos com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;

4. Remova as arestas deste vértice e os seus vértices adjacentes do grafo original;

5. Se houverem vértices ainda não considerados, volte para 1.

Observação 3.2.3. O método não garante que o conjunto independente maximal que encontrarmos seja máximo.

Exemplo 3.2.4. Vamos considerar o grafo a seguir e aplicar o algoritmo para determinar um conjunto independente maximal.



1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$. Os vértices desse grafo têm grau 4 ou 6.

2. Vamos escolher v_1 como o primeiro vértice do nosso conjunto independente: $V_{ind} = \{v_1\}$.

3. Não podemos colocar v_2, v_8, v_9 nem v_{10} em V_{ind}, mas podemos adicionar v_3, obtendo $V_{ind} = \{v_1, v_3\}$.

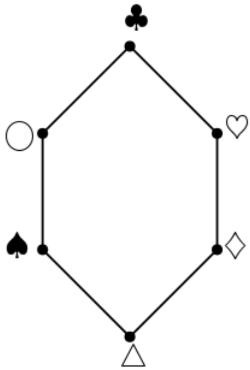
4. Agora não podemos acrescentar v_{11} nem v_4 ao conjunto, então incluímos v_5, que é o próximo da nossa lista. Assim, $V_{ind} = \{v_1, v_3, v_5\}$.

5. Da mesma forma, não podemos colocar v_6 nem v_{12} em V_{ind}. O último vértice ainda não considerado é v_7, que

pode ser acrescentado ao nosso conjunto independente sem problemas.

6. Concluímos, assim, o nosso conjunto independente maximal $V_{ind} = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$, que nesse caso também é máximo.

Exemplo 3.2.5. Como mostra de que o método não garante o conjunto máximo, temos o grafo:



1. Como todos os vértices desse grafo possuem grau 2, a ordem dos vértices no conjunto V é arbitrária, como exemplo, temos $V = \{\bigcirc, \diamondsuit, \clubsuit, \triangle, \heartsuit, \spadesuit\}$.

2. Consideremos o primeiro elemento do nosso conjunto independente $V_{ind} = \{\bigcirc\}$.

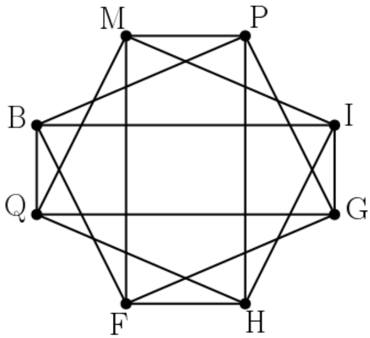
3. Seguindo a ordem em que listamos os vértices, podemos acrescentar $\diamondsuit$ ao conjunto.

4. Não podemos adicionar mais nenhum vértice ao conjunto sem haver conflito. Obtemos, assim, $V_{ind} = \{\bigcirc, \diamondsuit\}$, um conjunto independente maximal (mas que não é máximo).

Entretanto, se tivéssemos listado os vértices dessa forma: $V = \{\bigcirc, \spadesuit, \triangle, \diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit\}$; considerado o primeiro elemento do conjunto independente $V_{ind} = \{\bigcirc\}$, e seguido a ordem em que listamos os vértices, o próximo vértice a ser acrescentado ao conjunto seria $\triangle$. Ainda poderíamos acrescentar $\heartsuit$ ao conjunto. Obtendo, assim, o conjunto independente

$V_{ind} = \{\bigcirc, \triangle, \heartsuit\}$, que é maximo. Observe que nos dois casos seguimos todos os passos do algoritmo.

Exemplo 3.2.6. O grafo a seguir representa a incompatibilidade de horários entre professores das seguintes matérias: Matemática, Português, Inglês, Geografia, História, Física, Química e Biologia, que devem aplicar prova final, dois vértices estarão ligados se representarem professores que têm alunos em comum para ministrar a prova. Qual o maior número de professores que podem dar prova ao mesmo tempo? A resposta será um conjunto máximo do grafo.



1. Todos os vértices desse grafo possuem grau 4, então podemos ordenar os vértices no conjunto V em uma ordem qualquer, por exemplo $V = \{M, P, I, G, H, F, Q, B\}$.

2. Vamos começar pelo mais importante, o vértice M, e o acrescentaremos ao conjunto que queremos formar $V_{ind} = \{M\}$.

3. Não podemos adicionar P, I, F, Q ao conjunto. O próximo da lista que podemos incluir em V_{ind} é G. Assim, $V_{ind} = \{M, G\}$.

4. Observe que os dois vértices restantes, H e B, também podem ser colocados em V_{ind}, mantendo a independência do conjunto.

5. Dessa forma, obtemos $V_{ind} = \{M, G, H, B\}$.
6. Note que os vértices que não estão em V_{ind} também formam um conjunto independente com quatro vértices.

Portanto, quatro professores podem dar prova ao mesmo tempo, o que responde a nossa pergunta inicial.

3.3 Coloração de Vértices

É muito fácil realizar uma coloração dos vértices de um grafo. Para que vértices adjacentes não possuam a mesma cor, basta colorir cada vértice com uma cor diferente. Entretanto, o nosso objetivo é usar o mínimo de cores possível.

Observação 3.3.1. O processo de coloração de vértices só faz sentido para grafos simples. Caso contrário, teríamos um vértice adjacente a ele mesmo.

Teorema 3.3.2. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Lembrando que $\Delta(G)$ é o grau máximo dos vértices de G. Esse resultado é consequência do fato de que os vértices adjacentes ao vértice que será colorido utilizarem no máximo $\Delta(G)$ cores. Quando um vértice v está para ser colorido, o número de cores utilizadas por seus vizinhos já coloridos não é maior do que o seu grau $d(v)$, que, por sua vez, não é maior do que $\Delta(G)$. Assim, uma das cores $c_1, c_2, c_3, ..., c_{\Delta(G)+1}$ estará disponível ao tentarmos colorir cada um dos vértices v_i.

Teorema 3.3.3. Para um grafo G com n vértices, $\chi(G) \geq \dfrac{n}{\alpha(G)}$.

O processo de coloração de um grafo pode ser visto como uma busca por conjuntos independentes maximais sem vértices em comum, aos quais serão atribuídos cores diferentes. Seja $V_1, V_2, ..., V_k$ uma coloração dos vértices de G, cada V_i é um conjunto de vértices coloridos com a mesma cor c_i, para $1 \leq i \leq k$. O número de elementos de um V_i qualquer é menor ou igual a $\alpha(G)$, pois V_i é um conjunto independente de vértices de G, e $\alpha(G)$ é o maior número de elementos que um conjunto independente de G pode ter. Considerando $|V_i|$ o número de elementos do conjunto V_i, temos que $n = |V_1| + |V_2| + ... + |V_k| \leq k \cdot \alpha(G)$. Como temos que $\chi(G)$ é o menor k possível, temos $n \leq \chi(G)\alpha(G)$, e o resultado segue.

3.3.1 Algoritmo para colorir os vértices de um grafo

Inicialmente, vamos considerar i como a quantidade de cores utilizada para efetuar uma possível coloração dos vértices de um grafo G. Os conjuntos obtidos em T_i, para cada i, representam conjuntos de vértices em que não há conflito para que se utilize uma mesma cor na coloração.

Algoritmo 3.3.4. Coloração de vértices:

1. Faça uma lista V com os vértices do grafo G que iremos colorir em ordem decrescente de grau. Em caso de empate, escolha-os arbitrariamente.

2. $i = 0$.

3. Se $V \neq 0$ vá ao passo 4, caso contrário, vá ao passo 8.

4. $i = i + 1$.

5. Crie um conjunto T_i contendo somente o primeiro vértice v_j de V (o de maior grau).

6. Enquanto existir na fila algum vértice v_k não adjacente a qualquer vértice pertencente a T_i faça:

7. Coloque v_k em T_i.

8. Retire v_k de V.

9. Volte ao passo 3.

10. Fim.

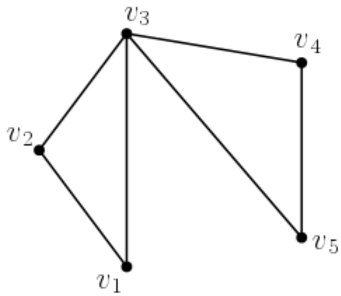
Como resultado, obtemos os conjuntos $T_1, T_2, ..., T_k$, que devem ser coloridos com cores distintas. Note que k representa o número de cores utilizadas na coloração obtida para o grafo G.

Observação 3.3.5. Temos $i = 0$ no algoritmo somente quando o grafo for vazio.

Observação 3.3.6. O resultado obtido depende da ordem em que escolhemos os vértices. Percebe-se que é fácil obter resultados diferentes.

Observação 3.3.7. Os problemas envolvendo coloração não possuem uma única solução, por isso nos referimos a <u>uma</u> possível coloração.

Para visualizarmos isso, vamos ver como podemos colorir o grafo a seguir de duas formas diferentes.



- Uma forma de colorirmos esse grafo é fazer: $T_1 = \{v_3\}$, $T_2 = \{v_1, v_5\}$ e $T_3 = \{v_2, v_4\}$.
- Também podemos colori-lo fazendo: $T_1 = \{v_3\}$, $T_2 = \{v_1, v_4\}$ e $T_3 = \{v_2, v_5\}$.

Em ambos os casos estamos seguindo o algoritmo, o que muda é a ordem em que escolhemos os vértices.

Observação 3.3.8. Note que $T_1, T_2, ..., T_k$ são conjuntos independentes do grafo G.

Observação 3.3.9. O algoritmo oferece uma boa aproximação para $\chi(G)$, porém não é garantido que seja este o valor obtido.

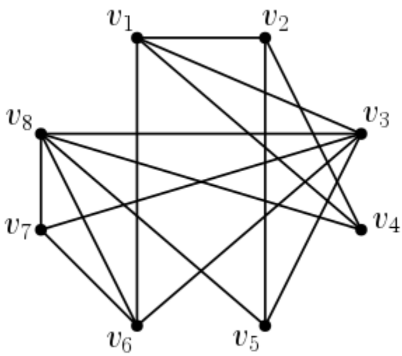
3.3.2 Coloração de Mapas

Uma aplicação do método de coloração de grafos é a coloração de mapas com a menor quantidade de cores possível. Cada região do mapa irá corresponder a um vértice do grafo; haverá uma aresta ligando dois vértices sempre que houver uma fronteira entre as duas regiões representadas pelos vértices.

A partir disso, temos o **Teorema das Quatro Cores**, que nos diz que qualquer mapa pode ser colorido com até quatro cores sem que vértices adjacentes recebam a mesma cor. Mais detalhes sobre isso podem ser encontrados na Seção 4.2.

3.3.3 Exemplos

Exemplo 3.3.10. Uma determinada escola pretende realizar suas provas finais de forma que não ocorra conflito de horários entre elas. A escola também deseja utilizar a menor quantia de períodos (cada período corresponde a 2 horas de prova) possível para a realização destas provas. Sob essas condições, como a escola poderia organizar os horários das provas?



v_1 - Matemática

v_2 - Português

v_3 - Ciências

v_4 - Inglês

v_5 - História

v_6 - Geografia

v_7 - Artes

v_8 - Filosofia

1. Nesse grafo há vértices de grau 5 (v_3, v_8), 4 (v_1, v_6) e 3 (v_2, v_4, v_5, v_7). Assim, $V = \{v_3, v_8, v_1, v_6, v_2, v_4, v_5, v_7\}$.

2. Como temos um grafo não vazio para colorir, começamos com $i = 1$. Acrescentamos v_3 ao nosso primeiro conjunto T_1.

3. O próximo vértice da nossa lista que podemos colocar em T_1 é v_2. Obtemos $T_1 = \{v_3, v_2\}$ e não conseguimos adicionar mais nenhum elemento nesse conjunto.

4. Seguindo o nosso algoritmo, os vértices restantes são $V_1 = \{v_8, v_1, v_6, v_4, v_5, v_7\}$.

5. Fazemos $i = 2$ e acrescentamos v_8 ao conjunto T_2.

6. Podemos colocar v_1 em T_2, assim, $T_2 = \{v_8, v_1\}$. Como não conseguimos adicionar mais nenhum vértice em T_2, fechamos o conjunto que será colorido com a segunda cor.

7. Ficamos com $V_2 = \{v_6, v_4, v_5, v_7\}$.

8. Fazemos $i = 3$ e acrescentamos v_6 ao conjunto T_3.

9. Ainda conseguimos colocar os vértices v_4 e v_5 em T_3, concluindo o conjunto de vértices da terceira cor: $T_3 = \{v_6, v_4, v_5\}$.

10. Por fim, temos $V_3 = \{v_7\}$.

11. Fazemos $i = 4$ e adicionamos v_7 ao conjunto T_4. $T_4 = \{v_7\}$.

12. Não resta mais nenhum vértice a ser considerado, logo concluímos a coloração desse grafo com quatro cores da seguinte forma: $T_1 = \{v_3, v_2\}$, $T_2 = \{v_8, v_1\}$, $T_3 = \{v_6, v_4, v_5\}$, $T_4 = \{v_7\}$.

Dessa forma, a escola pode organizar os horários das provas em quatro períodos:
1º Período: Português e Ciências.
2º Período: Filosofia e Matemática.
3º Período: Geografia, Inglês e História.
4º Período: Artes.

Exemplo 3.3.11. Vamos comprovar o Teorema das Quatro Cores e pintar o mapa do Brasil, de modo que estados com fronteiras em comum tenham cores diferentes, usando apenas quatro cores.

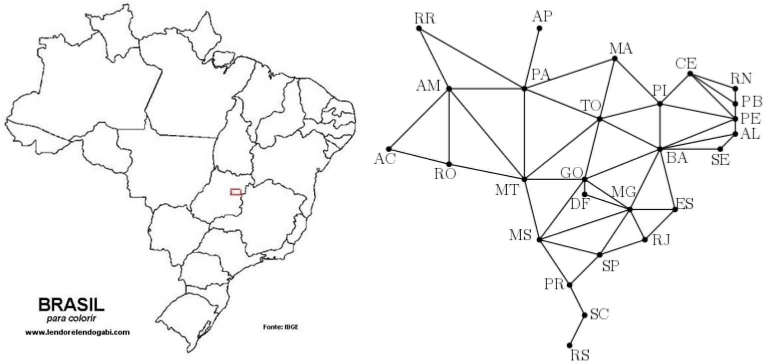


Figura 3.1

1. Primeiro vamos listar os estados em ordem decrescente de grau: $V = \{BA, MG, GO, MT, PA, TO, AM, MS, PE, PI, CE, SP, AL, ES, MA, PB, PR, RJ, RO, AC, DF, RN, RR, SC, SE, AP, RS\}$; o número de estados com os quais cada um faz fronteira é, respectivamente, $\{8, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1\}$.

2. Como o mapa do Brasil não é um grafo vazio, começamos com $i = 1$, e adicionamos BA no primeiro conjunto T_1.

3. O próximo vértice/estado que podemos colocar em T_1 é MT. Em seguida, na odem de V, acrescentamos $CE, SP, MA, AC, DF, RR, SC, AP$. Após ter adicionado esses vértices, concluímos o conjunto de estados

que será colorido com a primeira cor: $T_1 = \{BA, MT, CE, SP, MA, AC, DF, RR, SC, AP\}$.

4. Continuando o processo, temos $V_1 = \{MG, GO, PA, TO, AM, MS, PE, PI, AL, ES, PB, PR, RJ, RO, RN, SE, RS\}$.

5. Fazemos $i = 2$ e colocamos MG no conjunto T_2.

6. Ainda conseguimos adicionar PA em T_2, bem como PE, PR, RO, RN, SE, RS. Finalizando o conjunto que será colorido com a segunda cor: $T_2 = \{MG, PA, PE, PR, RO, RN, SE, RS\}$.

7. Agora, $V_2 = \{GO, TO, AM, MS, PI, AL, ES, PB, RJ\}$.

8. Fazemos $i = 3$ e acrescentamos GO ao conjunto T_3.

9. Podemos colocar AM em T_3, e ainda PI, AL, ES, PB. E o conjunto que será colorido pela terceira cor está completo: $T_3 = \{GO, AM, PI, AL, ES, PB\}$.

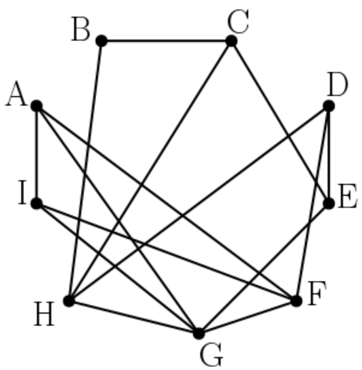
10. Resta-nos $V_3 = \{TO, MS, RJ\}$.

11. Fazendo $i = 4$, esses vértices remanescentes formarão o conjunto que será colorido pela quarta cor: $T_4 = \{TO, MS, RJ\}$.

Exemplo 3.3.12. O dono de uma loja de animais comprou certa quantidade de peixes ornamentais de diversas espécies, com um exemplar de cada espécie. Alguns destes peixes não podem ficar no mesmo aquário. Qual a quantidade mínima de aquários que o dono precisa para ambientalizar os peixes? A incompatibilidade entre as espécies está retratada na tabela a seguir (um X nessa tabela significa que as espécies representadas nas respectivas linhas e colunas não devem ficar no mesmo aquário):

.	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A						X	X		X
B			X					X	
C		X			X			X	
D					X	X		X	
E			X	X			X		
F	X			X			X		X
G	X				X	X		X	X
H		X	X	X			X		
I	X					X	X		

O grafo que irá modelar o nosso problema é:



1. Em ordem alfabética, os vértices têm grau, respectivamente, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 4, 3. Logo, $V = \{G, F, H, A, C, D, E, I, B\}$.

2. Temos um grafo não vazio para colorir, então iniciamos com $i = 1$, e acrescentamos G a T_1.

3. O próximo vértice possível de adicionar em T_1 é C. Nesse primeiro conjunto ainda podemos colocar D, ficando com $T_1 = \{G, C, D\}$.

4. Seguindo o nosso passo a passo, os vértices restantes são $V_1 = \{F, H, A, E, I, B\}$.

5. Fazemos $i = 2$, e adicionamos F em T_2.

6. Pela ordem em que listamos os vértices, o próximo a entrar em T_2 é H. Por fim, colocamos E em T_2, concluindo esse conjunto: $T_2 = \{F, H, E\}$.
7. Restam os vértices $V_2 = \{A, I, B\}$.
8. Fazemos $i = 3$, e acrescentamos A a T_3.
9. O único vértice que conseguimos adicionar em T_3 é B, finalizando o conjunto $T_3 = \{A, B\}$.
10. Ficamos com $V_3 = \{I\}$, que será o nosso $T_4 = \{I\}$.

Podemos concluir que o dono da loja precisará de 4 aquários para os seus peixes.

3.4 Coloração de Arestas

A coloração do conjunto de arestas de um grafo consiste na atribuição de cores a elas de forma que arestas adjacentes recebam cores diferentes. Podemos dizer que a coloração de arestas é um caso particular da coloração de vértices, pois a coloração de uma aresta implica a associação dos vértices de suas extremidades.

Podemos ilustrar a coloração de arestas a partir do seguinte problema. Suponha que precisemos dividir uma turma de alunos de dança em duplas, sem que se mantenham as mesmas duplas para dançar ritmos distintos. Neste caso, podemos observar que cada pessoa deve fazer parte de mais de uma dupla. Ao representarmos o problema por meio de um grafo, temos que os vértices correspondem a cada um dos alunos e as arestas correspondem a cada uma das duplas. Ensaios de diferentes ritmos não podem acontecer no mesmo horário quando um integrante precisar estar em ambos os grupos. Assim, podemos atribuir uma cor a cada horário de ensaio visando à utilização do menor número de cores possível para que o grafo seja colorido corretamente.

3.4.1 Índice Cromático

Chamamos uma coloração de arestas de **mínima** quando o número de cores utilizadas é o menor possível. Se não existe uma coloração que necessite menos cores, temos então o **índice cromático** do grafo, que é o número de cores usadas na coloração mínima. O índice cromático de um grafo G é denotado por $\chi'(G)$.

Observação 3.4.1. $\chi'(G) = \chi(G')$, onde G' é o grafo das arestas de G.

Observação 3.4.2. Como arestas incidentes a um mesmo vértice devem ter cores distintas, segue que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, onde $\Delta(G)$ denota o grau máximo do grafo G.

Observação 3.4.3. Decorre do Teorema de Vizing que $\Delta(G)$ $+ 1$ é o número máximo de cores necessárias para colorir qualquer grafo. Podemos chamar esse fato de **delimitação superior**.

3.4.2 Algoritmo para coloração de arestas com no máximo $\Delta(G) + 1$ cores

Inicialmente, vamos considerar um grafo G não colorido. A cada iteração escolheremos uma aresta de G até então não escolhida. Nosso objetivo é encontrar uma cor c_n, $n = 1, ..., \Delta(G) + 1$, que não incida nos vértices v_i e v_j, $i \neq j$, para colorir a aresta $e_m(v_i; v_j)$, onde m, i e j são índices de acordo com o número de arestas e vértices, respectivamente. Desta forma, temos 3 casos a serem analisados.

(i) O primeiro caso ocorre quando escolhemos uma cor c_1 para colorir a aresta $e_1(v_0; v_1)$. A partir disso, observamos a aresta $e_2(v_1; v_2)$, descartamos as cores incidentes nos vértices v_1 e v_2 e escolhemos uma cor dentre as não descartadas para colorir e_2. Repetimos o processo para as demais arestas $e_m(v_i; v_j)$ até que todas as arestas do grafo sejam coloridas. (Exemplo 3.4.4.)

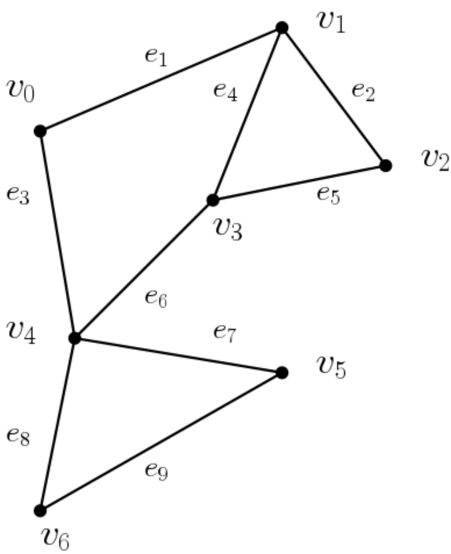
(ii) No segundo caso, determinamos um caminho P partindo do vértice v_0. Seja $e_1(v_0; v_1)$, se P não termina em v_1, então as cores c_1 e c_2 podem ser alternadas por esse caminho e a aresta e_1 pode ser colorida com a cor c_2. (Exemplo 3.4.5.)

(iii) Dado novamente um caminho P partindo do vértice v_0, o caso três se configura quando P termina no vértice v_1. Se isso acontece, a cor c_1 é removida da aresta $e_m(v_0; v_i)$, $i \neq 1$, e inserida na aresta $e_1(v_0; v_1)$. Então, na interação seguinte, colorimos a aresta $e_m(v_0; v_i)$ com uma cor c_3. (Exemplo 3.4.6.)

3.4.3 Exemplos

Exemplo 3.4.4. Dado o seguinte grafo G, temos que $\Delta(G) = 3$ e, portanto, $\Delta(G) + 1 = 4$. Logo, precisamos colorir as arestas de G com no máximo 4 cores.

1. Primeiro, nomeamos os vértices v_i e as arestas e_m do grafo de modo que i e m sejam sequências de índices para o número de vértices e o número de arestas, respectivamente.



2. Sejam c_1, c_2, c_3 e c_4 cores distintas. Vamos atribuir a cor c_1 à aresta $e_1(v_0; v_1)$.

3. Agora, observemos a aresta $e_2(v_1; v_2)$; descartamos a cor c_1 pois ela incide no vértice v_1 e escolhemos a cor c_2 para colorir e_2.

4. Para a aresta $e_3(v_0; v_4)$, descartamos a cor c_1, pois ela incide em v_0 e podemos escolher a cor c_2 para colorir e_3. (Repare que até o momento nenhuma cor incide em v_4, o que nos permite essa escolha de uma cor anteriormente utilizada. Só escolhemos uma nova cor quando as incidências nos vértices correspondentes nos fazem descartar as cores já escolhidas.)

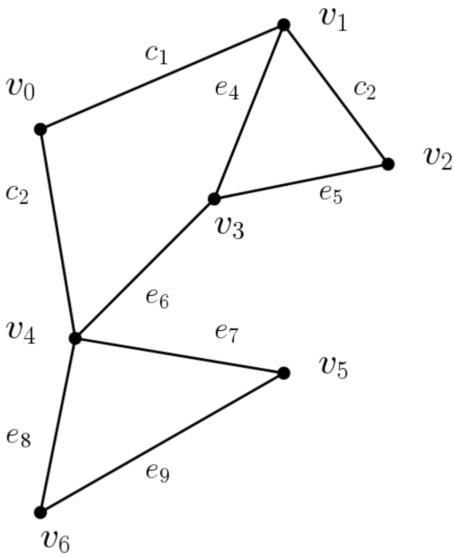


Figura 3.2: Note que estamos substituindo os nomes das arestas e_m pelas suas cores c_n correspondentes.

5. Para a aresta $e_4(v_1; v_3)$, descartamos as cores c_1 e c_2 incidentes em v_1 e escolhemos uma nova cor c_3 para colorir e_4.

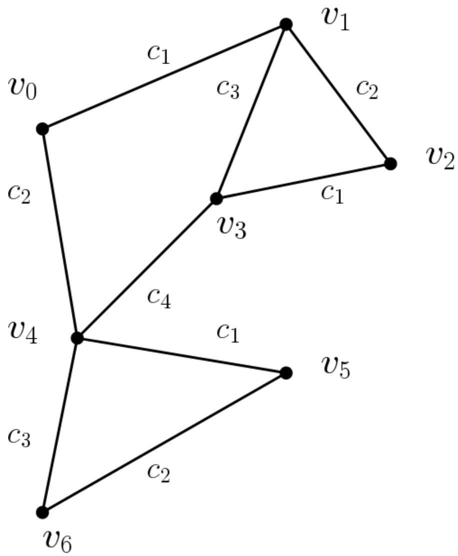
6. Para a aresta $e_5(v_2; v_3)$, descartamos c_2 incidente em v_2 e c_3 incidente em v_3 e escolhemos c_1 para colorir e_5.

7. Para $e_6(v_3; v_4)$, descartamos c_1 e c_3 incidentes em v_3 e c_2 incidente em v_4. Então, colorimos e_6 com c_4.

8. Para $e_7(v_4; v_5)$, descartamos c_2 e c_4 incidentes em v_4 e colorimos e_7 com c_1.

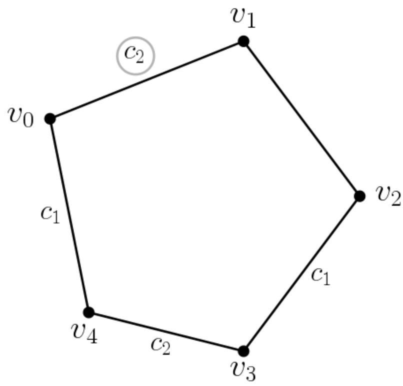
9. Para $e_8(v_4; v_6)$, descartamos c_1, c_2 e c_4 incidentes em v_4 e colorimos e_8 com c_3.

10. Por fim, para $e_9(v_5; v_6)$, descartamos c_1 e c_3 e colorimos e_9 com c_2, obtendo a seguinte figura:

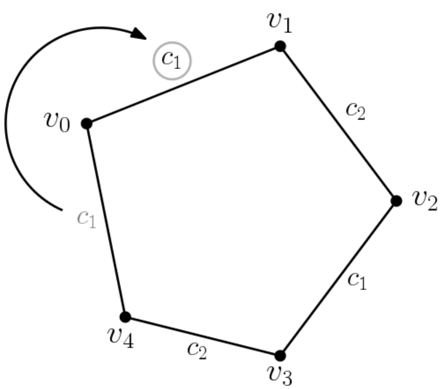


Portanto, foi possível colorir as arestas do grafo G com $\Delta(G) + 1 = 4$ cores.

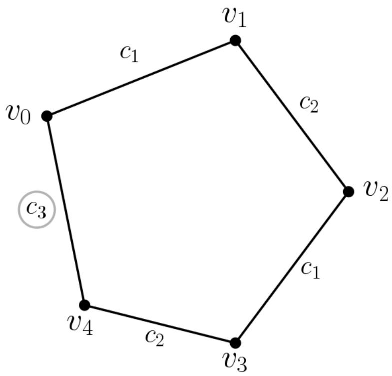
Exemplo 3.4.5. Dados o seguinte grafo e um caminho $P = v_0, v_4, v_3, v_2$. Note que podemos colorir as arestas $e_5(v_0; v_4)$, $e_4(v_4; v_3)$ e $e_3(v_3; v_2)$ com as cores c_1, c_2 e c_1 respectivamente. Portanto, como o caminho P não termina no vértice v_1, podemos colorir a aresta $e_1(v_0; v_1)$ com a cor c_2.



Exemplo 3.4.6. Sendo P $= v_0,\ v_4,\ v_3,\ v_2,\ v_1$, colorimos as arestas $e_5(v_0; v_4)$, $e_4(v_4; v_3)$, $e_3(v_3; v_2)$ e $e_2(v_2; v_1)$ com as cores c_1 e c_2, respectiva e alternadamente. Na sequência, removemos a cor c_1 da aresta $e_5(v_0; v_4)$ e aplicamos na aresta $e_1(v_0; v_1)$.

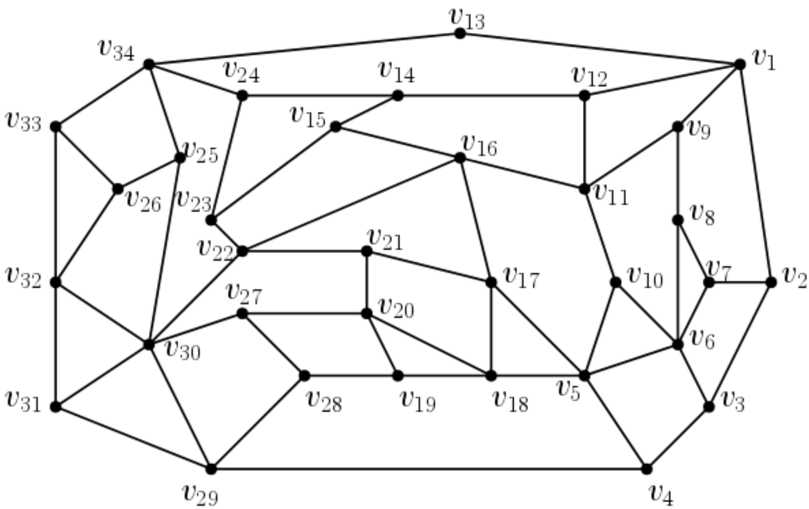


Por fim, colorimos a aresta $e_5(v_0, v_4)$ com uma cor c_3.



3.5 Exercícios

Exercício 3.5.1. Em um parque, representado pelo grafo a seguir, queremos instalar barracas para venda de sorvete. Cada barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice). Esquinas próximas (vértices adjacentes) só admitem uma barraca. Estamos procurando um conjunto independente máximo, pois queremos instalar o maior número de barracas possível.



Exercício 3.5.2. Em um parque idêntico ao do exercício anterior, pretendem instalar barracas de sorvete, pipoca, cachorro-quente, algodão doce, sucos, etc. Cada barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice). Esquinas próximas (vértices adjacentes) só admitem barracas com serviços diferentes. A empresa que cuida do parque gostaria de contratar o menor número de serviços possível. Qual é o mínimo de serviços que podemos usar?

Exercício 3.5.3. Considerando grafos cíclicos, estabeleça uma fórmula para $\alpha(G)$ e $\chi(G)$ em função do seu número de vértices n. Dica: faça um desenho para ver o que acontece e separe em ciclos pares e ímpares.

Exercício 3.5.4. A tabela mostra a distribuição de alunos nos exames finais que devem prestar. Duas disciplinas só podem ter exames realizados ao mesmo tempo se não houver alunos em comum. Construa um grafo com vértices $\{M, P, I, G, H, F, Q, B\}$, de modo a respeitar as restrições da tabela, e aplique o algoritmo para coloração.

Alunos	A	B	C	D	E	F	G	H
Matemática	X							X
Português	X			X				
Inglês						X	X	
Geografia				X	X		X	
História			X					
Física			X		X			
Química		X						X
Biologia		X				X		

Alunos	I	J	K	L	M	N	O	P
Matemática				X			X	
Português			X					X
Inglês		X					X	
Geografia	X							
História		X				X		X
Física				X	X			
Química	X					X		
Biologia			X		X			

Exercício 3.5.5. Aplique a coloração de vértices no mapa da América do Sul.

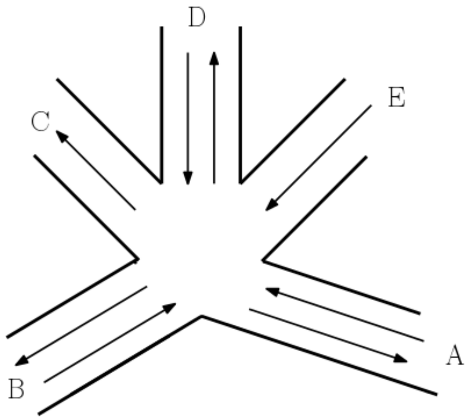
Figura 3.3

Exercício 3.5.6. Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, X usando o menor número de contêineres. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo contêiner porque reagem. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C, X reagem e A reage com F e D; e E também reage com F, D. Monte o grafo que modela essa situação e use esse grafo para descobrir o menor número de contêineres necessários para embarcar os produtos com segurança.

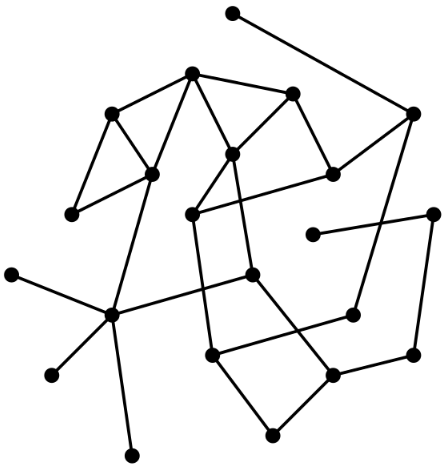
Exercício 3.5.7. Uma companhia industrial deseja armazenar sete diferentes produtos farmacêuticos $F_1, F_2, ..., F_7$ de modo que alguns destes produtos não podem ser armazenados em um mesmo ambiente, por motivos de segurança. Determine o número mínimo de localizações necessárias para armazenar tais produtos, sabendo que:

- F_1 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_2, F_6, F_7;
- F_2 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_1, F_3, F_4;
- F_3 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_2, F_4, F_5;
- F_4 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_2, F_3, F_5;
- F_5 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_3, F_4, F_6, F_7;
- F_6 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_1, F_4, F_5, F_7;
- F_7 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_1, F_5, F_6;

Exercício 3.5.8. Vamos determinar os períodos de um sinal de trânsito usando coloração. O desenho abaixo representa um cruzamento com as direções permitidas assinaladas por setas. Como organizar o trânsito? Vamos fazer um grafo cujos vértices serão as direções possíveis, e ligaremos dois vértices sempre que as direções forem incompatíveis.



Exercício 3.5.9. Dado o problema das duplas de dança enunciado no Capítulo 3.4. O seguinte grafo representa a distribuição dos 22 alunos dentro de uma sala de aula. Cada uma das arestas representa as duplas que os alunos formam entre si, de acordo com os ritmos que dançam.



(a) Enumere os vértices de acordo com seu respectivo grau.

(b) Seja cada cor a representante de um horário distinto para ensaio, faça a coloração das arestas do grafo de duas maneiras diferentes, de forma que cada uma se inicie pelas arestas adjacentes a vértices de graus diferentes.

(c) O número de cores necessárias para colorir as arestas do grafo foi diferente em cada um dos casos do Item b?

(d) Qual foi a quantidade de horários de ensaio necessária para que as duplas não precisem estar em lugares distintos simultaneamente?

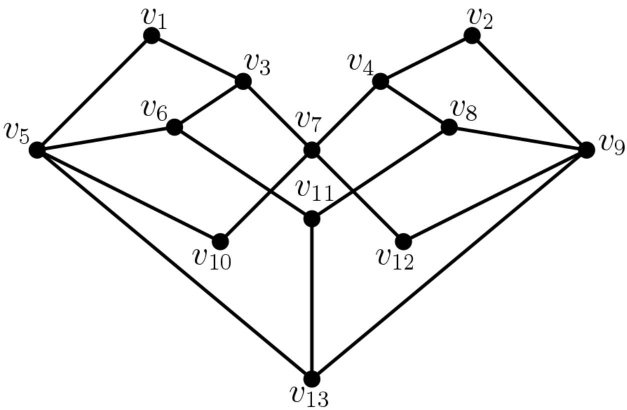
(e) Qual foi a relação encontrada entre o número de cores necessárias para a coloração das arestas e $\Delta(G)$ do grafo?

Exercício 3.5.10. Desenhe e faça a coloração das arestas de cada um dos grafos pedidos nos itens a seguir:

(a) Um grafo com 10 vértices, tal que 3 vértices tenham grau $\Delta(G) = 4$.

(b) Um grafo com 7 vértices cujas arestas não se cruzem e pelo menos dois vértices tenham grau igual a 3.

Exercício 3.5.11. Faça a coloração das arestas do seguinte grafo de acordo com os caminhos P_1 e P_2, dadas as respectivas circunstâncias dos itens abaixo, de acordo com os Casos ii e iii do Capítulo 3.4.2.



(a) Inicie a coloração das arestas do grafo pelo caminho $P_1 = v_1, v_5, v_6, v_{11}, v_8, v_4, v_7$, tal que $e_1(v_1; v_3)$ e $e_2(v_1; v_5)$. Depois, faça a coloração das arestas que não pertencem ao caminho, de acordo com o Caso i do Capítulo 3.4.2.

(b) Inicie a coloração das arestas do grafo pelo caminho $P_2 = v_1, v_5, v_{13}, v_9, v_2, v_4, v_8, v_{11}, v_6, v_3$, tal que $e_1(v_1; v_3)$ e $e_2(v_1; v_5)$. Depois, faça a coloração das arestas que não pertencem ao caminho, de acordo com o Caso i do Capítulo 3.4.2. O número par ou ímpar de arestas num caminho P implica algo em relação ao Caso iii do mesmo capítulo?

3.6 Desafios

Exercício 3.6.1. Aplique o processo de coloração de vértices no mapa dos Estados Unidos.(São 49 estados, pois não estamos incluindo o Alasca e o Hawaii)

© 2004 Jaed Benedict. This work is licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/ or send a tet to Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305 USA.

Figura 3.4

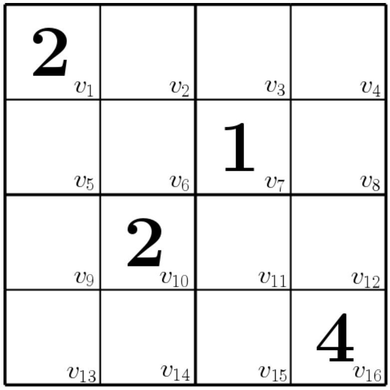
Exercício 3.6.2. Resolução de um Sudoku 4x4 usando coloração de vértices.

Cada célula do sudoku é um vértice, há uma aresta entre dois vértices se as células estão na mesma linha, coluna ou na mesma subgrade 2×2. Cada número de 1 a 4 corresponde a uma cor.

Os dados para iniciar a resolução são fornecidos.

Todos os 16 vértices terão grau 7, uma sugestão de como enumerar as células como vértices está dada no Sudoku.

Tente usar esse raciocínio nessa configuração inicial:



3.7 Respostas

Resposta 3.7.1. Exercício 3.5.1
Lista dos vértices em ordem crescente de grau: $V = \{v_{13}, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{19}, v_{21}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, v_{27}, v_{28}, v_{31}, v_{33}, v_1, v_{11}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{20}, v_{22}, v_{29}, v_{32}, v_{34}, v_5, v_6, v_{30}\}$.
Seguindo o algoritmo com os vértices ordenados dessa forma, conseguimos determinar $V_{ind} = \{v_{13}, v_2, v_4, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{15}, v_{19}, v_{21}, v_{24}, v_{25}, v_{27}, v_{31}, v_{33}\}$, um conjunto independente com 14 vértices.

Resposta 3.7.2. Exercício 3.5.2
Lista dos vértices em ordem decrescente de grau: $V = \{v_{30}, v_5, v_6, v_1, v_{11}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{20}, v_{22}, v_{29}, v_{32}, v_{34}, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{19}, v_{21}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, v_{27}, v_{28}, v_{31}, v_{33}, v_{13}\}$.
Seguindo o algoritmo com os vértices ordenados dessa forma, obtemos:
$T_1 = \{v_{30}, v_5, v_1, v_{11}, v_{20}, v_{34}, v_3, v_7, v_{14}, v_{23}, v_{26}, v_{28}\}$.
$T_2 = \{v_6, v_{16}, v_{18}, v_{29}, v_{32}, v_2, v_9, v_{12}, v_{21}, v_{24}, v_{25}, v_{27}, v_{13}\}$.
$T_3 = \{v_{17}, v_{22}, v_4, v_8, v_{10}, v_{15}, v_{19}, v_{31}, v_{33}\}$.

Resposta 3.7.3. Exercício 3.5.3

Ciclo Par: $\alpha(G) = \dfrac{n}{2}$ e $\chi(G) = 2$.

Ciclo Ímpar: $\alpha(G) = \dfrac{n-1}{2}$ e $\chi(G) = 3$.

Resposta 3.7.4. Exercício 3.5.4

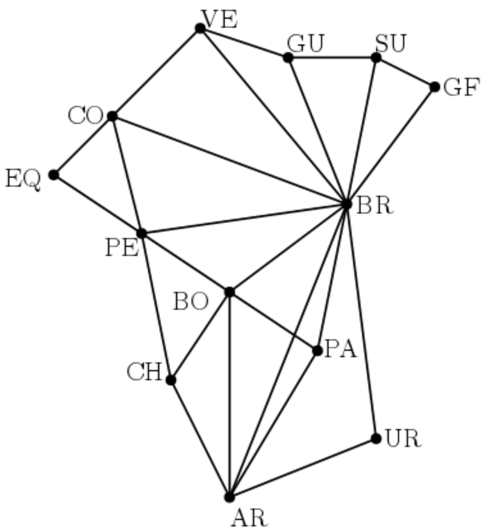
O grafo que ilustra esse problema é o mesmo do Exemplo 3.2.6, com todos os vértices de grau 4. Vamos ordená-los da mesma forma que ordenamos no Exemplo 3.2.6: $V = \{M, P, I, G, H, F, Q, B\}$.

Aplicando o algoritmo com os vértices ordenados dessa forma, determinamos:

$T_1 = \{M, G, H, B\}$;

$T_2 = \{P, I, F, Q\}$.

Resposta 3.7.5. Exercício 3.5.5



$V = \{BR, AR, BO, PE, CO, CH, GU, PA, SU, VE, EQ, GF, UR\}$.

Seguindo o algoritmo com os vértices nessa ordem, obtemos:

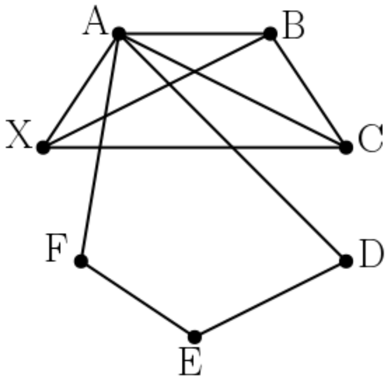
$T_1 = \{BR, EQ, CH\}$;

$T_2 = \{AR, PE, GU, GF\}$;

$T_3 = \{BO, CO, SU, UR\}$;

$T_4 = \{PA, VE\}$.

Resposta 3.7.6. Exercício 3.5.6



$V = \{A, B, C, X, D, E, F\}$.

Seguindo o algoritmo com os vértices nessa ordem, obtemos:

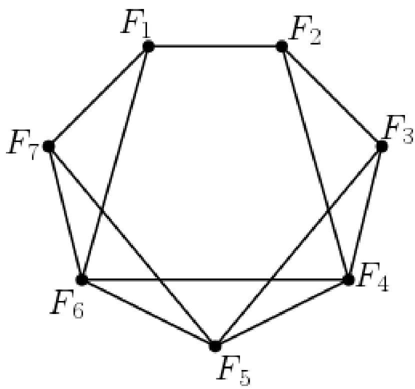
$T_1 = \{A, E\}$;

$T_2 = \{B, D, F\}$;

$T_3 = \{C\}$;

$T_4 = \{X\}$.

Resposta 3.7.7. Exercício 3.5.7



$V = \{F_4, F_5, F_6, F_1, F_2, F_3, F_7\}$.

Seguindo o algoritmo com os vértices nessa ordem, obtemos:

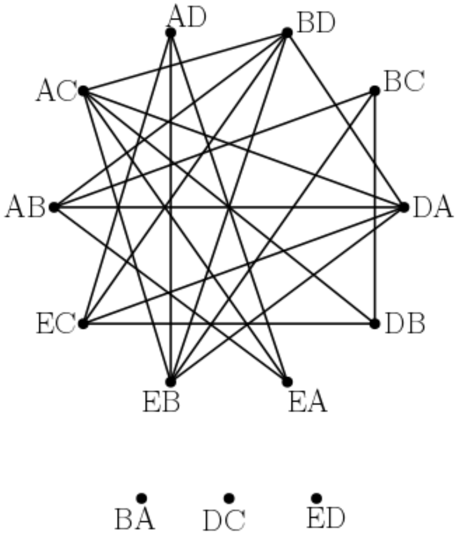
$T_1 = \{F_4, F_1\}$;

$T_2 = \{F_5, F_2\}$;

$T_3 = \{F_6, F_3\}$;

$T_4 = \{F_7\}$.

Resposta 3.7.8. Exercício 3.5.8
Primeiro, precisamos considerar todas as direções possíveis: AB, AC, AD, BA, BC, BD, DA, DB, DC, EA, EB, EC, ED. Agora, montamos o grafo desse problema, no qual cada vértice será uma direção possível, e haverá uma aresta ligando dois vértices se as respectivas direções não puderem ocorrer ao mesmo tempo.



$V = \{AC, BD, DA,$
$EB, AB, EC, AD, BC,$
$DB, EA, BA, DC, ED\}$.

Seguindo o algoritmo com os vértices nessa ordem, obtemos:

$T_1 = \{AC, AB, EC\}$;

$T_2 = \{BD, AD, BC\}$;

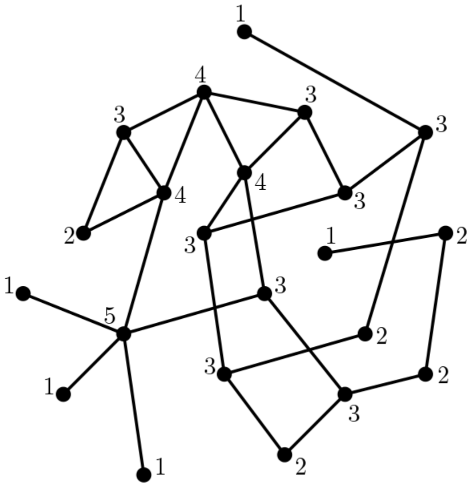
$T_3 = \{DA, DB, EA\}$;

$T_4 = \{EB\}$.

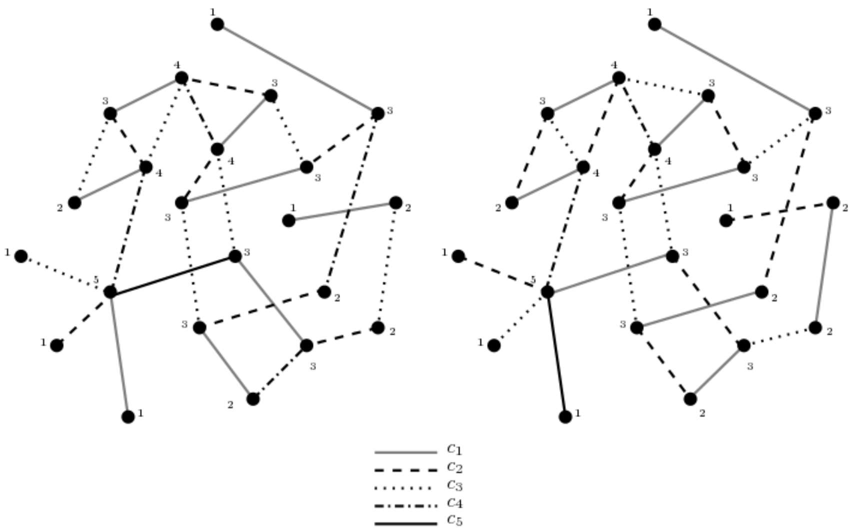
E podemos colocar os vértices BA, DC, ED em qualquer um dos quatro conjuntos.

Resposta 3.7.9. Exercício 3.5.9

(a)



(b) Esquerda: coloração a partir do vértice de grau 5.
Direita: coloração a partir de um vértice de grau 1.



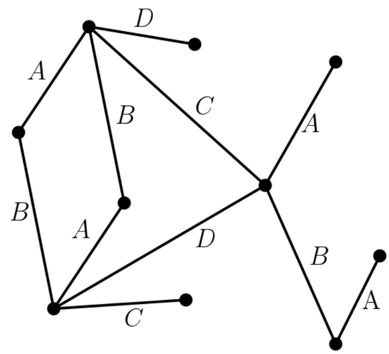
(c) Não, em ambos os casos foi utilizado o mesmo número de cores.

(d) 5 horários.

(e) O número de cores utilizadas corresponde a $\Delta(G) + 1$.

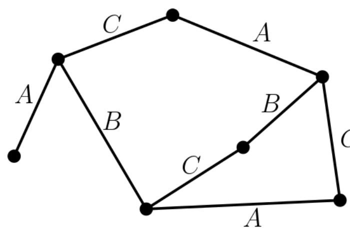
Resposta 3.7.10. Exercício 3.5.10

(a) Possível solução:



Onde cada letra corresponde a uma cor.

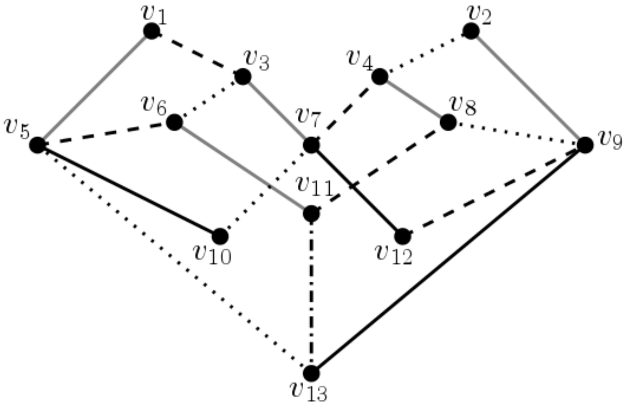
(b) Possível solução:



Onde cada letra corresponde a uma cor.

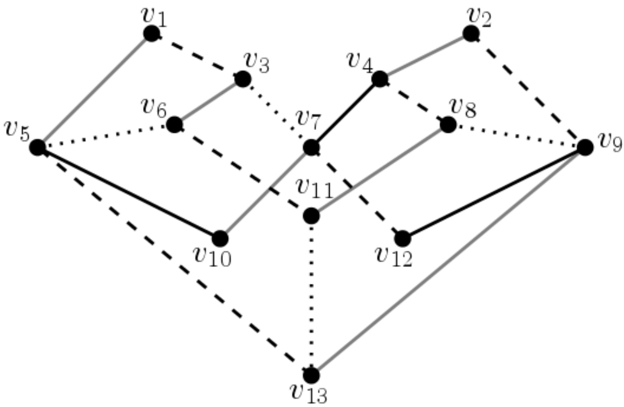
Resposta 3.7.11. Exercício 3.5.11

(a)



Observação 3.7.12. É importante a correção da coloração dos vértices que pertencem ao caminho P_1. A coloração dos demais vértices possui diversas possibilidades.

(b)



Observação 3.7.13. É importante a correção da coloração dos vértices que pertencem ao caminho P_2. A coloração dos demais vértices possui diversas possibilidades.

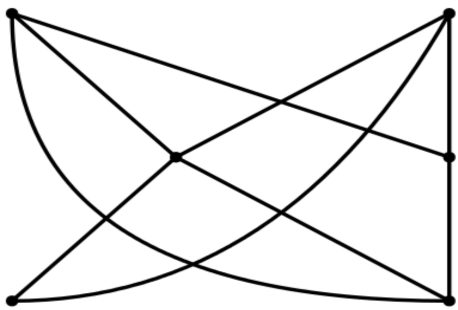
Se o número de arestas do caminho é par, então a aresta $e_1(v_1; v_3)$ pode receber a cor c_2, sem que haja necessidade da troca de cor da aresta $e_2(v_1; v_5)$.

Capítulo 4

Grafos Planares e Duais

4.1 Grafos Planares

Até agora vimos que um grafo nada mais é do que pontos e arestas que se ligam de alguma forma, certo? Como por exemplo



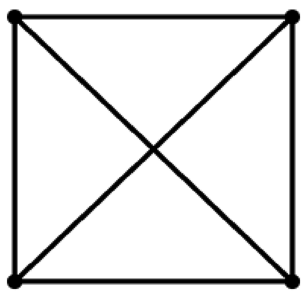
Mas agora podemos nos fazer a seguinte pergunta: "Dado um grafo G, será que existe uma forma de "desenhar" este mesmo grafo, de modo que nenhuma aresta se cruze?". Em outras palavras, queremos manter os mesmos vértices e arestas se ligando mas que não haja cruzamento de arestas. Os grafos com esta propriedade serão chamados de **grafos planares** e nosso objetivo neste capítulo é determinar quando um grafo é planar. Então vamos definir mais formalmente este conceito.

4.1.1 Definições e Exemplos

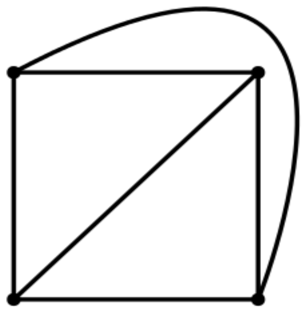
Neste capítulo, todos os grafos que iremos considerar serão conexos.

Definição 4.1.1. Dado um grafo G, dizemos que G é **planar** se for possível movimentar as arestas e vértices de modo a manter as mesmas relações e o grafo G' obtido não deve possuir arestas que se cruzem, a não ser nos vértices. Diremos que G' será a **representação planar** do grafo G.

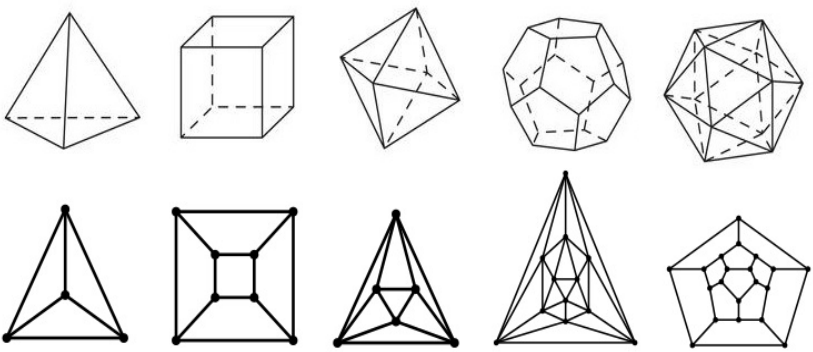
Por exemplo, considere o grafo formado por um quadrado e suas diagonais, como na figura abaixo



Note que este grafo a princípio não é planar, porém podemos mudar a posição de uma das diagonais de modo a obter um grafo segundo a Definição 4.1.1, logo obtemos uma representação planar do grafo original, como podemos ver na figura.

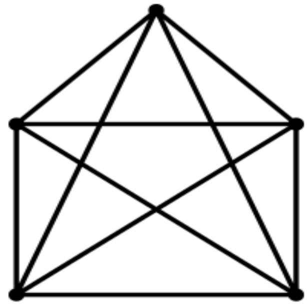


Um exemplo muito importante de grafos planares, são os **sólidos platônicos**: tetraedo, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Assim, se planifcarmos cada um desses sólidos obteremos um grafo, que com alguns ajustes será possível torná-lo planar, como mostra a figura.



Note que o comprimento das arestas pode aumentar ou diminuir, mas as mesmas ligações são mantidas. Como vimos nos exemplos, em alguns grafos é fácil encontrar sua representação planar, e todos os exemplos que apresentamos até o momento são de grafos planares.

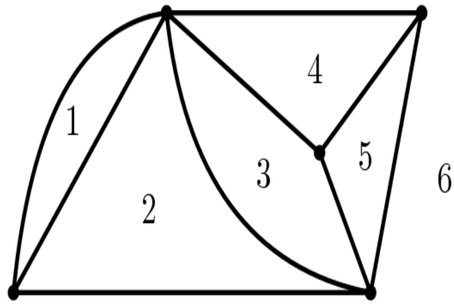
Desta forma, surge uma pergunta natural:"Todos os grafos são planares?". Essa pergunta será respondida em breve, não se preocupe. Mas para te motivar, tente pensar na representação planar deste grafo.



4.1.2 Teorema de Euler e Desigualdades

Agora que já sabemos o que é um grafo planar, estamos interessados em encontrar exemplos de grafos não planares. Para isso, vamos tentar relacionar suas quantidades de arestas e vértices.

Deixe me te fazer mais uma pergunta: “Quantas arestas pode ter um grafo planar?”. Em breve iremos responder essa pergunta. Primeiro vamos definir alguns conceitos. Observe que dado um grafo com pelo menos um ciclo, este grafo separa o plano em regiões, como mostra a figura.



Estas regiões serão chamadas de **faces**. Não se esqueça que uma das faces é tudo o que “sobra” do plano, isto é, a parte externa do grafo. Essa face será chamada de **face ilimitada**. Agora vamos apresentar um resultado muito conhecido para poliedros convexos que poderemos utilizar no estudo de grafos, a Fórmula de Euler.

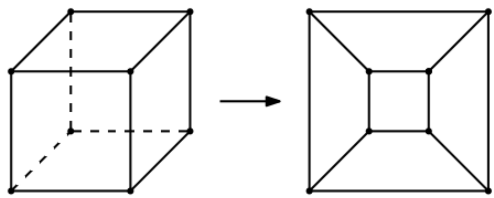
Teorema 4.1.2 (Fórmula de Euler)**.** Em um grafo planar conexo G vale a seguinte relação

$$f - a + v = 2$$

onde f é o número de faces, a o número de arestas e v o número de vértices do grafo G.

A demonstração deste teorema será feita na próxima seção, não se preocupe. Mas tente pensar em uma maneira de prová-lo.

Agora, estamos interessados em encontrar uma relação que envolva a quantidade de arestas e vértices de um grafo planar conexo. Vamos analisar o seguinte grafo.



Veja que esse grafo é planar e conexo, e ainda perceba que ele possui 8 vértices (v) e 12 arestas (a). Assim, a desigualdade $12 \leq 3 \cdot 8 - 6$ é satisfeita para o nosso exemplo. Isso nos motiva a formular o seguinte resultado.

Teorema 4.1.3. Num grafo planar conexo G vale $a \leq 3v - 6$.

Demonstração. Para realizar essa demonstração, precisamos de algumas observações. Primeiro, note que dada uma face de um grafo, são necessárias pelo menos 3 arestas para formar essa face. Assim, considere um grafo G com k faces f_i. Se denotarmos o números de arestas que compõem a face f_i por $d(f_i)$, obtemos a seguinte relação $d(f_i) \geq 3$. Ainda mais, quando somamos o número de arestas de cada face, estamos contando duas vezes o valor real de arestas, verifique. Então temos a seguinte relação

$$2a = \sum_{i=1}^{k} d(f_i) \tag{4.1}$$

É muito importante lembrar que existe uma face externa, chamada de ilimitada. Assim, quando for verificar que vale a igualdade (4.1), não se esqueça dela. Com este ingredientes, temos a seguinte relação

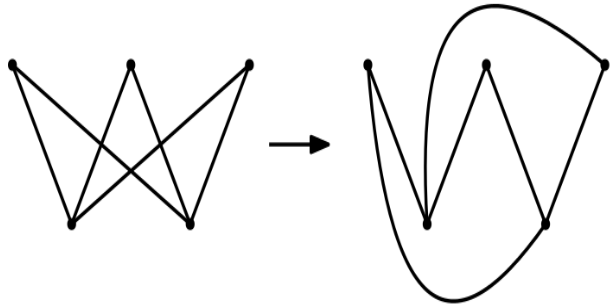
$$2a = \sum_{i=1}^{k} d(f_i) \geq \sum_{i=1}^{k} 3 = 3f$$

Isto é, $3f \leq 2a$. Agora, pela Fórmula de Euler, temos que $f - a + v = 2$, então

$$\begin{aligned} f - a + v = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 + a - v = f \\ &\Leftrightarrow \quad 6 + 3a - 3v = 3f \\ &\Rightarrow \quad 6 + 3a - 3v \leq 2a \\ &\Leftrightarrow \quad a \leq 3v - 6 \end{aligned}$$

Portanto, temos que em um grafo planar conexo vale a relação $a \leq 3v - 6$. □

Da mesma forma que fizemos anteriormente, vamos buscar uma relação entre o número de vértices e arestas de um grafo bipartido conexo. Lembre-se que um **grafo bipartido** é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos A e B tais que toda aresta conecta um vértice em A a um vértice em B. Para isso considere o seguinte grafo.



Note que o grafo em questão é bipartido, conexo e planar, além disso possui 5 vértices (v) e 6 arestas (a). Então vemos que este grafo satisfaz a desigualdade $6 \leq 2 \cdot 5 - 4$. Logo, podemos formular a seguinte relação entre o número de vértices e arestas de um grafo bipartido conexo.

Teorema 4.1.4. Em um grafo planar bipartido conexo G vale $a \leq 2v - 4$.

Demonstração. Observe agora, que em grafo bipartido as faces serão formadas por pelo menos 4 arestas, verifique com alguns exemplos. Desta forma obtemos a seguinte relação $d(f_i) \geq 4$. Portanto, com um raciocínio análogo da soma do número de arestas que fizemos no Teorema 4.1.3, temos

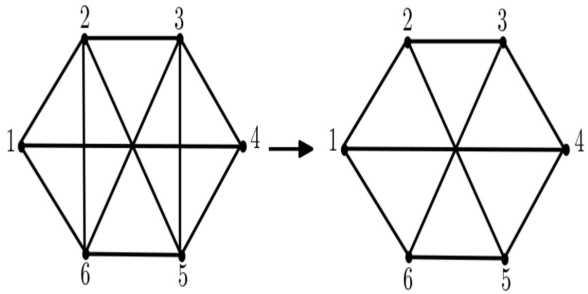
$$2a = \sum_{i=1}^{k} d(f_i) \geq \sum_{i=1}^{k} 4 = 4f$$

Isto é, $4f \leq 2a$, ou melhor, $2f \leq a$. Agora, pela Fórmula de Euler, temos que $f - a + v = 2$, então

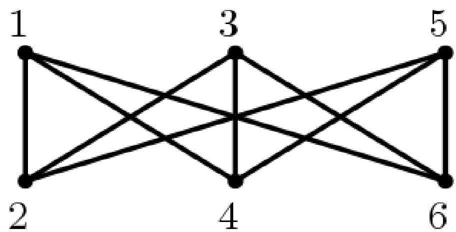
$$\begin{aligned} f - a + v = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 + a - v = f \\ &\Leftrightarrow \quad 4 + 2a - 2v = 2f \\ &\Rightarrow \quad 4 + 2a - 2v \leq a \\ &\Leftrightarrow \quad a \leq 2v - 4 \end{aligned}$$

Portanto, temos que em um grafo planar bipartido conexo vale a relação $a \leq 2v - 4$. $\square$

Note que estes resultados dizem que se um grafo é planar, então valem as relações, porém não é verdade que se as desigualdades forem satisfeitas teremos que o grafo é planar. Este fato pode ser observado pelo seguinte grafo G



Perceba que se retirarmos os segmentos que ligam os vértices (2,6) e (3,5), obtemos um subgrafo que é homeomorfo ao $K_{3,3}$, basta apenas arrumarmos os vértices como mostra o seguinte grafo

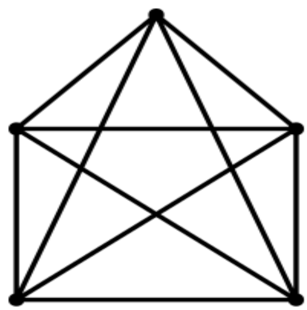


Portanto, o grafo G não é planar, porém ele possui 6 vértices (v) e 11 arestas (a), e então a relação do Teorema 4.1.3 é satisfeita.

Perceba que foi afirmado que o grafo G não é planar sem justificativa, pois precisamos de mais ferramentas para provar isto. Mas não fique triste, em breve você terá armamento suficiente para atacar este problema, e ele estará na lista de exercícios para você se divertir.

4.1.3 Grafos K_5 e $K_{3,3}$

Agora vamos estudar dois grafos de extrema importância na classificação de grafos planares, que são os grafos K_5 e $K_{3,3}$. Primeiro vamos analisar o grafo K_5, que é um grafo completo formado por 5 vértices, sua representação usual é dada por

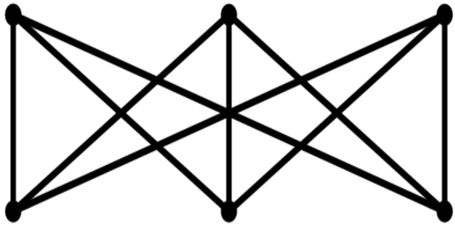


Novamente, voltamos àquela pergunta feita anteriormente: "todos os grafos são planares?". A resposta é que existem grafos não planares, como já foi visto no exemplo anterior. Vamos ver agora que o grafo K_5 não é planar. Isso ocorre pelo Teorema 4.1.3, pois se notarmos K_5 possui 5 vértices e 10 arestas, e logo não respeita a relação do teorema, isto é, $10 > 3 \cdot 5 - 6$. Deste modo K_5 não é planar, e isso motiva o seguinte resultado.

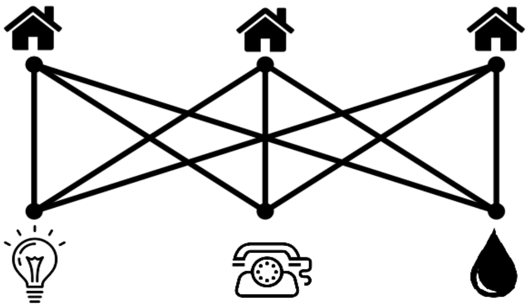
Corolário 4.1.5. Todo grafo completo com mais que 4 vértices não é planar.

Demonstração. A demonstração fica como exercício. □

O grafo $K_{3,3}$ é um grafo bipartido completo com 6 vértices e sua representação usual é dada por



Se buscarmos na memória, este grafo foi mencionado no início do livro, como motivação. Porém lá ele apareceu do seguinte problema: "Suponha que você possui 3 casas, onde cada casa precisa ter água, luz e telefone, porém os canos ou fios que ligam as casas não podem se cruzar. Será que é possível fazer essas ligações?"



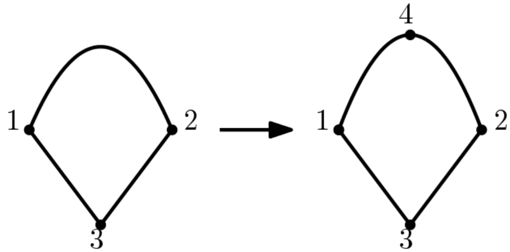
Traduzindo para a linguagem de grafos, teríamos que responder a seguinte pergunta: "o grafo $K_{3,3}$ é planar?". E a resposta é que ele não é planar. Podemos ver isso pelo Teorema 4.1.4, pois $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas, assim a desigualdade do teorema não é satisfeita, pois $9 > 2 \cdot 6 - 4$.

4.1.4 Teorema de Kuratowski

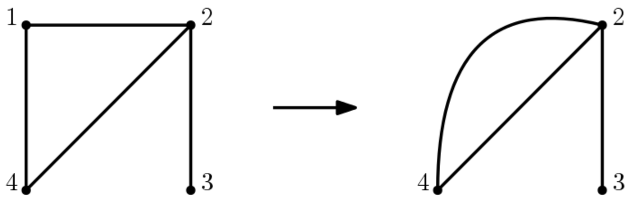
Agora que já conhecemos os grafos K_5 e $K_{3,3}$, temos dois exemplos muito importantes de grafos não planares que utilizaremos como base para dizer se um grafo possui representação planar. Para isso precisamos de algumas definições.

Definição 4.1.6. Uma **subdivisão** do grafo G é o grafo G' que obtemos pela inserção de um caminho de comprimento 2 no lugar de uma aresta de G.

Por exemplo, considere o seguinte grafo abaixo. Vamos adicionar um ponto em uma aresta, de modo a obter dois segmentos, e assim obtemos uma subdivisão deste grafo.

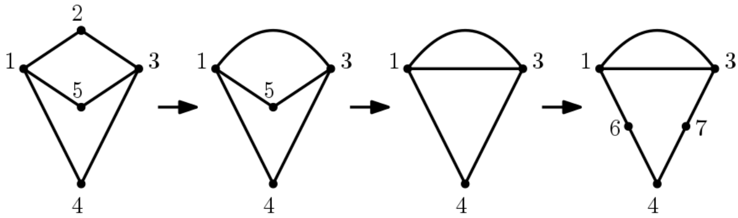


Observe que o processo de subdivisão pode ser visto de outro ponto de vista, em vez de adicionarmos um caminho de comprimento 2 no lugar de uma aresta, podemos substituir um caminho de comprimento 2 por uma aresta. Em outras palavras, podemos retirar vértices que estão entre duas arestas, como na figura abaixo.

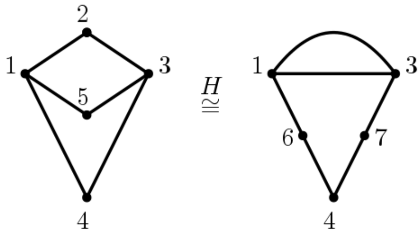


Definição 4.1.7. Um grafo G' é dito **homeomorfo** ao grafo G se G' for obtido de G por sucessivas operações de subdivisão e subdivisão inversa.

Vamos ver um exemplo de dois grafos homeomorfos. Considere o seguinte grafo.



Então temos que os seguintes grafos são homoeomorfos



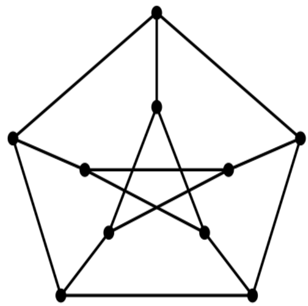
Agora podemos apresentar o resultado mais importante desta seção.

Teorema 4.1.8 (Kuratowski)**.** Um grafo é planar se, e somente se, não contiver subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

Do Teorema de Kuratowski, podemos obter uma maneira mais prática de verificar se um grafo é planar, dada pelo seguinte resultado

Corolário 4.1.9. Se G contiver subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$ então G não é planar.

Como aplicação do Teorema de Kuratowski vamos mostrar que o **Grafo de Petersen** não é planar. Para isso, considere o seguinte grafo



Vamos realizar sucessivas operações de subdivisão no grafo de Petersen (P) de modo a obter um grafo homeomorfo conhecido. Neste caso, estamos interessados em obter o grafo não planar $K_{3,3}$. Assim, vamos seguir os seguinte passos:

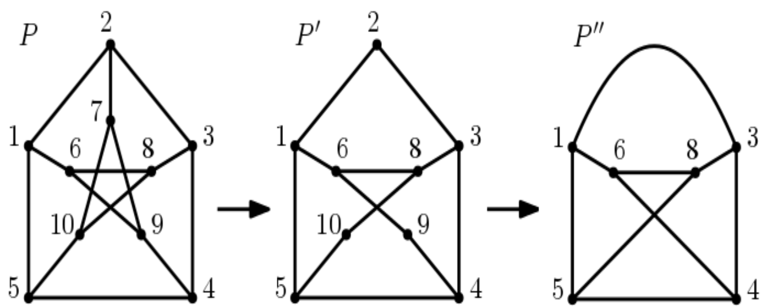
1. Enumere o grafo como foi feito abaixo.

2. Considere o subgrafo P' de P, obtido retirando o vértice 7 e as arestas nas quais ele estava ligado.

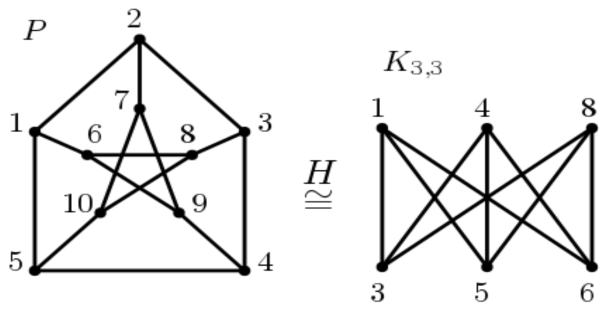
3. Vamos fazer o processo de subdivisão inversa, então apague o vértice 2, 9 e 10.

4. Vamos arrumar os vértices de modo conveniente, sem desfazer as ligações entre eles, de forma que os vértices 1, 4 e 8 fiquem na primeira linha e os vértices 3, 5 e 6 na segunda.

Graficamente, obtemos os seguintes grafos:



E portanto, temos o seguinte homeomorfismo



Agora, se observamos temos um grafo bem conhecido, o $K_{3,3}$. Então pelo Teorema de Kuratowski, podemos dizer que o grafo de Petersen possui um subgrafo P' que é homeomorfo ao $K_{3,3}$, e logo não é planar.

4.1.5 Exercícios

1. Prove que todo grafo completo com mais que 4 vértices não é planar.

2. Prove ou de um contra exemplo:

   (a) Todo subgrafo de um grafo planar é planar.

   (b) Todo subgrafo de um grafo não planar é não planar.

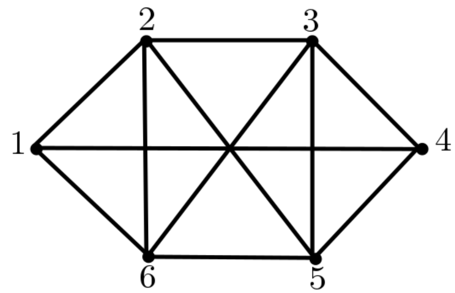
   (c) Se todo subgrafo de um grafo G, diferente de G, é planar então o grafo G é planar.

3. Mostre que os grafos formados deletando uma aresta dos grafos K_5 e $K_{3,3}$ são planares.

4. Mostre que o grafo $K_{2,3}$ é planar.

5. Determine todos os r, s tais que o grafo $K_{r,s}$ seja planar.

6. Prove que o grafo abaixo não é planar



7. O grafo dos estados do Brasil é definido assim: cada vértice é um dos estados estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm fronteira em comum. Faça um desenho do grafo e mostre que o grafo formado é planar.

8. Seja V um conjunto de pontos no plano. Digamos que dois desses pontos são adjacentes se a distância entre eles é menor que 2. Essa relação de adjacência define o grafo dos pontos no plano (sobre o conjunto V). Faça o grafo definido pelos pontos abaixo:

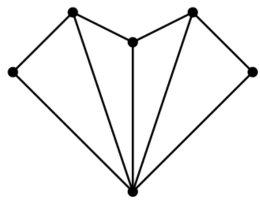
   $$(0,2),(1,2),(2,2),(0,1),(1,1),(2,1),(0,0),(1,0),(2,0)$$

   Mostre que o grafo G formado é planar.

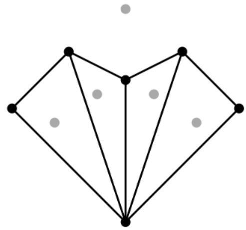
4.2 Grafos Duais e o Teorema das 5 Cores

Vamos começar esta seção definindo o que se chama de grafo dual de um grafo planar G. Em seguida usaremos essa nova ferramenta para deduzir o teorema da Fórmula de Euler, que é um dos teoremas fundamentais quando o assunto é grafos planares. A partir disto então, usando o teorema da Fórmula de Euler, iremos provar uma versão mais fraca do teorema das 4 cores, que afirma, a grosso modo, que podemos colorir qualquer mapa com no máximo 5 cores. Em comparação com o teorema das 4 cores, a demonstração de tal resultado é simples e pode ser detalhada neste texto sem maiores complicações.

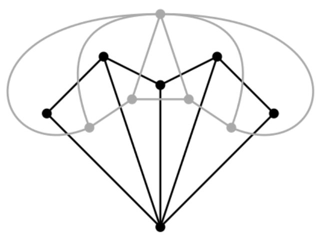
Uma das coisas mais legais de grafos planares é que dado um grafo planar, conseguimos construir outro grafo que possui certas propriedades interessantes. E é isto que vamos fazer agora. Considere o seguinte grafo planar G (que se parece com um coração):



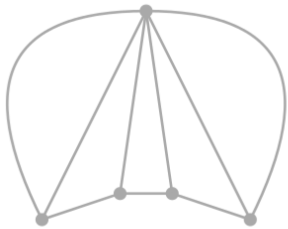
Em cada face de G colocamos um ponto (**lembrando que o lado de fora do grafo também é uma face!**). Fazendo isso, temos o seguinte desenho:



Agora, imagine que estamos em cima de um desses pontos que desenhamos. Se quisermos ir para um outro ponto, deveremos passar por cima de algumas arestas. Façamos o seguinte, consideremos primeiramente todos os pontos para os quais podemos ir passando por cima de apenas uma aresta, ou seja, pontos cuja face é adjacente à face do ponto em que estamos. Dado um desses pontos para o qual podemos ir, desenhamos uma aresta do ponto em que estamos para este novo ponto para cada aresta diferente que podemos passar para chegar até ele. Fazendo essa construção para todos os pontos, obtemos a seguinte imagem (que talvez se faça mais clara que todas as explicações possíveis):

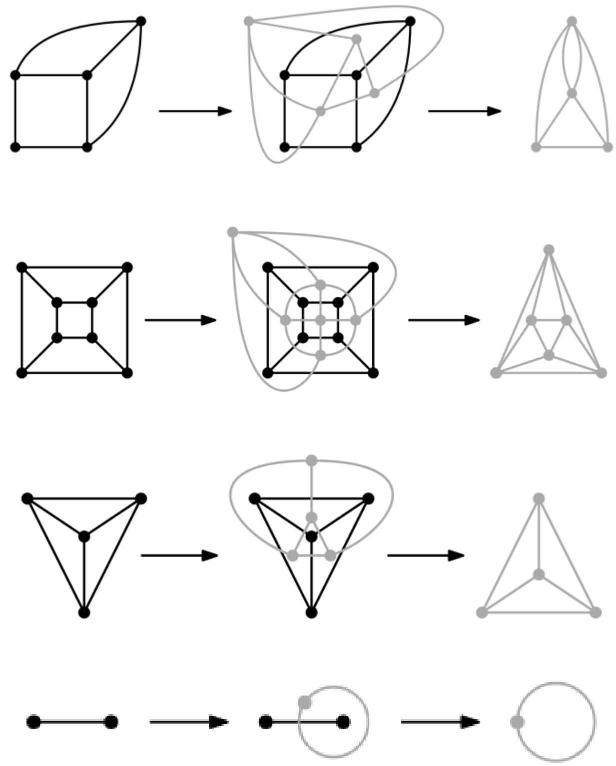


Bom, note que em cinza conseguimos um novo grafo, então separamos ele e damos uma ajeitadinha. Assim obtemos o seguinte grafo:



Bom, dado um grafo planar G qualquer, podemos repetir toda essa construção e obter um outro grafo. O grafo obtido de G seguindo estes passos é chamado de **grafo dual** de G, e é denotado por G^*.

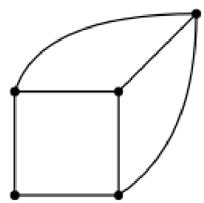
Exemplo 4.2.1. Veja abaixo algumas construções de grafos duais:



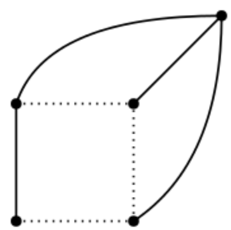
Em preto temos o grafo original e em cinza seu grafo dual.

Vamos agora tentar extrair algumas propriedades dos grafos duais. Na verdade apenas as suficientes para que o teorema da fórmula de Euler apareça.

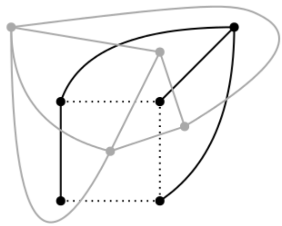
Ao longo desta discussão, tomaremos um grafo exemplo para ilustrar as propriedades que serão comentadas (mas todas as propriedades que serão ditas são absolutamente gerais). O nosso grafo exemplo será este:



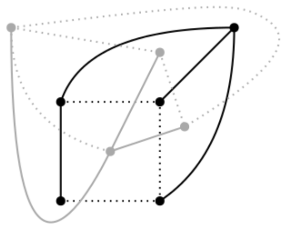
Vamos tomar um grafo planar G e analisar a relação das árvores geradoras de G com as árvores geradoras de G^*. Caso você não lembre da definição de árvore geradora dê uma olhada na seção 2.4.1. Voltando para nosso grafo exemplo, desenhamos nele uma árvore geradora:



Deixamos pontilhadas agora as arestas que não fazem parte da árvore geradora. Desenhamos agora o grafo dual do nosso grafo exemplo sobre o grafo acima:



Vamos então pontilhar todas as arestas do dual que passam pelas arestas da árvore geradora do nosso grafo exemplo. Obtemos:



Agora note que as arestas do dual que não foram pontilhadas formam uma árvore geradora para ele. Mais ainda, o número de arestas desta árvore geradora que obtemos é igual ao número de arestas que foram pontilhadas no nosso grafo exemplo original. Isso se deve à nossa construção, pois pontilhamos todas as arestas do dual que passavam por uma aresta pintada do nosso grafo exemplo, e então sobraram apenas as arestas do dual que passam pelas arestas pontilhadas do grafo exemplo. Essa propriedade vale de maneira geral: sempre que temos uma árvore geradora de um grafo G, conseguimos uma árvore geradora de G^* fazendo essa mesma brincadeira que fizemos com o grafo exemplo.

Uma das propriedades legais de árvores é que em toda árvore o número de arestas é sempre uma unidade à menos que o número de vértices. Vamos então juntar esta informação com o que fizemos até agora.

Tome uma árvore geradora de G, vamos chamá-la de T de *Tree* (árvore em inglês). Então T deve conter todos os vértices de G. Chamando de v o número de vértices de T (que é o mesmo que de G) e a_0 o número de arestas de T, obtemos

$$v - 1 = a_0$$

pela propriedade legal das árvores que mencionamos acima. Da nossa discussão num parágrafo acima, conseguimos uma árvore geradora de G^*, que chamaremos de T^*, cujo número de arestas é igual ao número de arestas de G que não estão em T (arestas não pontilhadas). Colocando em símbolos, que é como os matemáticos sabem trabalhar, temos que o número de arestas de T^* é $a - a_0$, onde a é o número de arestas de G. Além disso, como T^* é uma árvore geradora de G^*, ela contém todos os pontos de G^*, que na verdade são todas as faces de G, certo? Chamando de f o número de faces de G, e usando novamente a propriedade legal das árvores, temos que

$$f - 1 = a - a_0$$

pois $a - a_0$ é o número de arestas de T^* e f é o número de vértices de T^*. Você consegue sentir uma fórmula conhecida? Pois é, ela aparece agora. Como $v - 1 = a_0$ e $f - 1 = a - a_0$, podemos escrever

$$(v - 1) + (f - 1) = a_0 + (a - a_0) = a$$

e se "passarmos o a pra cá e os (-1)'s pra lá" obtemos que

$$v + f - a = 1 + 1 = 2$$

e olha só, que legal! Esta é a fórmula de Euler. Formalmente, escrevemos como o seguinte teorema:

Teorema 4.2.2 (Fórmula de Euler)**.** Se G é um grafo planar então

$$v + f - a = 2$$

onde v é o número de vértices, f é o número de faces e a é o número de arestas de G.

Bom, com este teorema encerrou-se a participação dos grafos duais em nossa apresentação. Palmas para eles! Agora vamos procurar provar o teorema das 5 cores, que mencionamos na introdução desta seção. Colocar a demonstração do teorema das 5 cores neste material é visto por nós como um dever moral e faremos uma abordagem um pouco mais formal, utilizando o princípio da indução no decorrer da demonstração, lembrando que ainda assim passamos longe da demonstração matematicamente correta deste teorema. Fica então o restante desta seção como curiosidade para curiosos e corajosos. No entanto, lembre-se que ao final desta seção há uma lista de exercícios bem legais esperando para serem feitos.

Para provarmos o teorema das cinco cores, precisaremos de um lema auxiliar então vamos lá!

Lema 4.2.3. Seja G um grafo planar, então existe em G um vértice de grau menor ou igual à 5.

Demonstração. De fato, em um grafo qualquer, temos que $\sum\limits_{\beta \in G} d(\beta) = 2a$ onde a é o número de arestas de G. Suponha que todos os vértices de G possuem grau maior que 5, ou seja, $d(\beta) \geq 6$ para todo $\beta \in G$. Então

$$2a = \sum_{\beta \in G} d(\beta) \geq 6v$$

onde v é o número de vértices de G. Porém, pelo teorema 4.1.3, temos que como G é planar, $a \leq 3v - 6$. Temos

$$6v \leq 2a \leq 2(3v - 6) = 6v - 12 \Rightarrow 0 \leq -12$$

o que é um tremendo absurdo. Como toda essa loucura começou quando supomos que o grau de todos os vértices era maior ou igual à 6, concluímos que deve haver ao menos um vértice em G que possui grau menor do que 6, ou seja, menor ou igual a 5. □

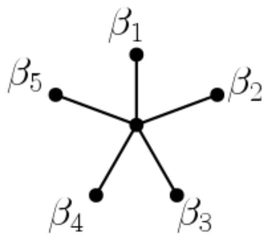
Teorema 4.2.4. Se G é um grafo planar então $\chi(G) \leq 5$.

Demonstração. Vamos provar este resultado usando o princípio da indução. Aplicaremos tal princípio ao número v de vértices do grafo G. Se $v \leq 5$ o resultado é trivialmente válido pois basta colorir cada vértice de G com uma cor diferente. Suponha então que se $v = n$ então vale o teorema, ou seja $\chi(G) \leq 5$. Isso significa que se $v = n$, conseguimos colorir G usando 5 cores. Suponha agora que $v = n + 1$. Vamos mostrar que podemos colorir G usando apenas 5 cores. Pelo lema 4.2.3, existe um vértice α de G que possui grau menor ou igual a 5. Note que o grafo $G' = G - \alpha$ possui n vértices, pois é G sem um vértice, logo, G' pode ser colorido com 5 cores. Colorindo o grafo G' com essas cinco cores, estamos colorindo todos os vértices de G exceto α. Precisamos dar uma cor (das cinco usadas para colorir G') para α. Temos então dois casos a considerar:

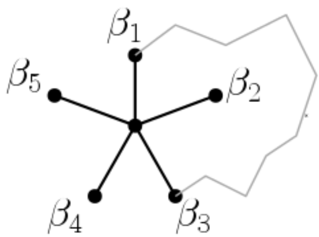
1. Se foram usadas no máximo quatro cores para colorir os vértices adjacentes à α, basta tomar uma das cinco cores que não foi usada e colorir α com ela. Assim teremos colorido G com apenas 5 cores.

2. Se o grau de α é 5 e todos os cinco vértices adjacentes à ele estão coloridos com as cinco cores, então temos um problema. Mas calma, vai dar certo! Neste caso devemos arranjar um jeito de recolorir um dos vértices adjacentes à α para que sobre uma cor para ele. Para as coisas ficarem mais organizadas, vamos dar alguns

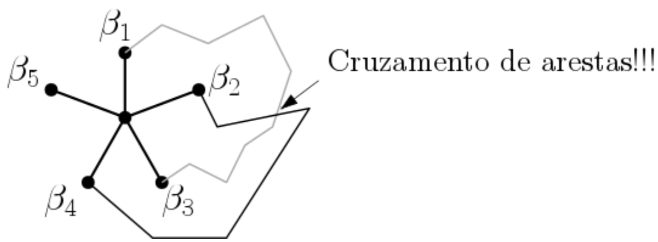
nomes. Sejam β_1, β_2, β_3, β_4 e β_5 os vértices adjacentes à α e imagine que alguns pintores por ai inventaram umas cores novas e as chamaram de 1, 2, 3, 4 e 5, que são por coincidência as cores de β_1, β_2, β_3, β_4 e β_5, respectivamente. Desenhando, temos:



Primeiramente, vamos tentar mudar a cor do vértice β_1 (que está colorido com a cor 1) para a cor 3. Para fazer isso e continuarmos com uma coloração de verdade, deveremos também mudar a cor dos vértices adjacentes à β_1 com a cor 3 para alguma outra cor e aí ao fazer isso poderemos nos perder e vai ser feio, então vamos melhorar a nossa linguagem. Seja $H_{1,3}$ o subgrafo gerado pelos vértices coloridos com a cor 1 e vértices com a cor 3. Note que β_1 e β_3 pertencem a este grafo. Se β_1 e β_3 estão em componentes conexas diferentes, então podemos simplesmente trocar as cores de todos os vértices que estão na componente conexa que contém β_1 de 1 para 3 e vice versa. Neste caso então podemos associar a cor 1 ao vértice v pois v_1 está colorido com a cor 3, e assim concluímos o teorema. Se β_1 e β_3 estão na mesma componente conexa, ao fizermos a mesma brincadeira de trocar as cores de todo mundo da componente que contém β_1, trocaremos a cor tanto de β_1 como de β_3, o que não é interessante para nós pois não sobrará nenhuma cor para α. Neste caso então passamos para um próximo vértice para ver se conseguimos colori-lo de maneira diferente de forma a sobrar uma cor para atribuir a α. Tentaremos então mudar a cor de β_2. Novamente, seja $H_{2,4}$ o subgrafo de G gerado pelos vértices de cores 2 e 4. Repare que β_2 e β_4 pertencem a tal subgrafo. Se β_2 e β_4 não pertencem à mesma componente conexa de $H_{2,4}$ então basta permutar as cores de todos os vértices que pertencem à mesma componente que β_2 e como no caso anterior estamos resolvidos pois aí nos sobra a cor 2 para colorir o vértice α. Novamente, teríamos problemas se β_2 e β_4 estivessem na mesma componente conexa. Mas bom, para nossa alegria, isso não pode acontecer e nós vamos explicar o porquê. Ainda estamos no caso em que β_1 e β_3 estão na mesma componente conexa, lembra? Isso significa que existe um caminho em $H_{1,3}$ ligando β_1 e β_3. Como α é adjacente à ambos β_1 e β_3, podemos adicionar α à tal caminho de modo que obtemos um ciclo em G. Note que β_2 está "do lado de dentro" do ciclo que formamos e β_4 está "do lado de fora" deste mesmo ciclo. Veja a imagem abaixo:



Por causa disso, não pode existir um caminho em $H_{2,4}$ ligando β_2 e β_4. De fato, um caminho ligando β_2 e β_4, pelo que discutimos acima, terá que passar de dentro para fora do ciclo que formamos. Como o ciclo está em $H_{1,3}$ e este tal caminho está em $H_{2,4}$ estes dois indivíduos não possuem vértices em comum, pois um só contém vértices das cores 1 e 3 e o outro só possui vértices das cores 2 e 4. Portanto, o caminho não cruza o ciclo em algum vértice, o que implica que esse cruzamento deve ocorrer em um aresta, como mostra a seguinte imagem:



Agora acalme-se, respire, e olhe com calma o enunciado deste teorema. Assumimos lá que G é planar, logo esse cruzamento em alguma aresta também não pode acontecer, ou seja, esse tal caminho não pode existir. Onde queríamos chegar nesta conversa toda? Bom agora sabemos que se não pudermos trocar a cor de β_1 podemos garantir a possibilidade de trocar a cor de β_2 e assim disponibilizar uma cor dentre as 5 para atribuir ao vértice α. Conclusão: conseguimos colorir G com apenas cinco cores. Assim concluímos a prova do teorema de 5 cores.

$\square$

Corolário 4.2.5. Para colorir um mapa qualquer de modo que países vizinhos não tenham cores iguais, basta comprar 5 lápis de cores diferentes. (E dependendo do mapa, muita paciência).

Chegamos então ao fim desta seção. Mas calma, ainda não acabou! Lembre-se dos exercícios que esperam ansiosamente para serem resolvidos por você!

Exercícios 4.2.6.

1. Na matemática normalmente chamamos de duais quaisquer coisas que são de certo modo opostas mas no fundo são as mesmas. Tendo em vista isso, considere G_1,G_2,G_3 e G_4 os grafos duais calculados em 4.2.1. Calcule G_1^*,G_2^*,G_3^* e G_4^* e reflita sobre o fato de darmos o nome "grafo dual".

2. Em todo este capítulo trabalhamos com grafos conexos. O teorema da fórmula de Euler não vale em sua forma original para grafos não conexos. Construa exemplos de grafos em que não vale o teorema da fórmula de Euler e tente conjecturar uma generalização para tal fórmula.
   Dica: a fórmula geral para grafos planares não conexos é quase a mesma da fórmula para grafos conexos, porém depende também do número de componentes conexas do grafo que você está considerando.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, R. P. *Coloração de grafos e aplicações.* Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

[2] BONDY, J.A. *Graph Theory With Applications.* New York: Elsevier, 1976.

[3] FEOFILOFF. P. *Exercícios de Teoria dos Grafos.* USP. 2013. `www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/texto/ETG.pdf`.

[4] JURKIEWICZ, S. *Grafos - Uma Introdução.* Estilo OBMEP, 2009.

[5] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 4 Combinatória.* 2a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[6] WEST, D.B. *Introduction to Graph Theory.* 2a ed. Delhi: Pearson, 2001.

[7] Imagem 3.1. Disponível em: <http://www.mundinhodacrianca.net/2011/10/mapas-do-brasil-para-imprimir-e-colorir.html>. Acesso em 24 abr. 2018.

[8] Imagem 3.3. Disponível em: <http://www.pampekids.net/mapa-para-colorir-america-do-sul/>. Acesso em 26 abr. 2018.

[9] Imagem 3.4. Disponível em: <https://www.educolorir.com/paginas-para-colorir-eua-i8312.html>. Acesso em 04 mai. 2018.

PET MATEMÁTICA UFPR

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DMAT - UFPR