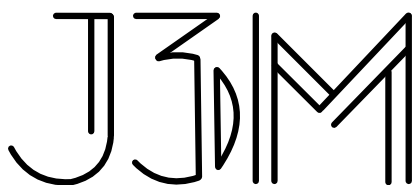


Caderno de Resumos

J3M 9^a Edição - 2025



JORNADA DA MATEMÁTICA,
MATEMÁTICA APLICADA E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PET — Matemática UFPR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Comissão Organizadora

Tutor:	Prof. Dr. Cleber de Medeira
Estudantes:	Ana Carla de Carvalho Honório Andressa Balestrin Dasenbrock Augusto Henrique da Costa Camilly Silva dos Anjos Daniel Thiago Ivanchechen Elissandro Antonio Sikora Felipe Monteiro Kiotheka Isabele Andrade Vichinieski Kaue Novaki João Laura Carolina Aymore Ferrandin Leonardo Cortez do Nascimento Lucas Xavier Miguel Augusto Vialich Pedro Dell'Agnolo Busarello Pedro Henrique Andrade Pedro Lascowski Laguna Samuel Henrique Gomes Velez Benito Tiago Filipe Pires Galu
Site do Evento:	https://petmatematica.ufpr.br/j3m
Data do Evento:	10 a 15 de novembro de 2025
Local de Realização:	Centro Politécnico da UFPR, Curitiba, novembro de 2025.

Sumário

Introdução	ii
1 Álgebra	1
A Categoria de Homotopia de uma Categoria Modelo	
<i>Fernando Augusto de Lima Filho</i>	3
A estrutura elegante dos semigrupos inversos	
<i>Eduarda Caroline Klug</i>	5
Álgebras de Caminhos	
<i>Camilly Silva dos Anjos</i>	7
Classificação de grupos cristalográficos	
<i>Ana Carla de Carvalho Honório</i>	9
Equivalência Categórica entre 2-Grupos e Módulos	
Cruzados	
<i>Pedro Henrique Andrade</i>	11
Introdução à Teoria de Códigos	
<i>Lucas Bisoni</i>	
<i>Samuel Henrique Gomes Velez Benito</i>	13
Lema da Serpente para categorias abelianas	
<i>Lucas Xavier</i>	16
Matrizes Circulantes e uma Surpreendente Aplicação	
<i>Ana Caroline da Silva</i>	18
Sobre a existência de uma base para cada espaço ve-	
torial	
<i>Eric Steffan Budal da Costa</i>	21

Uma Introdução às Álgebras de Lie	
<i>Emilly Giovana Torquato</i>	23
Uma pálida família de categorias: Morfismos univer-	
sais em categorias concretas	
<i>Ana Carla de Carvalho Honório</i>	24
2 Análise	26
Espaço Variável de Lebesgue	
<i>Amanda Carolina Coelho</i>	28
Espaços de Hilbert e Séries de Fourier	
<i>Leonardo Angelo Rigo</i>	30
O lema de Morse em $\mathbb{R}^n$ e Aplicações	
<i>Allyson Henrique Cansian</i>	32
Os Espaços de Lebesgue com Expoente Variável	
<i>Elissandro Antonio Sikora</i>	33
Propriedades globais de operadores em $\mathbb{T}^2$ com coefi-	
cientes variáveis	
<i>Leonardo Cortez do Nascimento</i>	35
Representação polar de funções reais com compactifi-	
cação do infinito	
<i>Luís Eduardo Vitorino Gonçalves</i>	38
Trajétórias Periódicas e Ergódicas de Campos Vetori-	
ais no Toro	
<i>Lucas Bisoni</i>	41
Um Estudo sobre Operadores Fortemente Invariantes	
<i>Lucas Xavier</i>	43
Uma visita ao Problema de Basileia	
<i>Miguel Augusto Vialich</i>	45
3 Educação Matemática	47

A matemática e os espaços educativos não tradicionais: um relato de experiência	
<i>Anna Luiza Prado</i>	
<i>Donizete de Oliveira Martins</i>	
<i>Maria Fernanda de Mello Alvares Bento</i>	
<i>Yaritza Del Valle Fermin de Martinez</i>	
<i>Yasmin Fernanda Heldt</i>	49
A prática avaliativa na matemática: uma perspectiva montessoriana	
<i>Laura Carolina Aymoré Ferrandin</i>	52
Análise da Produção Escrita de Questões Abertas de Função e Equação do Vestibular da Universidade Estadual de Londrina	
<i>Emanuela Gonçalves Lopes</i>	55
Análise da Produção Escrita de Questões de Geometria do Vestibular da Universidade Estadual de Londrina	
<i>Kaue Novaki João</i>	58
Análise da Produção Escrita de Questões de Polinômios e Sequências Numéricas do Vestibular da Universidade Estadual de Londrina	
<i>Pedro Lascowski Laguna</i>	61
Análise da Produção Escrita em uma Prova-Escrita-em-Fases	
<i>Isabele Andrade Vichinieski</i>	64
Análise da produção escrita de estudantes de 8º e 9º ano do Ensino Fundamental a partir de uma tarefa de Matemática	
<i>Natalia Chicora</i>	
<i>Sibeli da Rosa da Rocha</i>	67
Análise da produção escrita em uma Prova-Escrita-em-Fases de Geometria na perspectiva da Análise de Erros	
<i>Gabrielle Mamede Cordeiro</i>	70

Análise de uma tarefa de investigação à luz da Educação Matemática Realística	
<i>Andressa Balestrin Dasenbrock</i>	73
Concepções de Resolução de Problemas em artigos do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática	
<i>Vinícius Perin Santos</i>	76
Confiar em um único instrumento avaliativo pode ser prejudicial?	
<i>Sibeli da Rosa Da Rocha</i>	79
Construindo o Conhecimento Matemático: A Robótica Educacional como Ferramenta de Investigação	
<i>José Divaldo Xavier da Silva</i>	82
Desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais: um mapeamento em periódicos nacionais	
<i>Natalia Chicora</i>	85
Desvendando a matemática presente nos meios de Transporte	
<i>Camila Rios</i>	88
Do cálculo a vida real: práticas nas escolas com relação à matemática	
<i>Gabrielle Gislayne de Almeida Gregorio</i>	
<i>Susi Gabrielle Morato de Souza</i>	
<i>Vandressa Ribeiro</i>	91
Educação Financeira e Mulheres: Histórias, Desafios e Impactos na Formação Docente	
<i>Marjory Castelhona Camargo</i>	94
Entre telas e conceitos: um estudo em andamento sobre o impacto de ferramentas digitais na aprendizagem da Matemática	
<i>Patrícia Vieira Alves</i>	97

Formação Docente em Matemática, Identidade Profissional e a dança: apresentação do portfólio de uma (futura) professora que ensina matemática	
<i>Natalia Chicora</i>	100
Geometria esférica no ensino médio: uma proposta didática com geogebra para análise de projeções cartográficas	
<i>Vinicius da Silva Kich</i>	103
Investigação Matemática com estudantes do Ensino Fundamental: uma experiência com Medidas de Tendência Central na Eletiva de Exatas	
<i>Wanderson dos Santos Rodrigues</i>	106
Levantamento das definições de pensamento algébrico em produções acadêmicas	
<i>Andressa Balestrin Dasenbrock</i>	
<i>Isabele Andrade Vichinieski</i>	109
Ludicidade e Aprendizagem Matemática: Experiências do PET-MAPE no Ensino Fundamental	
<i>Ana Lara do Nascimento Schimanski</i>	
<i>Anita Castro Silva</i>	
<i>Edimara Pereira Machado</i>	112
Mapeamento da Produção Acadêmica em Educação Matemática Realística no Brasil	
<i>Andressa Balestrin Dasenbrock</i>	115
Mapeamento de provas e cadernos de prova no repositório institucional da UFSC	
<i>Sibeli da Rosa da Rocha</i>	118
Modelagem Matemática nos Banheiros do Politécnico da UFPR: Análise Comparativa entre Papel Toalha e Secador de Ar Quente	
<i>Luís Gustavo Nadalin</i>	121

Noções topológicas e identidade profissional docente: uma proposta de formação para professores que ensinam matemática nos anos iniciais <i>Natalia Chicora</i>	124
O Júri Simulado como Estratégia para Promover o Debate Crítico e Analisar a Mecanização do Pen- samento Algébrico no Curso de Matemática da UNESPAR – Campus Paranaguá <i>Gabriel Leal Kulik</i>	127
O ensino do sistema monetário por meio de atividades lúdicas: uma experiência do projeto PET-MAPE nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental <i>Karolyna da Silva Batista</i> <i>Keila Santos da Silva</i> <i>Tatiane dos Santos</i>	129
O uso do Algeplan no desenvolvimento do pensamento algébrico de licenciandos surdos em Pedagogia: um estudo em andamento <i>Fernando Lucas Rosa Hernandez</i>	132
Práticas em Matemática nas Escolas: Experiências do PET-MAPE <i>Erik Carollo Martins</i> <i>Jéssica Souza Da Cunha</i> <i>Stella Cristina Cordeiro Do Rosário</i>	135
Projeto Investigação SEED/PR: uma leitura pela abor- dagem do Ciclo de Políticas Públicas Educacio- nais <i>Laura Carolina Aymoré Ferrandin</i> <i>Pedro Dell’Agnolo Busarello</i>	138
Quem é Regina Buriasco, segundo o Google? Um levantamento de sua presença digital <i>Sibeli da Rosa Da Rocha</i>	141

Regina Buriasco e Avaliação: intersecções entre o vi-	
vido e o pesquisado, a partir da História Oral	
<i>Sibeli da Rosa Da Rocha</i>	144
Teoria da Objetivação e o papel do labor conjunto na	
formação de sujeitos críticos	
<i>Camilly Silva dos Anjos</i>	146
Um Olhar Para Inclusão Nos Cursos De Graduação:	
O Que Dizem Os Estudantes Surdos E Sua Intér-	
prete?	
<i>Bárbara Caroline Zanetti Borkowski</i>	
<i>Marta Rejane Proença Filietaz</i>	
<i>Mirian Maria Andrade Gonzalez</i>	149
Um olhar sobre uma turma de Altas Habilidades e	
Superdotação	
<i>Alisson Gabriel Struz</i>	152
Uma análise de tarefas não-rotineiras em textos que	
discutem pensamento algébrico	
<i>Andressa Balestrin Dasenbrock</i>	
<i>Isabele Andrade Vichinieski</i>	155
Uma investigação sobre o uso de materiais didáticos	
manipuláveis no ensino da álgebra em colégios de	
Paranaguá	
<i>Anay Kurpel Pusch</i>	158
Viajando com a história da Matemática. Destino:	
Sala de aula - Boa Viagem	
<i>Francine Gabriely de Oliveira Sergio</i>	
<i>Marcia Maria da Veiga Arantes</i>	161
4 Equações Diferenciais	164
A Matemática do Átomo de Hidrogênio	
<i>Fabricia Oliveira dos Santos</i>	166
Análise de Fourier para EDPs periódicas	
<i>Daniel Thiago Ivanchechen</i>	169

EDO's Aplicadas em Modelos Biológicos	
<i>Nathan Hanashiro Fodor</i>	172
Um Estudo Qualitativo de Sistemas Planares de Equações Diferenciais	
<i>Kaue Novaki João</i>	175
5 Geometria e Topologia	178
Da Geometria ao Crescimento de Grupos	
<i>João Pedro de Castilho Bonini</i>	180
Estudando a Noção de Topologia Através de Redes	
<i>Pedro Lascowski Laguna</i>	183
Estudo de Curvas Planas: Bruxa de Agnesi e Cissoide de Diócles	
<i>Luiz Henrique Bahls</i>	186
Exemplos da fórmula de Weyl para tubos ao redor de subvariedades em baixas dimensões	
<i>Celestia Piccioni</i>	189
Filtros Continuidade para além de topologia	
<i>Guilherme Furquim</i>	191
Filtros na Topologia Caracterizando continuidade a partir de filtros	
<i>Guilherme Furquim</i>	193
Formas diferenciais e formalismo de Hamilton em fractais	
<i>Matheus Ercivaldo Krüger Gebelucá</i>	196
Geodésicas via o cálculo das variações	
<i>Tiago Filipe Pires Galu</i>	199
Incírculo de um Triângulo Hiperbólico	
<i>Pedro Carvalho Igreja</i>	201
Introdução à Teoria de Morse-Bott	
<i>Lucas Xavier</i>	204
Lema de Morse	
<i>Camilly Silva dos Anjos</i>	
<i>Lucas Xavier</i>	206

O Funcional de Willmore e Desigualdades Geométricas em Variedades de Curvatura Escalar Não-Negativa	
<i>Bruno Bonassoli</i>	208
O Grupo Fundamental π_1 de um nó	
<i>Felipe Monteiro Kiotheka</i>	210
O Teorema de Fáry-Milnor	
<i>Felipe Monteiro Kiotheka</i>	212
Teorema Fundamental da Álgebra via o Grupo Fundamental	
<i>Tiago Filipe Pires Galu</i>	214
6 Análise Numérica e Otimização	216
Aplicação de Otimização Não-Linear para a Modelagem de uma Carteira de Investimentos	
<i>Pedro Henrique Cardoso</i>	218
Método elipcêntrico para programação quadrática	
<i>Eduarda Ferreira Zanatta</i>	221
Otimização de Carteira de Ações	
<i>Tânia Cristina Valasky</i>	224
Reconstrução de Imagens via Amostragem Compressiva: Formulação Matemática e Testes Numéricos	
<i>Rafaella Gulin dos Santos</i>	227
Redes Neurais Fisicamente Guiadas (PINNs) na Simulação do Sistema de Boussinesq para Ondas Aquáticas	
<i>Samuel Kutz Paranhos</i>	230
Técnicas de aprendizagem curricular aplicadas à PINNs	
Aproximando ondas solitárias solução da equação de KdV	
<i>Guilherme Furquim</i>	233
7 Projetos Matemáticos	236

A experiência do Lesson Study no PIBID

Lucas Job Hahn

Alexandre Ruteski da Silva

Gabriel Schiebler Zaninetti

Gabrielli Knapick Hasse

Gabrielly de Oliveira Ripka

Guilherme de Lima Sampaio

Mariah Fragallo Ihlenfeldt

Poliana Pereira Palhano 238

Análise da Produção Escrita em Questões Não-Rotineiras
de Matemática em Avaliações Externas

Amanda Grütter Jacon

Emanuela Gonçalves Lopes

Lara Dambroski Furtado

Mayara Isabele Arcenio

Raíssa Gomes Freitas Ribeiro 241

Brincando de Matemático 2025

Ana Carla de Carvalho Honório

Andressa Balestrin Dasenbrock

Augusto Henrique da Costa

Camilly Silva dos Anjos

Daniel Thiago Ivanchechen

Elissandro Antonio Sikora

Felipe Monteiro Kiotheka

Isabele Andrade Vichinieski

Kaue Novaki João

Laura Carolina Aymore Ferrandin

Leonardo Cortez do Nascimento

Lucas Xavier

Miguel Augusto Vialich

Pedro Dell'Agnolo Busarello

Pedro Henrique Andrade

Pedro Lascowski Laguna

Samuel Henrique Gomes Velez Benito

Tiago Filipe Pires Galu 244

Caminhos Olímpicos da Matemática (COM) - Programa de Iniciação Científica Júnior da Obmep (PIC-OBMEP)

Beatriz Maetiasi de Oliveira

Caio Barros Dewnig

Henrique Travaglia Fontes

Marcos Roberto dos Santos

Matheus Margoti

Otávio Cordeiro de Santana

Rui Andress Mendes Pereira 246

Desafios ativos: “jogando, explorando e descobrindo a matemática”	
<i>Christofer L. Depizzol</i>	
<i>Daniel Galvão Tibães</i>	
<i>Denise Evencio l. Batalha</i>	
<i>Enzo Ogassawara</i>	
<i>Gabriel Augusto</i>	
<i>Jacqueline Doresthan</i>	
<i>Melanie B. Rosa</i>	248
Divulgando Ciência e Matemática: projeto extensionista em andamento na Mostra de Profissões da UNESPAR	
<i>Diogo Augusto Maciel de Paula</i>	
<i>Patrícia Vieira Alves</i>	251
Olimpíada Paranaense de Matemática: Atraindo talentos da matemática no Paraná	
<i>Eduarda Rodrigues Gomes Veloso</i>	
<i>Natalia Chicora</i>	
<i>Yanko Szusko Soares</i>	254
POTI/TOPMAT: Formando Talentos e Reinventando o Ensino de Matemática no Contexto Olímpico	
<i>Camila Rios</i>	
<i>Camilly Silva dos Anjos</i>	
<i>Luis Filipe Nazaret Lopes</i>	
<i>Luís Gustavo Nadalin</i>	256
Promovendo a Extensão Universitária por intermédio de Seminários Educacionais: Ação Extensionista desenvolvida na Pós-Graduação para a comunidade acadêmica e sociedade	
<i>Wanderson dos Santos Rodrigues</i>	259

Semana da Matemática 2025

Ana Carla de Carvalho Honório

Andressa Balestrin Dasenbrock

Augusto Henrique da Costa

Daniel Thiago Ivanchechen

Elissandro Antonio Sikora

Felipe Monteiro Kiotheka

Isabele Andrade Vichinieski

Laura Carolina Aymore Ferrandin

Leonardo Cortez do Nascimento

Lucas Xavier

Pedro Dell'Agnolo Busarello

Pedro Henrique Andrade

Tiago Filipe Pires Galu 262

Introdução

Prezado(a) leitor(a),

É com grande satisfação que apresentamos o Caderno de Resumos da 9^a edição da Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática (J3M), um evento idealizado, produzido e coordenado pelos estudantes do grupo PET Matemática da UFPR.

A J3M nasceu do desejo de criar um ambiente propício para a divulgação e discussão de trabalhos de Iniciação Científica nas diversas áreas da Matemática. Ao longo de suas edições, tem se consolidado como um importante canal de comunicação entre o grupo PET Matemática, estudantes e professores do Curso de Matemática da UFPR e de outras instituições de ensino superior.

Nesta edição, contamos com 94 trabalhos inscritos, distribuídos entre as áreas de Educação Matemática, Álgebra, Análise Matemática, Equações Diferenciais, Geometria, Topologia, Análise Numérica, Otimização e Projetos. As bancas de avaliação, compostas por docentes e estudantes de pós-graduação da UFPR, asseguram a qualidade e o rigor acadêmico das apresentações. Como forma de incentivo, são concedidas distinções aos trabalhos que obtêm as melhores avaliações.

Agradecemos a todos os integrantes do grupo PET Matemática pela dedicação e empenho na organização desta edição da J3M. Estendemos nossos agradecimentos aos professores e estudantes de pós-graduação pelo excelente trabalho realizado

nas bancas de avaliação. Registramos, ainda, nosso reconhecimento à Direção do Setor de Ciências Exatas, ao Departamento de Matemática e à Coordenação do Curso de Matemática pelo apoio e colaboração em todas as etapas deste evento.

Prof. Dr. Cleber de Medeira
Tutor do PET Matemática - UFPR
Novembro de 2025

Álgebra

Comissão Científica:

Prof^ª. Dra. Ana Cristina Corrêa Munaretto

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves

Prof^ª. Dra. Tanise Carnieri Pierin

Prof. Dr. Willian Goulart Gomes Velasco

Banca Avaliadora:

Dra. Ana Cristina Corrêa Munaretto

Bel. Lucas Cabral Port

Dr. Marcelo Muniz Silva Alves

Me. Moroni Menessés Bruch Bora

Dra. Tanise Carnieri Pierin

Dr. Willian Goulart Gomes Velasco

A Categoria de Homotopia de uma Categoria Modelo

Fernando Augusto de Lima Filho*

fernando.lima@ufpr.br ¹

Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)

hoefel@ufpr.br ²

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: categorias modelo, localização, categoria de homotopia.

Resumo: Uma teoria de homotopia pode ser feita em diversos contextos, como, por exemplo, nos espaços topológicos Top , nos complexos de cadeia sobre R -módulos $\text{Ch}(R)$, dos conjuntos simpliciais sSet , entre outros. Para generalizar essa ideia e fazer teoria de homotopia em uma categoria qualquer, é preciso que ela admita uma estrutura modelo, de modo que temos o que se chama de **categoria modelo**.

Uma **estrutura modelo** em uma categoria $\mathcal{C}$ é uma tripla $(\text{Fib}, \text{Cof}, \mathcal{W})$, composta por três classes de morfismos de $\mathcal{C}$, chamados fibrações, cofibrações e equivalências fracas, tais que:

- i) **(2 de 3)** - Sejam f e g morfismos de $\mathcal{C}$ tais que gf existe. Se dois de f, g e gf estão em $\mathcal{W}$, então o terceiro também está em $\mathcal{W}$.
- ii) $\mathcal{W}$ é fechado por retratos.
- iii) Ambos $(\text{Cof} \cap \mathcal{W}, \text{Fib})$ e $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap \mathcal{W})$ são sistemas de fatorações fracas functoriais.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria completa-pequena e cocompleta-pequena (fixado um universo arbitrário $\mathcal{U}_\lambda$), dizemos que $(\mathcal{C}, (\text{Fib}, \text{Cof}, \mathcal{W}))$ é uma **categoria modelo**.

Assim como em Top , dado uma categoria modelo $\mathcal{C}$, podemos classificar seus objetos a menos de uma equivalência homotópica. A ideia central é construir uma nova categoria, de modo que os morfismos de $\mathcal{W}$ sejam isomorfismos, ou seja, vamos construir uma localização com respeito a $\mathcal{W}$.

Seja $\mathcal{M} \subset \text{Mor}f(\mathcal{C})$ um conjunto de morfismos de uma categoria $\mathcal{C}$ (quando existe), é dado por:

*Voluntario

- i. Uma categoria $\mathcal{C}[\mathcal{M}^{-1}]$;
- ii. Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{M}^{-1}]$ tal que:
 - $\forall f \in \mathcal{M} \implies F(f)$ é isomorfismo;
 - Para toda categoria $\mathcal{D}$ e para todo funtor $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $G(f)$ é isomorfismo $\forall f \in \mathcal{M}$, então existe $H : \mathcal{C}[\mathcal{M}^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}[\mathcal{M}^{-1}] \\
 & \searrow G & \swarrow H \\
 & \mathcal{D} &
 \end{array}$$

A categoria $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ é chamada de **categoria de homotopia** de $\mathcal{C}$ e denotaremos por $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$. Apresentaremos a construção dessas categorias e alguns resultados importantes.

Referências

- [1] HOVEY, M. **Model Categories**. American Mathematical Society, 1991.
- [2] DWYER, W.G; SPALINSKI, J. **Homotopy Theories and Model Categories**. Elsevier Science B.V, 1995.
- [3] HIRSHHORN, P.S. **Model Categories and Their Localizations**. American Mathematical Society, 2009.
- [4] CISINSKI, D.C. **Higher Categories and Homotopical Algebra**. Cambridge University Press, 2019.
- [5] MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. Springer, 1978.
- [6] QUILLEN, D.G. **Homotopical Algebra**. Springer, 1967.
- [7] KUNEN, K. **The Foundations of Mathematics**. College Publications, 2009.
- [8] GABRIEL, P., ZISMAN, M. **Calculus of Fractions and Homotopy Theory**. Springer, 1967.

A estrutura elegante dos semigrupos inversos

Eduarda Caroline Klug*

carolineeduardaklug@gmail.com

Felipe Vieira (Orientador)

f.vieira@ufsc.br

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Blumenau

Palavras-chave: estrutura algébrica, semigrupo inverso, idempotente.

Resumo:

Este trabalho constitui o objeto final do meu Trabalho de Conclusão de Curso, dedicado ao estudo de semigrupos inversos. Apresentam-se as definições fundamentais, propriedades estruturais e resultados clássicos dessa teoria, oferecendo também exemplos ilustrativos que permitem a compreensão da relevância e da riqueza desta classe de semigrupos.

Os semigrupos inversos surgiram na década de 1950, de forma independente, a partir dos trabalhos de Wagner, na União Soviética, Preston, no Reino Unido, e Ehresmann, na França. Essa noção nasceu como uma generalização de ideias de simetria, motivada pela observação de que certas transformações não estão definidas em todo o conjunto, mas apenas em parte dele.

Um semigrupo é uma estrutura algébrica composta por um conjunto não vazio com uma operação binária associativa. Já um semigrupo inverso é um semigrupo em que para cada elemento a , existe um único elemento a^* tal que:

$$a = aa^*a \text{ e } a^* = a^*aa^*.$$

Em particular, será visto que a tomada de inverso nos semigrupos inversos obedece às propriedades $(a^*)^* = a$ e $(st)^* = t^*s^*$. Além disso, será estudada a importância dos idempotentes nesse contexto, que a conjugação de um idempotente por qualquer elemento ainda resulta em um idempotente, e que todos os idempotentes de um semigrupo inverso comutam. Por fim, estuda-se o Teorema de Wagner-Preston, que garante que todo semigrupo inverso pode ser incorporado em um monoide inverso simétrico, resultado fundamental que conecta a teoria abstrata a representações concretas por transformações parciais.

Concluimos que os semigrupos inversos, embora definidos a partir de uma ideia simples, apresentam uma estrutura rica, com propriedades que se articulam de forma elegante e com resultados que os situam como objeto de interesse central dentro da

*Estudante do curso de Licenciatura em Matemática.

teoria dos semigrupos. Este trabalho buscou reunir de forma organizada tais conceitos, oferecendo um panorama introdutório sólido que pode servir de base para investigações mais profundas em álgebra abstrata.

Referências

- [1] CHEANEY, Kyle. **An Introduction to Inverse Semigroups and Their Connections To C^* -Algebras**. Disponível em: https://carleton.ca/math/wp-content/uploads/Cheaney-Kyle-Honours-Project-An_Introduction_to_Inverse_Semigroups.pdf. Acessado em: 17 mar. 2025.
- [2] HOWIE, John Mackintosh. **Fundamentals of Semigroup Theory**. 2. ed. New York: Clarendon Press, 1995.
- [3] LAWSON, Mark V. **Introduction to Inverse Semigroups**. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2304.13580>. Acessado em: 19 mar. 2025.

Álgebras de Caminhos

Camilly Silva dos Anjos

camillyanjos@ufpr.br¹

Profa. Dra. Tanise Carnieri Pierin (Orientadora)

tanise@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: álgebras de caminhos, quivers, K -álgebras.

Resumo:

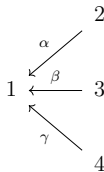
O **Teorema de Gabriel** estabelece uma conexão fundamental entre as álgebras associativas, com unidade e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e a teoria de representações de quivers, oferecendo um método eficaz para a compreensão e classificação desse tipo de estrutura algébrica, uma vez que garante que tal álgebra pode ser obtida como um quociente de uma álgebra de caminhos. Portanto, este trabalho tem como objetivo principal o estudo das **álgebras de caminhos**.

Para desenvolver essa análise, é necessário retomar alguns conceitos básicos. Seja K um corpo (algebricamente fechado). Uma K -**álgebra** é um anel associativo A com elemento unidade (denotado por 1) que, ao mesmo tempo, possui estrutura de K -espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, isto é, para todos $\lambda \in K$ e $a, b \in A$, vale:

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda.$$

Dizemos que A é de **dimensão finita** quando $\dim_K A < \infty$.

Como mencionado anteriormente, um resultado de Gabriel afirma que toda K -álgebra de dimensão finita, em que K é um corpo algebricamente fechado, pode ser associada a uma estrutura gráfica, denominada **quiver**. Um exemplo de quiver é o seguinte.



As **álgebras de caminhos** podem ser vistas, de forma intuitiva, como as álgebras associadas a quivers. Mais precisamente, seja Q um quiver. A álgebra de caminhos KQ é a K -álgebra cujo espaço vetorial subjacente tem como base o conjunto de todos

os caminhos de comprimento $\ell \geq 0$ em Q . O produto entre dois caminhos é dado pela concatenação, sempre que possível, definido formalmente por

$$(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell|b)(c|\beta_1, \dots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k|d),$$

em que δ_{bc} denota o delta de Kronecker. Entre as propriedades mais relevantes, pode-se destacar que KQ é sempre associativa; possui unidade se, e somente se, o conjunto de vértices Q_0 de Q é finito; é de dimensão finita se, e somente se, Q é finito e acíclico; além disso, KQ é conexa se, e somente se, Q também for conexo.

Uma das direções mais frutíferas dessa teoria consiste em analisar quocientes de dimensão finita de álgebras de caminhos que, em princípio, podem não ser de dimensão finita. Para tanto, introduz-se o conceito de **ideal admissível**. Seja Q um quiver finito e R_Q o ideal das flechas de KQ . Diz-se que um ideal bilateral $I \subseteq KQ$ é admissível se existir $m \geq 2$ tal que

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Esse conceito traz consequências importantes: para qualquer quiver finito Q e $m \geq 2$, o ideal R_Q^m é admissível; o ideal nulo é admissível em KQ se, e somente se, Q for acíclico; além disso, se I é admissível, então a álgebra KQ/I é sempre de dimensão finita. Outro resultado relevante é que o conjunto $\{e_a + I \mid a \in Q_0\}$ constitui um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos em KQ/I , e se o quiver Q é conexo, a álgebra KQ/I também o será. Portanto, quando Q é um quiver conexo e finito, R_Q o ideal das flechas de KQ e I um ideal admissível, a álgebra KQ/I é uma **álgebra básica, conexa, de dimensão finita e com unidade**, tendo R_Q/I como radical e $\{e_a + I \mid a \in Q_0\}$ como conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.

Em síntese, o Teorema de Gabriel, ao estabelecer a correspondência entre quivers e K -álgebras (associativas, com unidade) de dimensão finita, em que K é algebricamente fechado, fornece uma ferramenta poderosa de classificação para essa última classe de álgebras, dada via o estudo dos quocientes de álgebras de caminhos.

Referências

- [1] Assem, Ibrahim; Simson, Daniel; Skowroński, Andrzej. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras**. Cambridge University Press, 2010.
- [2] Coelho, Flávio Ulhoa; Lourenço, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. EdUSP, 2001.

Classificação de grupos cristalográficos

Ana Carla de Carvalho Honório*

anahonorio@ufpr.br¹

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)

giseleteixeira@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: grupos cristalográficos, classes aritméticas, classes de Bravais.

Resumo:

Um *reticulado* em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$L := \{x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n \mid x_i \in \mathbb{Z}, \forall 1 \leq i \leq n\} \quad (1)$$

de todas as combinações lineares inteiras de uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ do $\mathbb{R}^n$, onde B é dita uma *base reticular* de L . Um *padrão cristalino* (ou *cristal*) pode ser definido como um conjunto de pontos no $\mathbb{R}^n$ tal que as translações que o deixam invariante formam um espaço vetorial reticulado em $\mathbb{R}^n$.

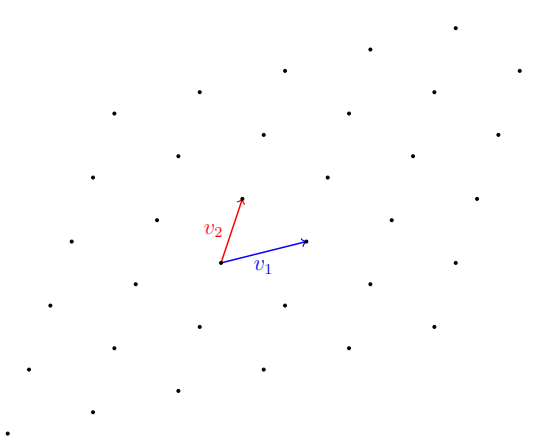


Figura 1: Exemplo de reticulado em $\mathbb{R}^2$ gerado por uma base $B = \{v_1, v_2\}$.

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial PET-Matemática

Grupos espaciais são grupos de simetrias de padrões cristalinos, os quais descrevem todas as operações que deixam um cristal inalterado — tais como rotações, reflexões e translações. Estudar grupos espaciais permite classificar os diferentes padrões cristalinos. Em Cristalografia, uma área que gera importantes aplicações da geometria elementar para física e química, os grupos espaciais são também chamados de *grupos cristalográficos* ou *grupos de Fedorov*.

Através da Teoria de Representações sabe-se que, dada uma base B de um espaço vetorial n -dimensional, podemos representar cada elemento de um grupo cristalográfico (i.e., cada simetria do cristal) por uma matriz $n \times n$, o que nos permite simplificar a classificação desses grupos ao estudarmos tais estruturas algébricas abstratas através de elementos de Álgebra Linear — um caminho já bem desbravado. Existem diferentes formas de classificarmos os grupos espaciais pelos seus níveis de equivalência, como isomorfismos entre os grupos abstratos, classes aritméticas, classes geométricas e famílias cristalinas.

Denotaremos por $\{g \mid t\}$ um elemento do grupo afim $\mathcal{A}_n$, cuja ação sobre $v \in \mathbb{R}^n$ é $\{g \mid t\} \cdot v = gv + t$. Seja $\Pi : \mathcal{A}_n \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ o mapa entre o grupo afim de ordem n e o grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis dado por $\{g \mid t\} \mapsto g$, onde $t \in \mathbb{R}^n$ é a parte translacional do mapa afim. O grupo $P := \Pi(G)$ de partes lineares de um grupo espacial G é chamado de *grupo de ponto* de G .

Dizemos que dois grupos espaciais pertencem à mesma *classe aritmética* se seus grupos de ponto P e P' são conjugados por uma transformação de base inteira, ou seja, se $P' = \{X^{-1}gX \mid g \in P\}$ para algum $X \in GL_n(\mathbb{Z})$. Em particular, um grupo de ponto P que age em um reticulado L é chamado de *grupo de Bravais* se é o grupo completo de simetrias de L , e a classe aritmética contendo P é então chamada de uma *classe de Bravais*.

Neste trabalho, pretende-se apresentar como as classes de Bravais se relacionam com a classificação dos grupos espaciais e como as simetrias destes podem ser apresentadas e analisadas por meio da Álgebra Linear e da Teoria de Grupos, com aplicações na caracterização de materiais cristalinos.

Referências

- [1] HAHN, Theo (ed.). **International Tables for Crystallography, Vol. A: Space-group symmetry**. Dordrecht: Springer, 2005.
- [2] SOUVIGNIER, Bernd. **Group theory applied to crystallography**. Radboud University, 2008. Disponível em: https://www.math.ru.nl/~souvi/krist_09/cryst.pdf. Acesso em: 01 out. 2025.
- [3] SOUVIGNIER, Bernd. **Representations of crystallographic groups**. Radboud University, 2010. Disponível em: https://www.crystallography.fr/mathcryst/pdf/nancy2010/Souvincier_irrep_syllabus.pdf. Acesso em: 01 out. 2025.

Equivalência Categórica entre 2-Grupos e Módulos Cruzados

Pedro Henrique Andrade*
pedroandrade@ufpr.br¹

Juan Sebastian Herrera Carmona(Orientador)
sebastianherrerah@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: 2-grupo, categorias, equivalência de categorias, módulos cruzados, homomorfismo de grupos.

Resumo: O objetivo desse trabalho é estudar os conceitos de 2-grupos, módulos cruzados de grupos e a equivalência entre suas respectivas categorias. Para isso, começamos abordando as noções centrais: 2-grupos e módulos cruzados de grupos. Em seguida estudamos suas respectivas categorias (que denotamos por **2-Grp** e **XMod**), e finalmente mostraremos que tais categorias são equivalentes.

A parte inicial desse trabalho foca-se em estudar o conceito de 2-grupo e suas definições equivalentes. Inicialmente, comparamos as seguintes duas definições equivalentes de um 2-grupo. A primeira é, um 2-grupo é um grupo $(\mathcal{C}, \mu)$ dentro da categoria de categorias **Cat**, ou seja, é uma categoria $\mathcal{C}$ munida de um funtor $\mu : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é a categoria produto, que satisfaz os axiomas de estrutura de grupo [4]. A segunda é: um 2-grupo é uma categoria $\mathcal{C}$ dentro da categoria de grupos **Grp**, isto é, $\mathcal{C}$ pode ser vista como $\mathcal{C} = (G_0, G_1, s, t, m, u, i)$,

$$(G_1 \times_{s,t} G_1, \cdot') \xrightarrow{m} (G_1, \cdot) \rightrightarrows_{s,t} (G_0, *) \xrightarrow{u} (G_1, \cdot) \xrightarrow{i} (G_1, \cdot),$$

onde tanto sua coleção de objetos e de morfismos, G_0 e G_1 respectivamente, quanto seus mapas de estrutura s, t, m, u, i estão em **Grp**. [2]

Posteriormente, estudamos o conceito de módulo cruzado de grupos, que podemos definir como um homomorfismo de grupos $\delta : G_0 \rightarrow G_1$ juntamente com uma ação $\alpha : G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_0)$ por automorfismos que satisfaz as seguintes propriedades [4]

- $\delta(\alpha_{g_1}(g_0)) = g_1 \delta(g_0) g_1^{-1}$ para todo $g_0 \in G_0$ e $g_1 \in G_1$.
- $\alpha_{\delta(g_0)}(g'_0) = g_0 g'_0 g_0^{-1}$ para todo $g_0, g'_0 \in G_0$.

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial de Matemática (PET Matemática).

Além disso, definimos morfismos entre 2-grupos e morfismos entre módulos cruzados com o objetivo final de construir as categorias **2-Grp** e **XMod**.

Finalmente, abordaremos o conceito de equivalência categórica e para isso estudaremos as noções de *esqueleto* de uma categoria e os seguintes tipos de funtores: fiel, pleno e essencialmente sobrejetivo [1] [3]. Por fim, mostraremos que as categorias de 2-grupos e módulos cruzados de grupos são equivalentes. [4]

Referências

- [1] HERRLICH, H.; STRECKER, G. E. **Category Theory**: An Introduction. Boston: Allyn and Bacon Inc., 1973.
- [2] SAUNDERS, MacLane.; BIRKHOFF, G. **Algebra**. Nova Iorque: The Macmillan Company, 1967.
- [3] SAUNDERS, MacLane. **Categories for the Working Mathematician**. Chicago: Springer, 1971.
- [4] FRIEDRICH, W. **Crossed Modules**. Berlin: De Gruyter Studies in Mathematics, 2021.

Introdução à Teoria de Códigos

Lucas Bisoni*

lucas.bisoni@ufpr.br¹

Samuel Henrique Gomes Velez Benito†

samuelbenito@ufpr.br¹

Prof.^a Maria Eugenia Martin (Orientadora)

eugenia@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: código, corpo finito, decodificação, álgebra código.

Resumo:

Em 1948, o artigo "*A Mathematical Theory of Communication*", publicado por Claude Shannon na revista *The Bell System Technical Journal*, introduziu o conceito de capacidade de canal, o qual busca quantificar a maneira como um código pode ser codificado e decodificado sem perda de informações através de um canal com ruído. Essa contribuição foi o estopim para o surgimento de uma nova área na Álgebra - a Teoria dos Códigos - que versa sobre a transmissão de mensagens em um canal com interferência, bem como a reconstrução de dados corrompidos.

Ao longo dos anos, a Teoria de Códigos apresentou intenso desenvolvimento, revelando sua aplicabilidade nas mais diversas áreas, em especial na ciência da computação e nas engenharias. Em particular, os resultados envolvendo a preservação de informações através da detecção ou mesmo correção de erros mostram-se essenciais para o desenvolvimento de sistemas de comunicação eficientes e que cumpram adequadamente seus propósitos.

Nesse sentido, faz-se necessário distinguir dois conceitos fundamentais para esse campo de estudo: a codificação fonte e a codificação de canal. A codificação fonte se refere ao processo de criptografia e adaptação da mensagem a um formato adequado para transmissão pelo canal de comunicação. Já a codificação de canal é uma etapa que ocorre após a codificação fonte e tem como objetivo adicionar algum tipo de redundância ou informação complementar que assegure a detecção e revisão de possíveis erros que aconteceram na transmissão do código, garantindo que o receptor da mensagem obtenha uma transcrição confiável. O diagrama abaixo sintetiza de forma simplificada como é feito o processo comunicativo entre um emissor e um receptor, seguindo esse viés:

*Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA).

†Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA).



Considere, por exemplo, a codificação fonte para quatro frutas da seguinte forma:

maçã $\rightarrow 00$, banana $\rightarrow 01$, cereja $\rightarrow 10$, uva $\rightarrow 11$.

Suponha que a mensagem maçã, codificada como 00, seja transmitida por um canal ruidoso. A mensagem pode se distorcer e ser recebida como 01. O receptor pode não perceber que a mensagem foi corrompida. Essa comunicação falha.

Podemos melhorar a codificação de canal introduzindo uma redundância, por exemplo:

maçã $\rightarrow 00000$, banana $\rightarrow 01111$, cereja $\rightarrow 10110$, uva $\rightarrow 11001$.

Suponha que a mensagem maçã seja transmitida por um canal ruidoso e que apenas um erro seja introduzido. Então, a palavra recebida deve ser uma das seguintes cinco: 10000, 01000, 00100, 00010 ou 00001. Assuma que 10000 foi recebida. Nesse caso, podemos ter certeza de que 10000 vem de 00000, porque existem pelo menos dois erros entre 10000 e cada uma das outras três mensagens codificadas 01111, 10110 e 11001.

A codificação de canal também é chamada de codificação algébrica, já que ferramentas algébricas são amplamente utilizadas no estudo da codificação de canal, a saber:

Definição: Sejam $q \in \mathbb{N}$ e $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ um conjunto com q elementos, denominado *alfabeto do código* e cujos elementos são *símbolos do código*. Definimos uma *palavra q -ária* de tamanho n sobre A como uma lista $w_1 w_2 \dots w_n$, com $w_i \in A$, para todo $1 \leq i \leq n$. Além disso, denominamos *bloco de código q -ário* de tamanho n sobre A um conjunto C não-vazio de palavras q -árias de mesmo comprimento n .

Vamos dotar o conjunto A de uma estrutura algébrica. A ideia é definir duas operações em A de modo que ele se torne um corpo. Claro que, nesse caso, A será um corpo com apenas um número finito de elementos, isto é, $A = \mathbb{F}_q$, em que q é um número inteiro da forma p^n , com n natural e p primo. Corpos finitos são bastante diferentes daqueles que estudamos habitualmente, como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Boa parte deste trabalho foi dedicado ao estudo da estrutura e das propriedades dos corpos finitos, desde estratégias operacionais para cálculo de seus elementos, como os logaritmos de Zech, até os teoremas relacionados a elementos primitivos e polinômios minimais.

A partir dessa fundamentação, foi possível iniciar o estudo da teoria dos códigos lineares, os quais são caracterizados como subespaços vetoriais de $\mathbb{F}_q^n$. A principal vantagem na utilização de códigos lineares é que os procedimentos de codificação e decodificação são mais rápidos e simples do que aqueles para códigos não lineares arbitrários.

Na nossa apresentação, formalizaremos e discutiremos as noções de detecção de erros e correção de erros. Também apresentaremos alguns métodos que recuperam a mensagem original enviada por meio da detecção e correção dos erros ocorridos durante a transmissão. Sintetizaremos os resultados obtidos em nossas pesquisas sobre os códigos lineares, bem como exporemos brevemente alguns conceitos elementares que serão essenciais no desenvolvimento dessa teoria.

Futuramente pretendemos aplicar os conhecimentos da teoria de códigos para iniciar o estudo das chamadas “Álgebras de Códigos”, um novo tipo de álgebras comutativas e não associativas definidas a partir de um código linear binário (i.e. sobre $\mathbb{F}_2$). Além disso, pretendemos investigar a relação entre as Álgebras Código e as Álgebras de Jordan, apresentadas em [3], buscando, sempre que possível, estabelecer condições necessárias e suficientes sobre o código linear binário para que a Álgebra Código por ele determinada seja uma Álgebra de Jordan. Também pretendemos estender os resultados de [3] para álgebras definidas sobre códigos não necessariamente binários.

Referências

- [1] HILL, Raymond. **A First Course in Coding Theory**. Estados Unidos: Oxford University Press, 1986.
- [2] LING, S.; XING, C. **Coding Theory: A First Course**. Estados Unidos: Cambridge University Press, 2004.
- [3] MARTIN, Maria Eugenia. **Deformações e Isotopias de Álgebras de Jordan**. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Lema da Serpente para categorias abelianas

Lucas Xavier*

xavierlucas@ufpr.br

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

wagnermoraes@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: categorias, lema da serpente, categorias abelianas.

Resumo: A Teoria das Categorias, concebida por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em meados do século XX, surgiu da necessidade de uma linguagem unificadora para a matemática. Sua principal motivação era formalizar e estudar as estruturas e relações que se repetiam em áreas aparentemente distintas, como a topologia algébrica e a álgebra abstrata. Em vez de se concentrar nos detalhes internos de cada estrutura, a teoria se volta apenas para as relações entre seus elementos, os morfismos. Essa mudança de perspectiva mostrou-se extraordinariamente poderosa, oferecendo uma estrutura conceitual capaz de revelar semelhanças profundas entre construções de diferentes campos e permitindo a transferência de resultados e intuições de maneira rigorosa.

Dentro desse panorama de abstração, as categorias abelianas buscam capturar as propriedades essenciais de estruturas algébricas fundamentais, como os grupos abelianos e os módulos sobre um anel. Sua definição é dada de forma axiomática, assegurando um comportamento análogo ao da categoria dos grupos abelianos. O objetivo do presente estudo é, portanto, investigar as consequências profundas desses axiomas. O foco estará em compreender um dos resultados mais centrais neste contexto: o **Lema da Serpente**.

O poder desse resultado está na capacidade de estabelecer uma conexão entre sequências exatas em categorias abelianas, por meio de um morfismo conector δ relacionando o núcleo e o conúcleo dos morfismos das extremidades do diagrama. No contexto das categorias abelianas, demonstra-se que, se duas sequências exatas se conectam por um diagrama comutativo, então é possível criar um morfismo ligando as sequências exatas formadas pelos núcleos de uma sequência aos conúcleos da outra, criando uma sequência exata longa:

$$0 \rightarrow \ker f \xrightarrow{m_0} \ker g \xrightarrow{e_0} \ker h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{m_1} \operatorname{Coker} g \xrightarrow{e_1} \operatorname{Coker} h \rightarrow 0$$

A ideia central é que a rigidez estrutural de um diagrama comutativo em uma categoria abeliana, cujas linhas satisfazem a propriedade de sequência exata, impõe

*Bolsista do Programa de PET-Matemática

a existência de uma conexão necessária entre os núcleos e os conúcleos dos morfismos que o constituem. Esse lema não é um resultado isolado, mas um exemplo representativo dos chamados lemas de diagrama.

Referências

- [1] RIBEIRO, Maico Felipe S. **Teoria das Categorias para Matemáticos: uma breve introdução**. Rio de Janeiro: SBM, 2020.
- [2] MAC LANE, Saunders. **Categories for the Working Mathematician**. 2^a ed. New York: Springer, 1998.

Matrizes Circulantes e uma Surpreendente Aplicação

Ana Caroline da Silva *
23000409@uepg.br¹

Marciano Pereira (Orientador)
marciano@uepg.br¹

¹Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)

Palavras-chave: Matrizes Circulantes, Equações Polinomiais, Autovalores.

Resumo:

Matrizes circulantes formam uma classe especial de matrizes caracterizadas por uma estrutura cíclica simples, mas dotada de propriedades espectrais notáveis. Este trabalho descreve um método unificado para a resolução de equações polinomiais de segundo, terceiro e quarto grau, fundamentado nas propriedades dos autovalores dessas matrizes. Para isso, explora-se a relação entre os coeficientes de um polinômio e o polinômio característico de uma matriz circulante adequadamente construída. Apresentam-se a definição e as propriedades fundamentais das matrizes circulantes, com ênfase na obtenção de seus autovalores por meio das raízes da unidade. O método revela uma abordagem algébrica elegante e sistemática, destacando a utilidade estrutural dessas matrizes no contexto da álgebra linear e da teoria espectral.

Introdução

Este trabalho é fruto do projeto de Iniciação Científica da autora voltado ao estudo da teoria avançada de matrizes, com foco na investigação e revisão de técnicas e propriedades especiais. Neste trabalho, explora-se as matrizes circulantes e sua surpreendente aplicação na resolução de equações polinomiais.

A resolução de equações polinomiais é um problema clássico da álgebra. Embora existam fórmulas fechadas para polinômios de graus menores ou iguais a quatro, abordagens alternativas que conectam álgebra linear à teoria dos polinômios despertam grande interesse.

Nesse sentido, as matrizes circulantes se destacam pela sua estrutura cíclica e propriedades espectrais (autovalores estão diretamente relacionados às raízes da unidade) e algébricas, permitindo representar polinômios como polinômios característicos, o que facilita o cálculo de suas raízes por meio dos autovalores.

*Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e graduanda do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada.

Matrizes Circulantes

As matrizes circulantes formam uma classe especial de matrizes quadradas com estrutura cíclica, em que cada linha é obtida por uma permutação cíclica à direita da anterior. Mais precisamente:

Definição : Uma matriz quadrada C de ordem n , com entradas $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$, é dita **circulante** se tem a forma

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Denota-se uma matriz circulante como $C = C(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$.

São exemplos de matrizes circulantes as matrizes de ordem 3 e n , respectivamente, dadas por $A = C(1, 2, 3)$ e $P = C(0, 1, 0, \dots, 0)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Destaca-se que a matriz P é conhecida como a *matriz de permutação primária*. Com base nela, podemos caracterizar as matrizes circulantes por meio da seguinte propriedade.

Teorema 1: Uma matriz C de ordem n é circulante se, e somente se,

$$C = PCP^t,$$

em que P é a matriz de permutação primária.

Além dessa caracterização, as matrizes circulantes possuem propriedades espectrais bastante ricas, que são descritas no seguinte teorema.

Teorema 2: Seja $C = C(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ uma matriz circulante como em (1) e considere $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$. Então

1. $C = f(P)$, sendo P a matriz de permutação primária.
2. C é uma matriz normal, isto é, $C^*C = CC^*$.
3. Os autovalores de C são os valores $f(\omega^k)$, sendo $\omega_k = e^{2\pi ik/n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, as n raízes n -ésimas da unidade.
4. $\det C = f(\omega^0)f(\omega^1) \cdots f(\omega^{n-1})$.
5. $F^*CF = D$, sendo D uma matriz diagonal e F uma matriz unitária com as entradas $f_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(i-1)(j-1)}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Observa-se, pelo item 1 e 3 do teorema acima, que a simetria cíclica das matrizes circulantes se reflete também em suas propriedades espectrais.

Resolução de Equações Polinomiais

Considere equações polinomiais $p(t) = 0$, em que p é um polinômio de segundo, terceiro ou quarto grau. Para o polinômio p , constrói-se uma matriz circulante C cujo polinômio característico coincida com p . A ordem da matriz C corresponde ao grau do polinômio fornecido e, por manipulação algébrica, obtém-se a matriz circulante de interesse. Usando os itens 1 e 3 do Teorema 2, os autovalores da matriz C são facilmente encontrados e esses são as raízes do polinômio p .

Para fins ilustrativos, observe a aplicação do método no caso cúbico. Dado o polinômio mônico geral $p(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, queremos encontrar uma matriz circulante $C = C(a, b, c)$ de ordem 3 tal que $\det(tI - C) = p(t)$. Realizando a mudança de variável $x = t - \alpha/3$, o traço da matriz C torna-se nulo e tem-se que $C = C(0, b, c)$.

Com a imposição da igualdade entre os polinômios, encontra-se que $b^3 + c^3 = -\gamma$ e $b^3 c^3 = -\beta^3/27$. Observa-se que b^3 e c^3 são as raízes da equação quadrática $x^2 + \gamma x - \beta^3/27 = 0$, donde obtém-se os valores de b e c e, logo, a função $f(x) = bx + cx^2$. Por meio desta e pelo item 3 do Teorema 2, encontram-se os autovalores de C utilizando as raízes cúbicas da unidade e, por consequência, as raízes do polinômio p .

A abordagem para o caso quadrático é relativamente simples. Por outro lado, o caso quártico possui uma abordagem análoga ao caso ilustrado acima, sendo necessário manipulações algébricas convenientes.

Conclusão

Este trabalho apresentou as matrizes circulantes, sendo elas uma classe de matrizes com estrutura cíclica, bem como evidenciou a sua utilidade na resolução unificada de equações polinomiais de segundo, terceiro ou quarto grau. Para estabelecer essa relação, explorou-se a conexão direta entre os autovalores dessas matrizes e as raízes das equações, mediada pelas raízes da unidade.

A principal contribuição deste trabalho reside na divulgação de uma abordagem alternativa, que une álgebra linear e teoria dos polinômios por meio da estrutura espectral das matrizes circulantes. Tal método não apenas fornece uma via elegante para a obtenção das raízes de polinômios, mas também ressalta o potencial dessas matrizes em contextos teóricos mais amplos.

Referências

- [1] Cavalcanti, A. S; Silva, B. C; Tanaka, T. Y. Resolução de Equações Polinomiais Via Matrizes Circulantes . **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**. v. 9, n. 1, p. 97- 119, 2024.
- [2] Kalman, D; White, J. E. Polynomial Equations and Circulant Matrices. **The American Mathematical Monthly**. v. 108, n. 9, p. 821-840, 2001.
- [3] Zhang, F. **Matrix Theory - Basic Results and Techniques**. 2. ed. New York: Springer, 2011.

Sobre a existência de uma base para cada espaço vetorial

Eric Steffan Budal da Costa
steffan.eric@ufpr.br¹

Profa. Dra. Tanise Carnieri Pierin (Orientadora)
tanise@ufpr.br²

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: espaços vetoriais, base, dimensão.

Resumo:

A **álgebra** é um ramo fundamental da matemática que estuda as estruturas e as operações sobre conjuntos, com foco em propriedades satisfeitas por essas operações. Ela é uma das áreas mais amplas e antigas da matemática, oferecendo a base para uma infinidade de aplicações, desde as ciências exatas até as ciências sociais e computação. A álgebra abrange desde conceitos mais elementares, como equações e polinômios, até áreas mais abstratas e complexas, como a teoria dos grupos, anéis e corpos. Dentro da álgebra, a **álgebra linear** se destaca por sua aplicabilidade e profundidade teórica. Ela lida principalmente com espaços vetoriais e as transformações lineares entre esses espaços. A álgebra linear é fundamental não apenas na matemática pura, mas também nas ciências aplicadas, como física, economia, estatística, computação e engenharia, devido à sua capacidade de modelar e resolver problemas em múltiplas dimensões. Um dos conceitos centrais da álgebra linear é o de **espaço vetorial**, que é um conjunto de vetores (objetos que podem ser somados e multiplicados por escalares) cujas operações obedecem a uma série de axiomas que garantem a sua estrutura. No coração dessa teoria está a ideia de **base**, um conjunto de vetores que gera todo o espaço de forma única e sem redundâncias. A base é crucial porque ela define a **dimensão** do espaço, ou seja, o número de “direções independentes” em que o espaço pode ser estendido. Fornece, ainda, uma forma de descrever todos os elementos de um espaço vetorial de maneira única e estruturada. Uma base de um espaço vetorial V sobre um corpo K é um conjunto de vetores que é **linearmente independente** e **gera** o espaço, ou seja, todo vetor de V pode ser escrito como uma combinação linear finita desses vetores, e não há redundância entre eles. Em espaços vetoriais de dimensão finita, como $\mathbb{R}^n$, é relativamente simples construir e entender bases. Por exemplo, o conjunto dos vetores canônicos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ forma uma base padrão de $\mathbb{R}^n$. Já em espaços vetoriais de dimensão infinita — como o espaço de todas as sequências reais ou o espaço dos polinômios — a construção de uma base

exige um tratamento mais abstrato. A demonstração da existência de bases em **qualquer espaço vetorial** é feita com o uso do **Lema de Zorn**, uma ferramenta da teoria dos conjuntos equivalente ao Axioma da Escolha. A ideia é considerar o conjunto de todos os subconjuntos linearmente independentes de V e usar o Lema de Zorn para mostrar que existe um subconjunto maximal com essa propriedade. Tal subconjunto será uma base, pois, se não gerasse V , poderíamos adicionar mais vetores a ele sem perder a independência linear, contradizendo sua maximalidade. Esse resultado tem implicações fundamentais: permite generalizar propriedades de transformação linear, coordenadas e estruturas algébricas a contextos abstratos, sustentando grande parte da álgebra moderna. Este trabalho, portanto, aborda tanto o entendimento intuitivo de base em espaços que têm um conjunto finito de geradores quanto a necessidade de argumentos formais mais avançados em espaços em que todos os conjuntos de geradores são infinitos, destacando a profundidade e a generalidade do conceito na álgebra linear.

Referências

- [1] LEON, S. **Álgebra Linear com Aplicações**. LTC, 9a. edição, 2019.
- [2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. EdUSP, 2001.

Uma Introdução às Álgebras de Lie

Emilly Giovana Torquato*

emillygiovana@alunos.utfpr.edu.br¹

Prof^a. Dra. Lilian Cordeiro Brambila (Orientadora)

lilianc@utfpr.edu.br¹

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Palavras-chave: Álgebras de Lie; Teorema de Lie; Teorema de Engel.

Resumo: Este trabalho aborda os principais resultados dos capítulos 1 e 2 de [1], que apresentam o conceito de álgebra de Lie e algumas de suas propriedades e conceitos relacionados. Uma álgebra de Lie consiste em um espaço vetorial munido de uma operação bilinear, antissimétrica e que satisfaz a identidade de Jacobi. Tal operação é chamada de colchete de Lie. Entre os exemplos explorados neste trabalho estão $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ (a álgebra de todas as transformações lineares em um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$) e $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ (o subespaço de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ cujos elementos têm traço zero). Em seguida, apresenta-se o conceito de subálgebras que são subespaços de uma dada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que são fechados sob o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$. O trabalho segue com os conceitos de ideais, morfismos de álgebras de Lie e representações, destacando-se a representação adjunta. Por fim, discutem-se o Teorema de Engel e o Teorema de Lie, que caracterizam álgebras de Lie nilpotentes e solúveis de transformações lineares definidas em espaços vetoriais de dimensão finita, sobre um corpo algebricamente fechado, como uma subálgebra do espaço das matrizes triangulares superiores. Este trabalho tem como referências bibliográficas principais [1] e [3]. Para revisão de conceitos de Álgebra Linear foi utilizado [2].

Referências

- [1] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie*, UNICAMP, São Paulo, 1999.
- [2] Hoffman, K.; Kunze, R., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971.
- [3] Zoppellaro, G., *Álgebras de Lie nilpotentes e solúveis*, UFMG, Minas Gerais, 2017.

*Voluntária do PIVIC - UTFPR, campus Curitiba

Uma pálda “família” de categorias: Morfismos universais em categorias concretas

Ana Carla de Carvalho Honório*

anahonorio@ufpr.br¹

Juan Sebastián Herrera Carmona (Orientador)

sebastianherrerah@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: categorias concretas, funtores, morfismos universais.

Resumo: O objetivo deste trabalho é estudar construções universais em categorias concretas. Por categoria concreta, entendemos uma categoria munida de um funtor esquecimento [1, §1.5]. Alguns exemplos clássicos de categorias concretas são **Set**, **Grp**, **Ab**, **Vect_ℝ**, **Top**, **Met** junto de seus respectivos funtores canônicos de esquecimento de estrutura que tomam valores em **Set**. Por construções universais, entendemos certos objetos ou morfismos de uma categoria que se caracterizam por uma propriedade universal, isto é, uma propriedade especial que determina de forma única como os demais morfismos se relacionam ou se conectam a eles [4, §3.4].

Mais especificamente, sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor e B um $\mathcal{B}$ -objeto. Definimos um *morfismo universal* de B para $\mathcal{F}$ como um par (R, u) que consiste de um $\mathcal{A}$ -objeto R e de um $\mathcal{B}$ -morfismo $u : B \rightarrow \mathcal{F}(R)$, tal que para todo par (S, t) , onde S é um $\mathcal{A}$ -objeto e $t : B \rightarrow \mathcal{F}(S)$ é um $\mathcal{B}$ -morfismo, existe um único $\mathcal{A}$ -morfismo $t' : R \rightarrow S$ com $\mathcal{F}(t') \circ u = t$. Intuitivamente, dizemos que existe uma única maneira de se obter t por intermédio de u . Alguns objetos conhecidos que podem ser vistos como morfismos universais são: a base de um espaço vetorial na categoria **Vect_ℝ**, o completamento de um espaço métrico na categoria **Met**, o conjunto quociente de uma relação de equivalência em **Set**, o grupo quociente de um grupo por um subgrupo normal em **Grp**, o produto tensorial de dois espaços vetoriais em **Vect_ℝ** entre outros [2, §3.1]. Mais geralmente, limites podem ser vistos como morfismos universais ao considerarmos funtores apropriados [3], então construções categóricas fundamentais como produtos, pullbacks e equalizadores — e suas respectivas construções duais — também são morfismos universais.

Assim, este trabalho propõe-se a apresentar como as construções universais podem ser empregadas para demonstrar resultados que, embora já familiares em tais casos particulares, revelam resquícios dessa estrutura universal em suas demonstrações.

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial PET-Matemática

A partir de tal perspectiva, busca-se compreender de que maneira os morfismos universais não apenas generalizam essas construções categóricas, mas também oferecem um arcabouço conceitual capaz de consolidar e justificar suas propriedades fundamentais.

Referências

- [1] Adámek, J. and Herrlich, H. and Strecker, G.E. **Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats**. Dover Publications, 2009.
- [2] Mac Lane, Saunders. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [3] Ribeiro, Maico Felipe Silva. **Teoria das Categorias para Matemáticos: uma breve introdução**. Rio de Janeiro: SBM, 2020.
- [4] Roman, Steve. **An Introduction to the Language of Category Theory**. Springer International Publishing, 2017.

Análise

Comissão Científica:

Prof. Dr. Alexandre Kirilov

Prof^a. Dra. María Rosario Astudillo Rojas

Prof. Dr. Manuel Jesus Cruz Barreda

Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio

Banca Avaliadora:

Dr. Alexandre Kirilov

Dr. Fernando de Ávila Silva

Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez

Dr. Manuel Jesus Cruz Barreda

Dra. María Rosario Astudillo Rojas

Dr. Pedro Danizete Damázio

Espaço Variável de Lebesgue

Amanda Carolina Coelho

amandacarolinacoelho1@gmail.com¹

Felipe Vieira (Orientador)

f.vieira@ufsc.br¹

¹Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Blumenau

Palavras-chave: espaço variável de Lebesgue, função expoente, função modular, espaço vetorial, espaço normado.

Resumo:

Neste trabalho nos dedicamos a estudar o espaço variável de Lebesgue, também conhecido como espaço $L^{p(x)}$. Este espaço surge como uma generalização natural dos espaços clássicos de Lebesgue, nos quais o expoente p é constante.

Inicialmente é necessário introduzir que dado um conjunto Γ obtemos a função expoente mensurável de Lebesgue $p(\cdot)$ dada por $p(\cdot) : \Gamma \rightarrow [1, \infty]$. Além disso, definimos a função modular associada à $p(\cdot)$ como

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Gamma_\infty)},$$

bem como algumas propriedades elementares desses parâmetros.

A partir disso, passamos a estudar a definição formal do espaço variável de Lebesgue. Em poucas palavras, uma função f mensurável pertence ao espaço $L^{p(x)}(\Gamma)$ se

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\infty} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx + \left\|\frac{f}{\lambda}\right\|_{L^\infty(\Gamma_\infty)} < \infty$$

para algum $\lambda > 0$.

Estudamos também sua estrutura algébrica, mostrando que $L^{p(x)}(\Gamma)$ constitui um espaço vetorial e é, também, normado.

Este trabalho integra o desenvolvimento do meu TCC, cujo tema foi escolhido na participação no evento da J3M no ano de 2024, quando tive o primeiro contato com o conceito do espaço $L^{p(x)}$.

Referências

- [1] BARTLE, Robert G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- [2] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2010.
- [3] CRUZ-URIBE, David. **Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis**. Basel: Birkhäuser, 2013.
- [4] HUNTER, John K. **Notas de Aula: espaços L^p** . "Disponível em: https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes_ch7.pdf". Acessado em: 19-05-2025.
- [5] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis: with Applications**. New York: Wiley, 1989.

Espaços de Hilbert e Séries de Fourier

Leonardo Angelo Rigo*

leonardo.rigo@ufpr.br¹

Cleber de Medeira (Orientador)

clebermedeira@ufpr.br²

¹Universidade Federal Do Paraná

Palavras-chave: Espaços de Hilbert, Séries de Fourier, convergência de séries.

Resumo:

A série de Fourier surgiu do estudo de somas infinitas de senos e cossenos e suas soluções para problemas físicos. Joseph Fourier (1768-1830) é creditado por usar somas infinitas de senos e cossenos para modelar o comportamento do fluxo de calor em modelos físicos. A série de Fourier e suas aplicações são importantes ferramentas no estudo de diversas áreas do conhecimento, por exemplo, no estudo de problemas em análise harmônica e na física quântica. Por um outro lado, temos os Espaços de Hilbert, que são espaços vetoriais que possibilitam visualizar muitas intuições geométricas, a partir de conceitos, problemas e suas soluções, vistos em espaços euclidianos. Esses espaços generalizam e fornecem boas imagens de situações correspondentes em espaços de dimensão infinita. Adicionalmente, sua aplicabilidade a muitas áreas matemáticas traduz as intuições geométricas para novos contextos e nos permite compreender problemas mais sofisticados que originalmente parecem intratáveis e sem relação com outros problemas matemáticos.

Nesse trabalho fazemos um estudo sobre sequências ortonormais em espaços de Hilbert e seus respectivos coeficientes de Fourier. De forma geral, em um espaço de produto interno, temos que a norma da sequência de coeficientes Fourier é estimada pela Desigualdade de Bessel. Contudo, quando temos um espaço de produto interno completo, ou seja, um espaço de Hilbert, temos o Teorema de Parseval que “transforma” a Desigualdade de Bessel em uma igualdade, conhecida como Identidade de Parseval. Esse resultado leva à conclusão de que a convergência da série de Fourier no espaço de Hilbert L^2 é equivalente à Identidade de Parseval.

Por fim, estudamos o Teorema de Riesz-Fischer que prova que o sistema trigonométrico formado por senos e cossenos é um sistema ortonormal completo em L^2 . Portanto, a série de Fourier de cada elemento f em L^2 converge para f na norma desse espaço.

*Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA)

Referências

- [1] KREYSZIG , E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Nova York: Wiley, 1991 .
- [2] Figueiredo D.G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [3] FOLLAND, G.B. **Fourier Analysis and Its Applications**. Pacific Groove: Wadsworth Inc., 1992.

O lema de Morse em $\mathbb{R}^n$ e Aplicações

Allyson Henrique Cansian *

allyson@alunos.utfpr.edu.br ¹

Prof. Dra. Lilian Cordeiro Brambila (Orientadora)

lilianc@utfpr.edu.br ²

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Palavras-chave: Lema de Morse, Pontos críticos, Diferenciabilidade.

Resumo:

Este trabalho tem como interesse discutir e entender o Lema de Morse em $\mathbb{R}^n$, um importante resultado da Análise em $\mathbb{R}^n$ que descreve de maneira mais simples uma função suave ao redor de um ponto crítico não-degenerado. Isto é, nas coordenadas apropriadas, essa função pode ser escrita como uma forma quadrática. Este trabalho tem como objetivo principal entender uma demonstração para o Lema de Morse em $\mathbb{R}^n$. Para construir o caminho até o entendimento desse resultado, são necessários alguns conceitos da Análise Real como o estudo da topologia do espaço $\mathbb{R}^n$, funções contínuas e diferenciáveis, classificação de pontos críticos através da matriz hessiana e também o Teorema da Função Inversa. Nas conclusões, o trabalho mostra que esse preparo conceitual não só facilita a compreensão do lema, mas também abre espaço para aplicações em áreas como geometria e otimização. A relevância do estudo está em aproximar teoria e prática, ajudando na formação matemática e na divulgação de ferramentas úteis para diferentes áreas da matemática. Como principal referência deste trabalho foram utilizados [1] e [4]. Também foram utilizados [2] e [3] para o estudo dos pré-requisitos necessários.

Referências

- [1] APOSTOL, T. M. **Cálculo II. 2.** ed. Barcelona: Editorial Reverté, 1996.
- [2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear.** São Paulo: EDUSP, 2007.
- [3] LIMA, E. L. **Curso de análise. Volume 1.** 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. (Projeto Euclides).
- [4] LIMA, E. L. **Curso de análise. Volume 2.** 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Projeto Euclides).

*/Voluntario

Os Espaços de Lebesgue com Expoente Variável

Elissandro Antonio Sikora*
elissandrosikora@ufpr.br¹

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)
wagnermoraes@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná - UFPR

Palavras-chave: Integral de Lebesgue, Espaços $L^{p(\cdot)}$, Funções Expoente.

Resumo:

Após a definição da integral de Lebesgue e do espaço L^1 , estudamos os chamados espaços L^p , em que $1 \leq p < +\infty$. O espaço L^p é formado pelas classes de equivalência das funções mensuráveis f tais que $\int |f|^p d\mu$ é finito. Em L^p , dizemos que duas funções são equivalentes se diferem apenas em um conjunto de medida nula, então, por abuso de notação, nos referimos aos elementos do espaço apenas como funções. Para $p = +\infty$, o espaço L^∞ é formado pelas funções mensuráveis que são limitadas em quase todo ponto.

Esses espaços possuem diversas propriedades importantes, por exemplo, carregam consigo alguns resultados interessantes de convergência e são espaços de Banach, o que significa que toda sequência de Cauchy em L^p é convergente em relação à norma. Porém, em vistas de generalizar estes espaços, surge a questão: o que acontece se trocamos o expoente constante p por uma função $p(x)$? É isso que o estudo dos espaços de Lebesgue com expoente variável tenta responder.

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e Lebesgue mensurável, definimos $\mathcal{P}(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções mensuráveis $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, +\infty]$, chamadas de funções expoente. Denotamos $p_- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(\cdot)$ e $p_+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(\cdot)$.

Naturalmente, dada $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, queremos definir o espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como formado por todas as funções mensuráveis f tais que $\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} d\mu$ é finito. Porém, essa integral pode não estar bem definida, por exemplo, temos problemas se $p(x) = +\infty$ em algum subconjunto de medida positiva. Em vista disso, fazemos uma abordagem diferente.

Dada f uma função mensurável, definimos o modular de f associado a $p(\cdot)$ por:

$$\rho(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} d\mu + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$$

Em que $\Omega_\infty = \{x \in \Omega ; p(x) = +\infty\}$ e $\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega_\infty} |f(x)|$.

*Bolsista do PET-Matemática UFPR

O modular tem algumas propriedades interessantes, em particular, se para algum $\Lambda > 0$ temos que $\rho\left(\frac{f}{\Lambda}\right) < +\infty$, então, para $\lambda \geq \Lambda$, a aplicação $\lambda \mapsto \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ é contínua, decrescente e tende para zero quando $\lambda \rightarrow +\infty$. Assim, isso nos possibilita definir $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como o conjunto das classes de equivalência das funções mensuráveis f tais que $\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) < +\infty$, para algum $\lambda > 0$. Essa abordagem visa deixar o espaço mais abrangente quando $p(\cdot)$ não é limitada, pois caso $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < +\infty$, o espaço $L^{p(\cdot)}$ coincide com o conjunto das funções tais que $\rho(f)$ é finito.

Com as operações usuais de adição de funções e multiplicação por escalar, $L^{p(\cdot)}$ forma um espaço vetorial. Definimos a norma nesse espaço por:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 ; \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\},$$

norma essa que está bem definida pelas boas propriedades do modular. Mostra-se que, quando $f \neq 0$, o ínfimo que aparece na definição é sempre atingido, ou seja, temos $\rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1$, e a igualdade ocorre se, e somente se, $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < +\infty$. Além disso, quando $p(\cdot) = p$, $1 \leq p \leq +\infty$, mostra-se que essa norma equivale à norma clássica e os espaços L^p e $L^{p(\cdot)}$ coincidem.

Neste estudo, abordamos as principais propriedades desses espaços, algumas delas muito similares ao caso clássico. Vimos condições necessárias e suficientes para o mergulho $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$, chegando à conclusão de que $L^{p(\cdot)} \subseteq L^{p_+} + L^{p_-}$. Também observamos uma versão da Desigualdade de Hölder para expoentes variáveis, a qual generaliza a desigualdade no caso clássico com a presença de uma constante $K_{p(\cdot)}$, que depende do comportamento da função expoente. Novamente, quando $p(\cdot) = p$, $1 \leq p \leq +\infty$, é possível mostrar que $K_{p(\cdot)} = 1$. Além disso, estudamos os tipos de convergência em $L^{p(\cdot)}$: em norma, modular e medida, analisando quais relações podemos estabelecer entre eles. Por fim, para a convergência em norma, surgem resultados semelhantes aos teoremas da Convergência Monótona, da Convergência Dominada e Lema de Fatou do caso clássico, dos quais podemos nos utilizar para provar que $L^{p(\cdot)}$ é um espaço de Banach.

Referências

- [1] CRUZ-URIBE, D. V. ; FIORENZA, A. **Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis**. Springer Basel, 2013.
- [2] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration**. 1 ed. New York: John Wiley and Sons, 1966.
- [3] FITZPATRICK, P.; ROYDEN, H. **Real Analysis**. Prentice Hall, 2010.

Propriedades globais de operadores em $\mathbb{T}^2$ com coeficientes variáveis

Leonardo Cortez do Nascimento*

leonardo.cortez.0111@gmail.com¹

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

wagnermoraes@ufpr.br²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná - UFPR

Palavras-chave: Hipoeleticidade Global, Resolubilidade Global, Séries Parciais de Fourier.

Resumo:

Ao estudar EDPs no toro $\mathbb{T}^n$, que representa sistemas com periodicidade, duas questões fundamentais emergem. A primeira é a da existência de soluções, formalizada pelo conceito de resolubilidade global. A segunda é a da regularidade: se uma solução existe no sentido fraco das distribuições, ela é, na verdade, uma função suave? Esta questão é respondida pelo conceito de hipoeleticidade.

A análise conjunta da resolubilidade e da hipoeleticidade é essencial para a boa formulação de um problema. Tão importante quanto saber que, se uma solução existir, ela será suave (hipoeleticidade), é saber que a equação pode ser resolvida para as funções de interesse (resolubilidade). As dissertações estudadas, [2] e [3], abordam ambos os problemas com auxílio da ferramenta da Análise de Fourier.

Como objetivo central deste trabalho, define-se estudar e compreender os critérios de resolubilidade global e hipoeleticidade global para certas classes de operadores diferenciais parciais lineares definidos no toro $\mathbb{T}^2$. Para uma melhor gradação do conhecimento, começaremos por esta, mais simples de ser analisada e, após isso, partiremos àquela. Para tanto, se faz necessário entender conceitos da Teoria das Distribuições Periódicas e da Análise de Fourier, que serão fundamentais no decorrer do trabalho.

Definição 1: Definimos por

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \varphi(x) = \varphi(x + 2\pi m), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall m \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

o espaço das funções teste 2π -periódicas. Além disso, o espaço vetorial $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ dos funcionais lineares contínuos definidos em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ é chamado de espaço das distribuições periódicas.

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

Definição 2: Uma sequência $\{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ é dita rapidamente decrescente se, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existir $C > 0$ tal que $|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k}$, $\forall m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Denotaremos o espaço das sequências rapidamente decrescentes por $s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$.

Definição 3: Uma sequência $\{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ é dita de crescimento lento se existirem constantes $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tais que $|c_m| \leq M|m|^k$, $\forall m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Denotaremos o espaço das sequências de crescimento lento por $s'(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$.

A partir das definições 1-3, temos constituída a ideia central da teoria: os isomorfismos que caracterizam os espaços envolvidos. O primeiro estabelece que a Transformada de Fourier é um isomorfismo entre os espaços $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$, enquanto o segundo estabelece a relação entre $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ e $s'(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$. Esta correspondência traduz propriedades analíticas (como a suavidade de uma função) em propriedades algébricas (o decaimento de uma sequência).

Definição 4: Seja $P = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes. Dizemos que P é globalmente hipoeĺítico se:

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \text{ e } Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \implies u \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Nesse contexto, um resultado clássico na área de hipoeĺiticidade global é o de Greenfield e Wallach, [1], que diz respeito à classe de operadores dada por $P = D_x - \alpha D_y$, enunciado a seguir.

Teorema 1: Considere o operador $P = D_x - \alpha D_y$, com $\alpha \in \mathbb{C}$, definido em $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Então:

- (a) Se $\alpha = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então P é globalmente hipoeĺítico;
- (b) Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então P não é globalmente hipoeĺítico;
- (c) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então P é globalmente hipoeĺítico se, e somente se, α é não-Liouville.

Generalizando o caso de coeficientes constantes, estuda-se a classe de operadores dados por $Q = \frac{\partial}{\partial t} - c(t) \frac{\partial}{\partial x}$, com $c(t) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Para isso, definimos o que entendemos por resolubilidade global.

Definição 5: Dizemos que um operador L é globalmente resolúvel se, para toda função $f \in (\ker {}^tL)^\circ = \{g \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \mid \langle v, g \rangle = 0, \forall v \in \ker {}^tL\}$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $Lu = f$.

O resultado seguinte, principal deste trabalho, estabelece as condições necessárias e suficientes para a hipoeĺiticidade global do operador Q e enuncia uma condição suficiente para sua resolubilidade global.

Teorema 2: Considere o operador $Q = \frac{\partial}{\partial t} - c(t) \frac{\partial}{\partial x}$, com $c(t) = a(t) + ib(t) \in C^\infty(\mathbb{T})$, e as seguintes condições:

- (I) A parte imaginária $b(t)$ é identicamente nula ($b \equiv 0$) e a média da parte real, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(s) \, ds$, é um número irracional não-Liouville;
- (II) A parte imaginária $b(t)$ não é identicamente nula ($b \not\equiv 0$) e não muda de sinal.

Então:

- i. O operador Q é globalmente hipoeĺítico se, e somente se, (I) ou (II) for satisfeita;
- ii. Se (I) ou (II) for satisfeita, então Q é globalmente resolúvel.

Este trabalho evidencia que a teoria das distribuições periódicas, aliada à análise de Fourier, não apenas oferece soluções para equações específicas, mas fornece uma base conceitual completa e rigorosa para a compreensão da estrutura dos operadores diferenciais lineares em domínios periódicos, consolidando-se como uma metodologia indispensável na matemática moderna.

Referências

- [1] GREENFIELD, S. J.; WALLACH, N. R. Global hypoellipticity and Liouville numbers. **Proceedings of The American Mathematical Society**, v. 31, n. 1, p. 112-114, 1972.
- [2] TAKAHASHI, L. T. **Hipoeliticidade global de certas classes de operadores diferenciais parciais**. 1995. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UFSCar, São Carlos, 1995.
- [3] ZANI, S. L. **Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem**. 1988. Dissertação (Mestrado em Matemática) - USP, São Carlos, 1988.

Representação polar de funções reais com compactificação do infinito

Luís Eduardo Vitorino Gonçalves
goncalves.luis@ufpr.br¹

Maria Eugenia Martin (Orientadora)
eugenia@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: compactificação, funções reais, geometria polar, visualização matemática.

Resumo:

Um desafio fundamental na análise é desenvolver intuição para o comportamento global das funções, especialmente seus limites e propriedades assintóticas. Gráficos usuais tornam-se inadequados quando as funções apresentam crescimento ou decaimento rápido, pois as características mais interessantes ficam fora do alcance de qualquer representação finita. Este trabalho propõe uma construção geométrica simples para lidar com essa questão: representar uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como uma curva polar no disco unitário. A ideia central é compactificar tanto o domínio quanto o contradomínio, mapeando valores infinitos para locais finitos e pré-definidos — a borda e o centro do disco — de modo a conter todo o gráfico da função em uma região limitada. A motivação para essa abordagem é inspirada, de forma informal, em conceitos da geometria projetiva, como a esfera de Riemann, e na geometria transformacional da inversão de círculo.

A construção é definida por dois mapeamentos: um para o ângulo θ , que compactifica o domínio $\mathbb{R}$, e outro para o raio r , que compactifica o contradomínio $[0, \infty)$. Começamos pelo componente angular, que distribui a entrada x ao longo do círculo de forma simétrica. As condições impostas são que $\theta = 0$ e $\theta = \pm\pi$ correspondam a $x = 0$, enquanto $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ representem $x = \pm\infty$. Assim, o eixo horizontal codifica a origem da entrada, enquanto o eixo vertical codifica suas infinitudes. Uma função que satisfaz esses requisitos, ajustada para o sinal, é

$$x(\theta) = \tan(\theta) \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right), \quad (1)$$

definida para $\theta \in [-\pi, \pi]$. Esse mapeamento garante que, à medida que θ se aproxima de $\pm\frac{\pi}{2}$, a entrada x diverge, enquanto em $\theta = 0$ ou $\pm\pi$ ela se anula, fechando o círculo de forma contínua. Vale destacar que o semicírculo direito ($\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$) já é suficiente para uma visualização completa da reta real, mapeando $x = 0$ em $\theta = 0$ e $x = \pm\infty$ em $\theta = \pm\pi/2$. A escolha de definir o mapeamento em todo o círculo é meramente estética, conferindo maior simetria e elegância à construção.

Passando ao componente radial. Como desejamos representar saídas pequenas afastadas da origem e saídas grandes próximas ao centro, precisamos de um mapeamento $r : [0, \infty) \mapsto [1, 0)$ satisfazendo $r(0) = 1$ e $\lim_{y \rightarrow \infty} r(y) = 0$, onde $y = f(x)$. Uma escolha conveniente é

$$r(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad (2)$$

Essa função é contínua, monotonicamente decrescente e apresenta exatamente o comportamento de limite desejado: em $y = 0$ o raio é 1, enquanto para $y \rightarrow \infty$ o raio tende a 0. Assim, a borda do disco corresponde aos zeros de f , enquanto o centro corresponde ao crescimento ilimitado. A motivação para essa escolha em particular é que ela apresenta propriedades desejáveis em composição com 1, como, por exemplo, mapear a função identidade em círculos, como mostra a Figura 1a.

Com esses dois elementos, a representação compactificada ρ , da função f , é obtida pela composição definida pela fórmula

$$\rho(\theta) = r(f(x(\theta))), \quad (3)$$

e o gráfico da função ρ é então traçado pela curva polar

$$(\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (4)$$

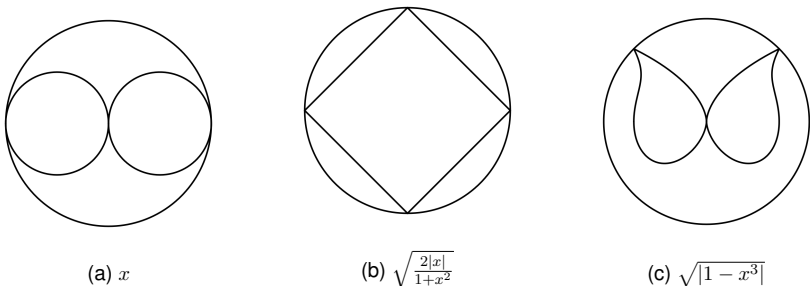


Figura 1: Visualização de várias funções usando o método de compactificação polar. (a) A função identidade. (b) Uma função que produz um quadrado. (c) Uma função que produz uma forma de asa.

Para explorar mais as propriedades dessa representação, uma versão interativa foi disponibilizada online. O leitor é convidado a experimentar diferentes funções e observar como seus gráficos são transformados e compactificados no disco unitário. A demonstração pode ser acessada em:

<https://www.desmos.com/calculator/6j5itz3dtr>.

Uma extensão natural desse arcabouço geométrico é perguntar se a integral de uma função, $\int f(x)dx$, pode ser representada como uma propriedade geométrica de seu disco compactificado. Buscamos uma distribuição de densidade $\delta(\rho, \theta)$ definida no disco unitário tal que sua massa total seja igual à integral de f . Isso exige que o elemento de massa $dM = \delta(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$ no disco corresponda ao elemento de área

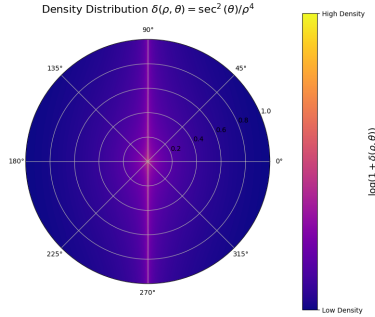


Figura 2: Visualização da distribuição de densidade $\delta(\rho, \theta) = \sec^2(\theta)/\rho^4$. As singularidades no centro ($\rho = 0$) e nas bordas verticais ($\theta = \pm\pi/2$) aparecem claramente como regiões de valores divergentes.

$f(x) dx$ sob a curva original. Relacionando os infinitesimais dx e $d\rho$ com $d\theta$ e dy por meio dos mapeamentos (1) e (2), obtemos uma solução única. Após manipulação algébrica e expressão em coordenadas (ρ, θ) do disco, encontramos a densidade:

$$\delta(\rho, \theta) = \frac{\sec^2(\theta)}{\rho^4}. \quad (5)$$

Esse resultado é intuitivamente satisfatório: a densidade diverge no centro do disco ($\rho = 0$) e em suas bordas verticais ($\theta = \pm\pi/2$), que representam as infinitudes da saída e da entrada da função, respectivamente. Dessa forma, a área finita sob $f(x)$ é concentrada em singularidades nos pontos correspondentes da compactificação. A Figura 2 mostra o gráfico da distribuição de densidade.

Referências

- [1] NEEDHAM, Tristan. **Visual complex analysis**. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [2] TAO, Terence. **Analysis I**. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2006.
- [3] TAO, Terence. **Analysis II**. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2006.

Trajетórias Periódicas e Ergódicas de Campos Vetoriais no Toro

Lucas Bisoni*

Licenciatura em Matemática

lucas.bisoni@ufpr.br¹

Prof. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

Departamento de Matemática

wagnermoraes@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: campos vetoriais, toro bidimensional, trajetórias.

Resumo:

As investigações relativas aos campos vetoriais e suas respectivas trajetórias revelam características intrigantes, principalmente quando analisadas em espaços topológicos diversos. O toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ mostra-se, em especial, um ambiente profícuo para o desenvolvimento desses resultados, conforme descrevem os trabalhos iniciados por Poincaré em 1881 e continuados por Denjoy e Sigel, no século seguinte. Nesse sentido, nos propomos a estudar o comportamento das trajetórias das curvas integrais definidas por campos vetoriais no toro, com ênfase na sua periodicidade e ergodicidade.

Inicialmente, um exemplo clássico nos diz que, para um campo vetorial $X_{a,b}(v) = (a, b)$ constante definido no toro, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, suas trajetórias serão exclusivamente periódicas ou exclusivamente ergódicas, dependendo da racionalidade do quociente b/a . Esse resultado é, na verdade, um caso particular do Teorema de Denjoy, o qual afirma que, dado um campo vetorial não-singular de classe C^r , $r > 1$ definido na superfície do toro, garante-se ou a existência de uma trajetória periódica, ou que todas as trajetórias descritas por esse campo serão ergódicas. Ademais, também é possível verificar que a condição $r > 1$ é necessária através da construção de um contraexemplo para o caso de campos de classe C^1 .

Desse modo, o objetivo desta apresentação é efetuar a construção do toro através de classes de equivalência para, posteriormente, discutir as propriedades associadas aos seus campos vetoriais, com ênfase nos conceitos de periodicidade e ergodicidade das trajetórias aplicadas ao contexto do Teorema de Denjoy e dos campos vetoriais uniformes. Além disso, promoveremos uma discussão sobre os difeomorfismos no círculo, cuja análise nos permitirá abordar a construção das ideais necessárias para verificação desses resultados.

*Voluntário do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

Referências

- [1] TAMURA, Itiro. **Topology of Foliations: An introduction**. Translations of Mathematical Monographs. Estados Unidos: American Mathematical Society, 1992.

Um Estudo sobre Operadores Fortemente Invariantes

Lucas Xavier*

xavierlucas@ufpr.br¹

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

wagnermoraes@ufpr.br²

^{1,2}UFPR

Palavras-chave: Análise de Fourier, Operadores Invariantes, Operadores Elíticos.

Resumo:

Em 1903, Ivar Fredholm publicou um dos trabalhos fundadores da Análise Funcional, no qual analisou sistematicamente uma importante classe de operadores em espaços de dimensão infinita. Hoje, a Análise Funcional se afirma como uma das ferramentas mais sofisticadas da Matemática, generalizando de forma natural os conceitos da Álgebra Linear para o contexto de dimensão infinita.

Um dos palcos centrais da Análise Funcional, e o ponto de partida deste estudo, são os espaços de Hilbert, um caso particular de espaço de dimensão infinita que possuem uma estrutura de produto interno e são completos em relação a ela. Enquanto na Álgebra Linear clássica lidamos com vetores em dimensões finitas, no contexto dos espaços de Hilbert o foco está em funções e operadores que obedecem a essa estrutura interna. Esse ambiente abre caminho para estudar como operadores lineares — análogos das matrizes em dimensão infinita — agem sobre tais funções, permitindo descrever de forma precisa suas propriedades espectrais, decomposições e regularidades.

No presente estudo, consideramos um espaço de Hilbert decomposto em subespaços de dimensão finita. Introduzimos, então, os conceitos de invariância forte e de símbolo de um operador associados a essa decomposição. Essas ideias permitem compreender, em certo sentido, a ação de um operador em termos dos subespaços de dimensão finita que o constituem. O passo seguinte consiste em analisar o símbolo do operador para extrair condições necessárias e suficientes que assegurem sua extensão a um operador limitado.

A partir daí, passamos a considerar o espaço de Hilbert $L^2(M)$, no qual M é uma variedade suave, compacta, orientável e sem bordo, e estendemos o resultado obtido para esse espaço, derivando critérios que permitem identificar quando um operador pertence à classe de Schatten–von Neumann. Além disso, apresentamos uma fórmula explícita para o traço desses operadores, caracterizando com precisão seu comportamento global.

*Bolsista do Programa de PET-Matemática

Referências

- [1] RUZHANSKY, and J. DELGADO, Michael. **Fourier multipliers, symbols and nuclearity on compact manifolds**. Journal d Analyse Mathématique, 135, 2016.
- [2] MORAES, Wagner A. A. de. **Hipoeliticidade Global para Operadores Fortemente Invariantes**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática).
- [3] OLIVEIRA, Cesar R. de. **Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

Uma visita ao Problema de Basileia

Miguel Augusto Vialich*

miheelt@gmail.com¹

María Rosario Astudillo Rojas (Orientadora)

maria.astudillo@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Problema de Basileia, séries, Euler.

Resumo:

O problema de Basileia consiste em determinar a soma da série de números reais dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ele foi proposto em 1644 por Pietro Mengoli e durante muitos anos intrigou a comunidade matemática por ser um problema de fácil formulação mas de difícil solução. Figuras como Leibniz, John Wallis, Henry Oldenburg e os matemáticos da família Bernoulli são algumas que tentaram resolvê-lo, mas o primeiro a conseguir tal feito foi Leonhard Euler, em 1735 [3].

Euler, assim como os Bernoulli, era natural da cidade suíça de Basileia e, por este motivo, o problema recebeu este nome.

A solução do Problema de Basileia trouxe certa fama a Euler [3] por sua criatividade e sofisticação na resolução do problema. Além disso, o resultado que Euler encontrou foi por si só surpreendente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1)$$

Apesar das técnicas utilizadas por ele para chegar a este resultado serem brilhantes, para chegar a essa conclusão, Euler utilizou a seguinte identidade envolvendo a função seno:

$$\operatorname{sen}(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right). \quad (2)$$

Mas a forma com que Euler a deduziu não tinha o rigor necessário para sua validação. A primeira formalização suficiente para validar (2), e consequentemente (1), foi surgir apenas em 1885 (quase 150 anos depois) com um teorema sobre funções complexas que ficou conhecido como Teorema da Fatoração de Weierstrass [2] [3].

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), Voluntário do PET-Matemática

Após esta, outras deduções de (2) surgiram [5], bem como de (1), como por exemplo as soluções de Fourier, Apostol e Cauchy para o problema [3].

O objetivo deste trabalho é portanto entender e apresentar, de um ponto de vista da análise moderna, a solução de Euler para o Problema de Basileia e sua validade, algumas de suas consequências e como ele pode ser visto como caso particular de um problema mais geral.

Referências

- [1] ABBOTT, S. **Understanding Analysis** 2 ed. Nova Iorque: Springer, 2016.
- [2] AHLFORS, L.V. **Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable**. 3 ed. Tóquio: McGraw-Hill, 1981.
- [3] GAYO, Jairo; PROBST, Roy Wilhelm. O problema que tornou Euler famoso. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, Vol. 3, N. 1, 2015. DOI 10.5540/03.2015.003.01.0480.
- [4] LIMA, E.L. **Curso de Análise**: Vol. 1. 15 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.
- [5] SALWINSKI, David. Euler's Sine Product Formula: An Elementary Proof. **The College Mathematics Journal**, Vol. 49, N. 2, 126-135, 2018. DOI 10.1080/07468342.2018.1419703.

Educação Matemática

Comissão Científica:

Prof^ª. Dra. Carla Cristina Pompeu

Prof^ª. Dra. Elisângela de Campos

Prof. Dr. Emerson Rolkowski

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva

Prof. Dr. João Carlos Pereira de Moraes

Prof^ª. Dra. Laynara dos Reis Santos Zontini

Prof^ª. Dra. Neila Tonin Agranionih

Prof^ª. Dra. Tania Teresinha Bruns Zimer

Banca Avaliadora:

Ma. Alessandra Assad Angieski
Ldo. Alessandro Peixoto Moraes
Ma. Beatriz Borba Guergolet
Dra. Carla Cristina Pompeu
Ma. Eduarda de Almeida Gomes Bernardo
Dra. Elisangela de Campos
Dr. Emerson Rolkouski
Me. Fabrício Rodrigues Alves
Dr. Gabriel dos Santos e Silva
Dr. João Carlos Pereira de Moraes
Lda. Lais Gabrielle Barboza Maciel
Dra. Laynara dos Reis Santos Zontini
Lda. Leticia Thais Keil
Ma. Maria Eduarda Bittencourt Camargo Fogaça
Lda. Monique Baptista Fragozo
Dr. Neila Tonin Agranionih
Dra. Paula Rogeria Lima Couto
Dra. Tania Teresinha Bruns Zimer

A matemática e os espaços educativos não tradicionais: um relato de experiência

Maria Fernanda de Mello Alvares Bento¹

23003401@uepg.br

Anna Luiza Prado¹

23001101@uepg.br

Donizete de Oliveira Martins¹

24311001@uepg.br

Yaritza Del Valle Fermin de Martinez¹

23347801@uepg.br

Yasmin Fernanda Heldt¹

23004801@uepg.br

Marcio José Simões² (Supervisor)

marcio.simoese@escola.pr.gov.br

Jocemar de Quadros Chagas³ (Orientador)

jocemarchagas@uepg.br

Palavras-chave: Matemática, PIBID, Espaços Não Formais de Ensino.

Resumo:

O presente trabalho apresenta um relato de experiência a respeito da realização de uma atividade comemorativa ao Dia Nacional da Matemática, data celebrada em homenagem ao matemático, professor e escritor Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido como Malba Tahan. A atividade foi desenvolvida em turmas de 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio estadual do município de Ponta Grossa, sendo promovida por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa, participantes do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), com a intenção de oportunizar um momento lúdico e divertido para os alunos, buscando apresentar a matemática de forma prazerosa e acessível, de modo a despertar o interesse dos estudantes pela

¹ Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência/PIBID. Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG).

² Professor Supervisor do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência/PIBID. Colégio Estadual Prof. Meneleu de Almeida Torres.

³ Coordenador de Área do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência/PIBID. Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG).

matemática por meio de atividades e jogos interativos realizados em espaço diferente da sala de aula.

A educação em espaços não formais, apesar de seguir uma certa estrutura, permite maior flexibilidade na organização dos conteúdos e não necessita de tempo e local determinados (Von Simson, Park, Fernandes, 2001), e pode ser utilizada com o objetivo de proporcionar uma aprendizagem mais prazerosa. À vista disso, a atividade que descrevemos neste trabalho foi fundamentada no aproveitamento de espaços alternativos existentes no ambiente tradicional de aprendizagem para a realização de atividades diversificadas.

Para a execução da ação, o primeiro passo realizado foi o planejamento das atividades, incluindo data e local da aplicação. A atividade foi programada para a semana do Dia Nacional da Matemática, no entanto o local de realização da proposta ainda não havia sido definido.

Os acadêmicos ficaram responsáveis pela idealização e confecção de materiais e jogos a serem utilizados, sendo eles:

(I) Tabuleiro lógico: jogo desenvolvido a partir de um tabuleiro cujas peças se encontram fora de posição, devendo ser reorganizadas conforme um modelo central. Cada participante terá um tabuleiro próprio, enquanto um modelo central será disponibilizado entre os jogadores. O intuito é reproduzir a figura apresentada, sendo considerado vencedor o estudante que concluir a tarefa primeiro.

(II) Jogo da memória com sequência numérica: os participantes devem virar as peças na ordem correta dos números. O tabuleiro contém peças numeradas e o objetivo é revelar cada uma, seguindo a sequência crescente. Se um jogador virar uma peça fora de ordem, perde a rodada.

(III) Picolés da multiplicação: os alunos formam pares entre “casquinhas de sorvete”, contendo multiplicações, e as “coberturas”, com os respectivos resultados. As peças são dispostas de forma embaralhada, incentivando os estudantes a analisarem cada operação para identificar a solução correta.

(IV) Percurso matemático: os alunos devem percorrer um caminho indicado por setas, resolvendo os cálculos e completando com as fichas de resultados, conforme a direção apresentada.

(V) Shisima: um jogo tradicional do Quênia, jogado em um tabuleiro octagonal com nove pontos de interseção. Cada jogador controla três peças, sendo o objetivo alinhar as peças em uma linha reta ou diagonal, semelhante ao popular “Jogo da Velha”.

(VI) Jogo da ASMD (adição, subtração, multiplicação e divisão): o jogador da vez sorteia dois números usando os dados e resolve uma operação utilizando os números sorteados. Se os números sorteados forem, por exemplo, 8 e 4 e o próximo número no tabuleiro for 2, o jogador poderá calcular $8 \div 4$ para seguir em frente. Quem finalizar o percurso primeiro, ganha o jogo.

Após a seleção das atividades, definiu-se o local, optando-se pelo auditório da escola, pois não foi autorizada a saída do ambiente escolar. Embora faça parte da estrutura do colégio, essa área é pouco frequentada pelos alunos, além de ser um

ambiente educativo não tradicional, diferente das salas de aulas às quais os alunos estão habituados.

A execução da proposta ocorreu conforme planejado. Através das atividades os alunos tiveram oportunidade de exercitar seus conhecimentos matemáticos, resolver cálculos numéricos, desenvolver o raciocínio lógico, agilidade mental, e fortalecer o trabalho em equipe.

Os estudantes mostraram-se interessados e entusiasmados com as propostas, participando de todas as atividades de forma engajada. Notou-se, contudo, que em jogos envolvendo resolução de operações, os alunos apresentaram mais dificuldades, mostrando preferência por atividades que estimulassem o raciocínio lógico ou que envolvessem competição.

Durante a ação promovida, o que mais observou-se foi o entusiasmo dos estudantes por participarem de uma atividade externa à sala de aula. Sabe-se que experiências desenvolvidas em espaços não formais podem contribuir para as oportunidades de aprendizagem dos alunos e consequentemente favorecer para o desenvolvimento de suas capacidades cognitivas (Lorenzetti e Delizoicov, 2001); portanto, vale ressaltar que tal proposta refletiu positivamente na motivação e engajamento dos estudantes, visto que o fato de irem a um ambiente fora do habitual contribuiu para o envolvimento dos educandos nos trabalhos proporcionados, implicando em uma aprendizagem mais integrada e um aproveitamento mais significativo das ações.

Referências:

LORENZETTI, L.; DELIZOICOV, D. Alfabetização científica no contexto das séries iniciais. **Ensaio: Pesquisa em Educação em Ciências**, Belo Horizonte, v. 3, n. 1, p. 45–61, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1983-21172001030104>. Acesso em: 03 set. 2025.

VON SIMSON O. R. de M.; PARK M. B.; FERNANDES R. S. **Educação Não Formal**: Cenários da Criação. Campinas, SP: Editora da Universidade/ Centro de Memória, 2001. 313 p.

A prática avaliativa na matemática: uma perspectiva montessoriana

Laura Carolina Aymoré Ferrandin*

laura ferrandin@gmail.com¹

Emerson Rolkouski (Orientador)

rolkouski@uol.com.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Educação Matemática, Avaliação Escolar, Pedagogia Montessori.

Resumo:

A avaliação educacional pode ser classificada em três categorias de acordo com Bloom, Hastings e Madaus (1983): diagnóstica, formativa e somativa. Dentre essas, a avaliação formativa se destaca por sua concepção de um processo contínuo realizado ao longo do período de aprendizagem, permitindo detectar as características de cada estudante. É interessante notar que essa abordagem processual é a preferenciada pela legislação brasileira, como observado na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que determina que:

A verificação do rendimento escolar observará os seguintes critérios: avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais (LDB, Lei n.º 9.394/1996, Art. 24, Inciso V, alínea 'a').

Apesar dessa orientação legal, a efetivação da avaliação formativa na Educação Básica enfrenta obstáculos significativos. Dentre as dificuldades, Conceição e Ferreira (2021) apontam fatores estruturais como: o excesso de alunos em sala de aula, a falta de tempo na carga horária do professor, e a falta de formação continuada para os docentes. Diante desses desafios no sistema tradicional, torna-se relevante explorar abordagens pedagógicas onde a avaliação formativa aparenta estar presente em sua estrutura, como é o caso da pedagogia Montessori.

Desenvolvido pela médica e educadora Maria Montessori, a pedagogia é centrada na criança e na ideia de autoeducação em ambientes propícios. Nele, a aprendizagem ocorre em um Ambiente Preparado, planejado para que a criança possa escolher atividades de acordo com seus interesses e ritmos individuais. O papel do professor é o de um facilitador, que observa e oferece suporte apenas quando necessário, ajudando na promoção do desenvolvimento autônomo do aluno.

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

A avaliação na pedagogia Montessori, nesse contexto, não aparenta ser um elemento isolado, mas uma prática integrada ao cotidiano, alinhada à avaliação formativa. Embora não exista um documento normativo que explicita como a avaliação deve ser realizada, ela se manifesta através de algumas ferramentas conhecidas, como as Lições em Três Tempos, as Fichas de Trabalho, os registros, a autoavaliação, e o uso de portfólios (MARIANAEDUCA, 2019), que permitem um acompanhamento contínuo e individualizado do desenvolvimento do aluno.

Dessa forma, este trabalho investiga as práticas de avaliação em matemática adotadas por professores de escolas montessorianas e os desafios por eles enfrentados, especialmente nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. A pedagogia Montessori pressupõe uma avaliação contínua e processual, mas pouco se discute sobre sua aplicação no ensino da matemática. Com o objetivo de aprofundar essa questão, o estudo buscou, primeiramente, compreender como se operacionaliza a avaliação em matemática no ambiente de escolas montessorianas.

Para atingir tais objetivos, foi desenvolvida uma pesquisa de natureza qualitativa. A coleta de dados ocorreu por meio de entrevistas semiestruturadas, realizadas online com duas professoras que atuam em escolas montessorianas de Curitiba-PR. É importante destacar que todas as participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), permitindo a gravação e utilização das entrevistas.

Posteriormente, a análise dos dados se deu inspirada na Análise de Prosa, permitindo identificar aspectos centrais da prática avaliativa no ensino da matemática e suas articulações com os pilares da pedagogia Montessori, além de permitir inferir quais as relações com a avaliação formativa. A análise das entrevistas revelou percepções sobre a prática avaliativa, que foram organizadas nos seguintes agrupamentos temáticos e seus respectivos destaques:

- **Avaliação como Processo Contínuo e Contextualizado:** Ambas as professoras veem a avaliação não como um evento pontual, mas "processual, progressiva e qualitativa", organicamente integrada à rotina de sala de aula.
- **Observação como Estratégia Avaliativa:** A observação contínua é a principal ferramenta avaliativa, indo desde o professor que anda pela sala com uma prancheta fazendo anotações até a percepção de nuances que o papel não mostra, como a forma que o aluno lida com o erro.
- **Intencionalidade Pedagógica:** A avaliação é sempre uma escolha consciente e planejada, baseada em objetivos formativos ("por que eu promovi essa situação?").
- **Flexibilização e Respeito aos Ritmos Individuais:** É uma característica central, que parte da adaptação de atividades conforme o ritmo e tempo de cada estudante. A flexibilidade se consolida como uma ferramenta pedagógica essencial, reforçando a avaliação como um processo individualizado e não como uma medição padronizada.
- **Dimensão Ética da Avaliação:** A avaliação é usada como uma ferramenta para desenvolver atitudes como autonomia, responsabilidade e como o aluno lida com o erro. O foco está em formar a pessoa, não apenas em medir conteúdos, com o objetivo de que o aluno "não sinta essa avaliação acontecer", mas a vivencie como parte de seu desenvolvimento.

- **Tensões com Exigências Institucionais:** Este é o principal desafio, especialmente nos Anos Finais e Ensino Médio. Uma das professoras descreve viver uma “realidade mais híbrida”, na qual precisa aplicar provas e simulados para atender às demandas da escola, evidenciando o conflito entre a filosofia montessoriana e as exigências por notas e resultados padronizados.

Por fim, a avaliação na Pedagogia Montessori se revela um processo contínuo, personalizado e contextualizado, que ultrapassa a verificação de conteúdos ao se alinhar aos princípios da avaliação formativa, ainda que não seja a única forma possível desse alinhamento. Suas principais estratégias são a observação ativa e intencional do professor para diagnosticar a aprendizagem e a flexibilização das atividades para respeitar os ritmos individuais, reforçando a avaliação como processo e não como uma medição padronizada. A análise da prática montessoriana pode oferecer pistas para repensar os modelos de avaliação predominantes e evidencia que a avaliação, quando concebida como um instrumento de cuidado e não de controle, tem o potencial de transformar a experiência educacional.

Referências

- [1] BRASIL. Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, DF, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 1 set. 2025.
- [2] BLOOM, B. S.; HASTINGS, J. T.; MADAUS, G. F. **Manual de Avaliação Formativa e Somativa do Aprendizado Escolar**. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1983.
- [3] CONCEIÇÃO, J. L. M.; FERREIRA, F. N. Impasses na aplicabilidade e contribuições da avaliação formativa na Educação Básica: uma revisão qualitativa das produções científicas brasileiras. **Revista Educação Pública**, [s.l.], v. 21, n. 38, 2021.
- [4] MARIANAEDUCA. **Princípios da avaliação em Montessori**. Encontro de Educadores Montessori, 2019. Disponível em: <https://www.marianaeduca.com.br>. Acesso em: 7 abr. 2025.

Análise da Produção Escrita de Questões Abertas de Função e Equação do Vestibular da Universidade Estadual de Londrina

Emanuela Gonçalves Lopes¹

*lopesemanuelag@gmail.com*¹

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)²

*gabriel.santos22@gmail.com*²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, Análise da Produção Escrita, Avaliação.

Resumo:

A avaliação observada em grande parte dos ambientes acadêmicos assume um papel de etapa final. Porém, em uma nova perspectiva da avaliação, que a inclui como parte do processo de aprendizagem, cada produção escrita precisa ser analisada com uma leitura focada no que o estudante mostrou saber, visando assim sua aprendizagem a partir de possíveis erros. O objetivo deste estudo é analisar a produção escrita de estudantes que prestaram o vestibular da UEL (Universidade Estadual de Londrina) de 2012 a 2024 em questões de função e equação.

Com a avaliação sendo todo o processo feito visando aprendizagem, ela ocorre a todo momento. Silva e Buriasco (2023, p. 5) destacam que "tomar a avaliação como oportunidade de aprendizagem implica, entre outras coisas, entender que avaliação, ensino e aprendizagem são interligados e, nesse sentido, a avaliação está a serviço dos demais processos".

Nessa perspectiva, entende-se que a avaliação é um todo, um processo, que inclui, de acordo com Hadji (1994): inventário, diagnóstico e prognóstico. Quando o foco estiver apenas na primeira etapa, dificilmente se colocando em prática as outras duas, a avaliação assume um papel de seleção e classificação, sendo ela o objetivo do estudo, ao invés de uma ferramenta para auxiliar na busca por conhecimento.

Então, nessa nova forma de avaliar, como tratar um erro cometido por um estudante? De acordo com Buriasco (2000, p. 172), "a interpretação de um mesmo erro pode ser múltipla". Afinal, um erro pode ter variadas fontes, que nem sempre estão ligadas ao "não saber" de um estudante. Essa nova perspectiva do erro é a verdadeira razão da análise da produção escrita acontecer.

O intuito é substituir a leitura pela falta, focada nos erros e "não saberes" dos estudantes, por uma leitura positiva, com o intuito de enxergar e valorizar o que o estudante mostrou saber (Garnica, 2006).

Até 2024, o vestibular da UEL era dividido em duas fases, sendo a segunda

1 Voluntária do PIBIC

fase formada por questões abertas de disciplinas específicas. Anualmente, a UEL lança a “Revista Diálogos Pedagógicos”, na qual são disponibilizadas todas as questões específicas, as expectativas de resposta, e três resoluções para cada questão (uma satisfatória, uma parcialmente satisfatória, e uma insatisfatória).

Durante alguns meses, quatro estudantes da UFPR (Universidade Federal do Paraná) se reuniram para estudar análise da produção escrita. Cada estudante do grupo escolheu um tema/conteúdo matemático, e selecionou todas as questões que abordassem esse assunto disponíveis nas revistas de 2012 a 2024, assim como suas respectivas resoluções. O tema escolhido pela autora deste resumo foi funções e equações.

Então, cada produção escrita foi codificada. O próximo passo foi começar as análises. Cada produção escrita foi analisada seguindo os três passos de interpretação, inferência e intervenção (Santos, 2014).

A interpretação é analisar os passos seguidos pelo estudante na resolução, verificar se está completa e procurar possíveis erros cometidos em algum momento. Depois, é o momento da inferência, ou seja, investigar porque o estudante fez o que fez, o que o levou a raciocinar daquela forma. Se houve um erro, o que pode ter levado a esse erro? Por fim, trabalha-se com uma intervenção. É o momento de pensar como a produção escrita pode ser usada como oportunidade de aprendizagem. Foca-se em encontrar uma forma de trabalhar o erro de tal modo que o estudante compreenda o que antes era uma dificuldade.

Neste resumo, será apresentada a análise de uma produção escrita da questão 3 de Matemática da segunda fase do vestibular de 2020 da UEL, a qual o enunciado está apresentado abaixo.

Figura 1 - Produção escrita da questão 3 de Matemática da segunda fase do vestibular de 2020 da UEL

3 Em uma prova, por um erro de impressão, uma das questões apareceu da seguinte forma:

Determine a solução da equação

$$\frac{z}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$$

no conjunto dos números reais positivos.

Sabe-se que o numerador apagado é um número inteiro positivo.

Considerando que o conjunto solução da equação contém números reais maiores ou iguais a 1, determine o numerador apagado.

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos – cops.uel.br

Figura 2 - Resolução considerada insatisfatória da questão 3 de Matemática da segunda fase do Vestibular de 2020 da UEL

Considero z = numerador apagado.

De acordo com o enunciado $z - 1 = 0$, logo:

$$z - 1 = 0$$

$$2x + 1 = x$$

$$2x - 1 = 0$$

$$(2x + 1)x$$

$$2x - 2x - 1 = 0$$

$$2x^2 + x$$

$$2x - 2x - 1 = 0, (2x^2 + x)$$

$$2x - 2x - 1 = 0$$

$$2x = 2x + 1$$

$$z = 2x + 1$$

$$z = 2 + 1$$

$$(z = 3)$$

*: o numerador apagado equivale ao número 3.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos - cops.uel.br

Ao analisar essa produção escrita, é possível interpretar que o vestibulando

cometeu um erro que coincidentemente gerou o resultado correto. A partir disso, é possível inferir que ele cometeu esse erro pois entendeu que podia simplificar o x do numerador com o do denominador. Uma forma de intervir nesse caso, buscando utilizar o erro do estudante como uma oportunidade para que ele aprenda algo, seria levá-lo a entender o que é, de fato, simplificar o x do numerador com o do denominador, apresentando alguns exemplos para o estudante realizar uma investigação.

Note que tal erro só pode ser observado pois temos acesso à produção escrita e a questão é aberta. Se fosse uma questão de múltipla escolha, o estudante assinalaria 3 e não seria possível intervir usando seu erro como oportunidade de aprendizagem.

É importante ressaltar que as inferências aqui citadas são de interpretação da autora e não necessariamente condizem com o pensamento dos estudantes. O foco é, ao menos, caminhar rumo à extinção de uma leitura pela falta e começar a colocar em prática a leitura positiva (Garnica, 2006). Para cada produção escrita existem diversas inferências possíveis e apenas o autor de cada produção escrita pode dizer o que realmente pensou em cada passo de sua resolução.

Portanto, fica assim apresentada a importância deste estudo na busca por um ambiente escolar com foco na aprendizagem, pois como disse Buriasco (2000, p. 172), “todo instrumento que serve para a avaliação serve também para a aprendizagem”, e enxergando a avaliação como processo, percebe-se que a aprendizagem deve ser oportunizada em todos os momentos da trajetória acadêmica de um estudante.

Referências:

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas Considerações sobre Avaliação Educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, n. 22, p. 155-178, 2000.

GARNICA, A. V. M. Erros e Leitura Positiva: propostas, exercícios e possibilidades. In: I Jornada Nacional de Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006, Passo Fundo. **Anais....** Universidade de Passo Fundo, 2006.

HADJI, C. **A avaliação, Regras do jogo das intenções aos instrumentos**. 4. ed. Portugal: Porto Editora, 1994.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SILVA, Gabriel dos Santos e; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 9, p. 1-17, 2023.

Análise da Produção Escrita de Questões de Geometria do Vestibular da Universidade Estadual de Londrina

Kaue Novaki João¹

kauenovaki2@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)²

gabriel.santos22@gmail.com

^{1,2}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Análise da Produção Escrita, Educação Matemática, Avaliação.

Resumo:

Nesse trabalho analisaremos a produção escrita de estudantes que prestaram o Vestibular da UEL nos anos de 2012 a 2024 em questões de geometria a partir da Revista Diálogos Pedagógicos, visando explorar uma abordagem mais individualizada para o ensino de matemática.

A avaliação como pratica de investigação e oportunidade de aprendizagem é uma abordagem que utiliza produções escritas de estudantes com o objetivo de auxiliar os processos de aprendizagem e de ensino presentes (Silva; Harmuch, 2022). Uma maneira de identificar esses elementos, é via a análise da produção escrita, que, segundo Santos (2014), “pode ser tomada como um conjunto de ações frente à produção escrita dos alunos que possibilita ao professor obter informações para conhecer e compreender o processo de aprendizagem dos alunos, planejar e executar intervenções de modo a auxiliá-los”. Algumas das ações que podemos tomar para realizar tal análise são:

- Leitura Vertical;
- Leitura Horizontal;
- Interpretação;
- Inferência, e;
- Intervenção.

É necessário também, adotar uma abordagem na interpretação de tais informações. Esse artigo visa analisar produções com uma leitura positiva, diferente da leitura pela falta adotada comumente em salas de aula. A leitura positiva, segundo Garnica (2006, p. 4), “parte do pressuposto que ao fazer uma certa

¹ Voluntário do PIBIC-AF

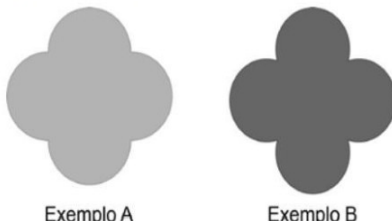
enunciação (ao falar sobre algo ou ao resolver um problema, por exemplo) o aluno elabora e expressa as compreensões que tem.”

Para exemplificar a análise da produção escrita, observe essa questão retirada do vestibular de 2019 da Universidade de Londrina e a resolução de um estudante:

Figura 1 - Questão 1 de matemática do Vestibular da UEL do ano de 2019.

Um *quatrefoil* é uma figura simétrica comumente usada em arte, *design* e arquitetura. Sua forma é antiga e o nome vem do latim, significando “quatro folhas”. Ele possui quatro folhas de mesmo tamanho, com formato circular, interconectadas, as quais se sobrepõem ligeiramente, e se assemelha a uma flor de quatro pétalas.

Considere dois exemplos de *quatrefoil*, a seguir.



Pretende-se construir um *quatrefoil* similar ao apresentado no Exemplo A, no qual as folhas são formadas por semi-círculos.

Sabendo que seu perímetro deve ser de 28π cm, determine a área total da figura a ser construída. Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos

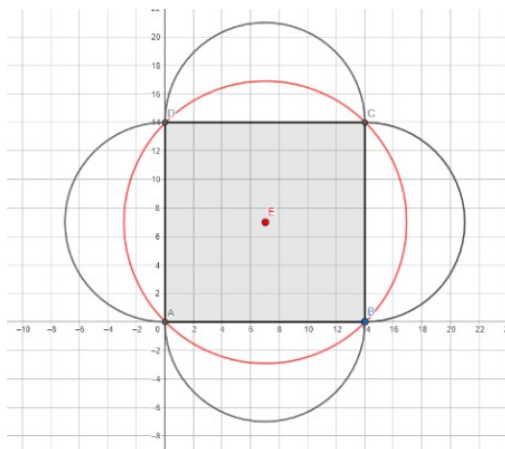
Figura 2 - Resolução de um estudante

$$\begin{array}{l}
 4 \text{ semi-círculos} = 2 \text{ círculos} \\
 C = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{círculos } 2(C) = 28\pi \\
 2 \cdot 2\pi \cdot r = 28\pi \\
 4\pi \cdot r = 28\pi \\
 r = \frac{28\pi}{4\pi} \\
 r = 7 \text{ cm} \\
 A = r^2 \cdot \pi \\
 A = 7^2 \cdot \pi \\
 A = 49\pi \cdot 2 \text{ círculos} \\
 A \text{ área total é } 98\pi \text{ cm}^2
 \end{array}$$

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos

Nessa resolução, como o estudante mostra saber identificar os dois círculos e ao achar o raio corretamente, e erra apenas ao ignorar a existência do quadrado interior, uma intervenção adequada pode ser produzir um “quatrefoil” com as medidas da questão, e um círculo com a área dada pelo estudante. Uma possibilidade é recriar esse quatrefoil no geogebra, como mostra a figura abaixo. Assim, ele teria uma representação visual da área calculada e concluiria que a área que ele alcançou é menor do que a desejada.

Figura 3 – Quatrefoil criado no Geogebra



Fonte: Geogebra

O objetivo do trabalho consistiu em analisar as resoluções como se elas se apresentassem em um contexto de sala de aula na qual a avaliação é tomada como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. Nessa situação, o professor poderia usar essas intervenções para auxiliar os estudantes.

Referências:

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Erros e Leitura Positiva: propostas, exercícios e possibilidades. In: **I Jornada Nacional de Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006**, Passo Fundo. Anais. Universidade de Passo Fundo, 2006.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SILVA, Gabriel dos Santos e; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo v. 9, p. 1-17, 2023.

SILVA, Gabriel dos Santos e; HARMUCH, Daniela. Análise da produção escrita de questões de matemática do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina. **Revemop**, Ouro Preto, v. 4, p. e202212, 2022.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CIANI, Andréia Buttner. A Avaliação como Prática de Investigação e Análise da Produção Escrita em Matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, v. 25, p. 35-45, 2008.

Análise da Produção Escrita de Questões de Polinômios e Sequências Numéricas do Vestibular da Universidade Estadual de Londrina

Pedro Lascowski Laguna¹

lpedro16@gmail.com¹

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador(a))

gabriel.santos22@gmail.com²

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Análise da Produção Escrita, Educação Matemática, Avaliação.

Resumo:

O objetivo deste trabalho é analisar a produção escrita de estudantes que prestaram o Vestibular da UEL nos anos de 2012 a 2024 em questões de Polinômios e Sequências Numéricas a partir da revista Diálogos Pedagógicos. A relevância deste trabalho se dá no fato de, neste projeto, aspirarmos a explorar uma abordagem individual para o ensino de matemática.

A escolha da Revista Diálogos Pedagógicos foi feita pelo fato dela classificar as produções escritas em satisfatória; insatisfatória e parcialmente satisfatória.

A avaliação pode ser definida de várias maneiras, no âmbito da Educação Matemática. Neste trabalho, buscamos estudar a avaliação de aprendizagem como prática de investigação. De acordo com Viola dos Santos, Buriasco e Ciani (2008, p. 36), a “avaliação em matemática constitui uma prática educativa de extrema complexidade no contexto educacional e tem um papel tanto na regulação dos processos de ensino e de aprendizagem, quanto na busca de melhoria no sistema de ensino”.

Utilizar a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem nos dá a chance de usar produções escritas de estudantes para identificar processos de aprendizagem e de ensino presentes nas produções. Para identificarmos esses elementos utilizamos a análise de produções escritas, que é uma estratégia de ensino e avaliação ou ainda “uma alternativa para a (re)orientação da avaliação escolar e (re)orientação da prática pedagógica e como uma possibilidade para a implementação da avaliação numa perspectiva de prática de investigação” (Santos, 2014, p. 23).

Algumas ferramentas utilizadas numa análise da produção escrita são a leitura vertical, leitura horizontal, interpretação, inferência e intervenção.

¹ Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico da UFPR.

Além disso, visamos analisar produções escritas utilizando a leitura positiva, que difere da leitura pela falta, a qual é frequentemente adotada em salas de aula.

De acordo com Garnica (2006, p. 4), “a leitura positiva, ao contrário, parte do pressuposto que ao fazer uma certa enunciação (ao falar sobre algo ou ao resolver um problema, por exemplo) o aluno elabora e expressa as compreensões que tem. Quando ele fala ele diz algo, quando ele faz ele faz algo e é desse algo que ele diz ou faz que devemos partir, propondo estratégias de ação. Trata-se de analisar o que ele falou ou fez, não o que ele deixou de falar ou fazer.”

Aqui está um exemplo de uma análise de uma produção escrita:

4 Considere a equação polinomial a seguir.

$$2x^3 - 15x^2 + 34x - 24 = 0$$

Sabe-se que cada uma das raízes dessa equação corresponde a uma das medidas, em cm, do comprimento, da largura e da altura de um paralelepípedo retângulo.

Com base nessa informação, determine a área total e o volume desse paralelepípedo.

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

Por inspeção, verifica-se que 2 é raiz do polinômio dado.
Utilizando-se do dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

2	2	-15	34	-24
	2	-11	12	0

∴ O polinômio pode ser reescrito da seguinte forma: $(x-2)(2x^2-11x+12)=0$
As outras raízes são determinadas pela resolução do polinômio $2x^2-11x+12=0$
Pela fórmula resolvente: $x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{11 \pm 5}{2} \rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 3/2$
∴ as arestas do paralelepípedo medem 2, 4 e 1,5 cm
Dessa forma, podemos calcular o volume e a área do paralelepípedo:

$$V = 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow V = 12 \text{ cm}^3$$
$$A_T = 2 \left(\frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2}}{2} \right) \rightarrow A_T = 2(8 + 6 + 3) \rightarrow A_T = 34 \text{ cm}^2$$

A resolução apesar de ter sido considerada satisfatória é interessante de ser analisada, pois apesar do acerto, podemos trabalhar para reforçar ainda mais os conhecimentos do estudante. Para isso, uma intervenção adequada seria perguntar a ele como ele pensou que 2 poderia ser raiz do polinômio e além disso, como ele poderia resolver essa questão sem precisar descobrir nenhuma das raízes, a fim de trabalhar o Teorema das Possíveis Raízes Racionais e as Relações de Girard.

Enfim, todas as questões de Sequências Numéricas e Polinômios do Vestibular da Universidade Estadual de Londrina no período de 2012 a 2024 foram analisadas.

De maneira que o objetivo do trabalho foi alcançado, mesmo que as intervenções não possam ser aplicadas, já que foram retiradas de um vestibular.

Referências:

- GARNICA, A. V. M. **Erros e Leitura Positiva:** propostas exercícios e possibilidades. In: I Jornada Nacional de Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006, Passo Fundo. Anais.... Universidade de Passo Fundo, 2006.
- SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática:** e estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.
- SILVA, Gabriel dos Santos e; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem.** Revista de História da Educação Matemática, v. 9, p. 1-17, 2023.
- VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CIANI, Andréia Büttner. **A Avaliação como Prática de Investigação e Análise da Produção Escrita em Matemática.** Revista de Educação, v. 25, p. 35-45, 2008.

Análise da Produção Escrita em uma Prova-Escrita-em-Fases

Isabele Andrade Vichinieski

*isabele.vichinieski@ufpr.br*¹

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)

*gabriel.santos22@gmail.com*¹

¹ Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, Avaliação, Prova-Escrita-em-Fases, Análise da Produção Escrita.

Resumo:

O presente trabalho, derivado de uma monografia, tem como objetivo analisar a produção escrita de estudantes do Ensino Fundamental em uma Prova-Escrita-em-Fases composta por tarefas que potencialmente mobilizam o pensamento algébrico.

Segundo Buriasco (2000), os instrumentos avaliativos comumente utilizados, como a prova escrita, ao serem aplicados ao fim de uma unidade de conteúdo, comprometem as possibilidades de ação diante das dificuldades detectadas. Nesse contexto, a Prova-Escrita-em-Fases surge como um instrumento avaliativo que valoriza o processo e não somente o resultado final, favorecendo uma avaliação voltada à aprendizagem. De acordo com Silva (2018), esse instrumento é composto por várias fases: na primeira, os estudantes resolvem as questões que julgarem pertinentes e, nas fases seguintes, retomam a prova com a oportunidade de prosseguir na resolução, revisar ou modificar suas respostas.

Com o intuito de compreender aspectos do pensamento algébrico de estudantes que ainda não tiveram contato formal com conceitos como incógnita, equação, sistemas ou procedimentos algébricos, foi elaborada e aplicada, em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da Região Metropolitana de Curitiba, uma Prova-Escrita-em-Fases. A turma era composta por 26 alunos, e o contato da autora com a escola ocorreu por meio do estágio supervisionado obrigatório da disciplina Educação Algébrica I. A prova continha duas tarefas que envolviam o cálculo de valores desconhecidos e foi aplicada em quatro fases, com intervenções (comentários escritos da pesquisadora) entre cada uma delas.

Este trabalho analisa as produções escritas de dois estudantes, buscando compreender as estratégias utilizadas e o papel das intervenções no processo de resolução. A Figura 1 apresenta a resolução inicial (fase 1) do estudante E13 na Tarefa 1.

Qual era o valor da camiseta? E da calça?

Calça custa 73, tênis 26, meias 21, blusa 67, shorts 26, sapatos 94, meias 21, tênis 26, camiseta 2x.

2x + 26 + 16 + 7 + 26 + 21 + 67 + 73 + 94 = 320

x = 10

Bem, entom a nota em chagres a um correlatores ter jogar aqui
 com o decaio:

- Tem que ter 2689 de diferença
- O valor de m que dar 34
- Calculo: $91 - 26 = 68$
- Deixa por 2: $68 : 2 = 34$
- Deixa $60 : 2 = 30$

CM/A: 60
 CM/B: 34
 SUB DA PR ATIVOU
 AEEEE

2) Ester quer ir a uma papeleria para comprar cadernos e canetas. Nessa papeleria, os cadernos custam R\$ 12,00 cada. Se ela juntar todo o dinheiro que tem e comprar 3 cadernos, ainda sobram R\$ 4,00. Se, antes de ir à papeleria, ela pegar R\$ 4,00 emprestados de seu irmão, conseguirá comprar 2 cadernos e 10 canetas. Quanto custa cada caneta? *cada caneta custa 160 reais*

PRIMEIRO 30 MEI 72 RS 70 VÊZES DANDO 24 RS DE FÉRIAS
MINUS ~~4 RS~~ 4 RS DANDO 24 RS DA AUMENTEI
16 RS DANDO 40 RS É SOMEI 70 70 VÊZES
DANDO 16 RS

24 RS 2 COTIDIANOS
76 RS 10 COTIDIANOS

Nota-se que o estudante argumenta de maneira coerente, ainda que apresente alguns cálculos incorretos, possivelmente decorrentes de uma interpretação equivocada do enunciado ou de distrações. Para identificar as origens desses equívocos, a intervenção foi organizada em três perguntas, conforme mostra a Figura 4.

• Quando você somou R\$ 12,00 3 vezes deu R\$ 32,00 ou R\$ 36,00?
 36 R\$
 • Por que você subtraiu 4? Poderia explicar melhor? ME CONFUNDI
 PRA BOMENIRAR 4,00 R\$
 • Por que uma caneta custa R\$ 1,60? UMA CANETA CUSTA 2,00 R\$ POIS SE
 SOMARMOS 2 VÉZES 0,72 DA 3,60 E SOMAR 4 DAQUI 4,00 E ELA PEGOU 4,80 IMPRINTADO COM SEI
 1 R\$ 1,60 DA 10,40 R\$ 2 CADERNOS CUSTAM 3,40 E 70 CADERNOS 20 56 60,40 R\$
 20
 70 CADERNOS 20 R\$
 144 0,40 4,4
 POR 15,60
 2 CADERNOS 2,00 R\$
 70 CADERNOS 20 R\$

Figura 4 - Intervenções e resolução da Tarefa 2 do estudante E19 na fase 2.
Fonte: A autora (2025)

As respostas dadas na fase 2 evidenciam que o estudante não considerou uma das informações do enunciado e acabou se confundindo em algumas operações realizadas. A partir dessas constatações, foi possível concluir o resultado correto já nessa fase, o que permitiu propor, nas fases seguintes, novos itens relacionados ao mesmo contexto, ampliando a exploração da tarefa.

A análise dessas produções evidenciou o potencial da Prova-Escrita-em-Fases como instrumento avaliativo. Ao dar aos estudantes a oportunidade de revisar o que foi feito em fases anteriores, importantes reflexões sobre suas produções são estimuladas. As intervenções, por sua vez, tornaram-se um meio de comunicação direta entre docente e aluno, algo nem sempre viável durante as aulas. Além disso, o uso do instrumento permite obter, tanto em nível individual quanto coletivo, informações relevantes sobre a compreensão dos estudantes a respeito de determinado conceito, fornecendo subsídios para a elaboração de estratégias que auxiliem os processos de ensino e de aprendizagem.

Referências:

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas Considerações sobre Avaliação Educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, n. 22, p. 155-178, 2000.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

Análise da produção escrita de estudantes de 8º e 9º ano do Ensino Fundamental a partir de uma tarefa de Matemática¹

Natalia Chicora²

nataliachicora@gmail.com

Sibeli da Rosa da Rocha³

sibarocha02@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)⁴

gabriel.santos22@gmail.com

^{2, 3, 4} Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática; Análise da Produção Escrita; Análise de Erros; Ensino Fundamental;

Resumo:

Um grupo de 10 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (Curitiba, Paraná, Brasil) organizou uma prova contendo 6 questões de Matemática que foi aplicada em 6 turmas do Ensino Fundamental, sendo 3 turmas de 8º e 3 de 9º ano do Ensino Fundamental, na região metropolitana de Londrina (Paraná), totalizando 172 produções escritas. Após a aplicação, os nomes dos alunos foram censurados, as provas foram codificadas e digitalizadas. A codificação é composta pela sequência da letra “E” de “estudante”, 8 ou 9 para indicar o ano, A, B ou C para sinalizar a turma e um número de dois algarismos que representa cada estudante. Posteriormente, as produções escritas foram arquivadas no acervo do Laboratório de Estudos em Avaliação da Aprendizagem e Educação Matemática (LEAMat).

A produção escrita em Matemática constitui um importante recurso para compreender o processo de aprendizagem dos estudantes, pois permite acessar estratégias e concepções construídas durante a resolução de tarefas. Segundo Santos (2014), esse tipo de análise ultrapassa a simples atribuição de notas ou conceitos, sendo fundamental para a “tomada de consciência” sobre o que ocorreu nos processos de ensino e aprendizagem.

O presente trabalho é uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo à luz da Análise de Conteúdo (Bardin, 2016), com o objetivo analisar as resoluções de estudantes brasileiros do Ensino Fundamental Anos Finais a partir de uma tarefa de Matemática. A tarefa investigada é:

¹Este resumo configura-se como um recorte do trabalho completo intitulado “Análise da produção escrita de estudantes de 8º e 9º ano de Ensino Fundamental brasileiro a partir de uma tarefa de Matemática” apresentado no IV Congresso de Educación Matemática de América Central y Caribe (CEMACYC). Disponível em: <https://ponencias.ciaem-redumate.org/cemacyc/article/view/376>.

³ Bolsista CNPq de Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica

“Nas duas papelerias perto da escola, o caderno TATI era vendido ao mesmo preço, mas agora estão em promoção. Veja os anúncios:

Papeleria Avenida Leve 5 e pague somente 4 cadernos	Papeleria Central 25% de desconto no preço do caderno
--	--

Alice quer comprar 5 cadernos. Em qual papeleria ela gastará menos dinheiro? Por quê?”

As produções escritas dos estudantes foram agrupadas em três etapas. Na primeira, todas as respostas finais dos estudantes foram agrupadas entre: Papeleria Central (PC), Papeleria Avenida (PA), Ambas (A), tarefa em branco e tarefa sem resposta final (SR). Na segunda etapa, todas as resoluções dos estudantes foram organizadas conforme a estratégia de resolução utilizada para resolver a tarefa. As estratégias identificadas foram: i) “supor um valor para o preço do caderno”; ii) “mostrar que o desconto da Papeleria Central é maior do que o desconto da Papeleria Avenida”; iii) “mostrar que o desconto da Papeleria Central é igual ao desconto da Papeleria Avenida” e iv) “produções escritas sem estratégia identificada”. As demais foram organizadas conforme os procedimentos realizados para a resolução da tarefa: I) “calcular apenas o desconto da Papeleria Avenida (desc PA)”; II) “calcular apenas o desconto da Papeleria Central (desc PC)”; III) “calcular o desconto de ambas (desc A)”; IV) “calcular apenas o valor final da Papeleria Avenida (VF PA)”; V) “calcular apenas o valor final da Papeleria Central (VF PC)”; VI) “calcular o valor final de ambas (VF A)”; VII) “calcular o valor individual de cada caderno após o desconto”; VIII) “outros cálculos”; e IX) “sem cálculos”. Nas duas últimas etapas, desconsiderou-se as produções em branco.

A estratégia de supor um valor para o preço do caderno (exemplo figura 1) foi utilizada em 63 das 146 produções escritas que não foram deixadas em branco, representando aproximadamente 43% do total de questões que não foram deixadas em branco. Já estratégia de mostrar que o Desc PC é maior do que Desc PA (exemplo figura 2) foi aplicada em 31 produções (21%), enquanto a estratégia de mostrar que o desc de PC é igual ao desc PA foi a menos recorrente (exemplo figura 3), identificada em apenas 6 produções (4%). Entre as resoluções sem estratégias reconhecíveis, destacam-se 46 produções, sendo o segundo maior grupo, porém apenas três produções escritas possuem cálculo. Entre as 43 resoluções restantes, sem cálculos, 16 também não apresentam justificativas, limitando-se à resposta final.

Figura 1: Produção escrita de E8B21

caderno = 2,00

$$\begin{array}{r} 2,00 \\ \times 4 \\ \hline 8,00 \end{array}$$

Supondo que o valor do caderno seja 2 reais, Alice pagará R\$ 8,00 em 5 cadernos na papeleria Avenida.

caderno = 2,00

$$\begin{array}{r} 10\% \text{ de } 2,00 = 0,20 \\ 25\% \text{ de } 2,00 = 0,50 \\ 2 \\ \times 5 \\ \hline 7,50 \end{array}$$

Supondo que o valor do caderno seja 2 reais, Alice pagará R\$ 7,50 em 5 cadernos na papeleria Central.

R: Alice gastará menos dinheiro na papeleria Central, pois nela pagará 7,50 e na outra 8,00.

Figura 2: Produção escrita de E8C09

25
+ 25
+ 25
—
75

Pé a papelaria assinada, pois 1 sai de graça e ainda tem +25% em outro caderno.

Figura 3: Produção escrita de E8C25

Qualquer uma das papelerias, pois 75% de 100% é igual a $\frac{4}{5}$ ou seja 1 caderno = 25%.

100
- 25
—
75

Este estudo analisou a produção escrita de 172 estudantes do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental em uma tarefa matemática não-rotineira, envolvendo porcentagem e/ou operações básicas. A análise revelou estratégias variadas, dificuldades enfrentadas e ausência de cálculos em muitas respostas: 26 foram entregues em branco e 62, das 146 resolvidas, sem qualquer cálculo, sendo que a maioria apresenta justificativas frágeis. Assim, em 88 tarefas (cerca de 51%), pouco se pôde inferir sobre o raciocínio dos estudantes. Por outro lado, entende-se que a análise da produção escrita permitiu uma compreensão do raciocínio dos estudantes, destacando como os erros podem ser vistos como oportunidade de aprendizagem e reflexão, além de exemplificar como respostas finais consideradas erradas não significam que os estudantes não entenderam o conteúdo ou não sabem resolver a tarefa. Dessa forma, os professores devem ser incentivados a incorporar a análise da produção escrita em sua prática pedagógica, promovendo uma cultura de diálogo contínuo com os alunos sobre suas estratégias de resolução e permitindo momentos de reflexão sobre a sua própria prática docente.

Referências:

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luís, A. R.; Augusto P. São Paulo: Edições 70, 2016.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SILVA, G. dos S. e; BURIASCO, R. L. C. de. O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, [S. l.], v. 9, p. 1–17, 2023.

Análise da produção escrita em uma Prova-Escrita-em-Fases de Geometria na perspectiva da Análise de Erros

Gabrielle Mamede Cordeiro¹

gabriellemamede@ufpr.br

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)¹

gabriel.santos22@gmail.com

¹ Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, Análise de Erros, Prova-Escrita-em-Fases, Geometria.

Resumo:

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA) em Educação Matemática e apresenta resultados parciais de uma investigação, cujo objetivo foi analisar a produção escrita a partir de duas tarefas de uma Prova-Escrita-em-Fases de matemática, aplicada em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental – Anos Finais, em um colégio público da região central de Curitiba. Para a construção da pesquisa, buscou-se aporte teórico em autores que discutem o ensino de Geometria e as dificuldades encontradas pelos estudantes nesse campo, de modo a fundamentar a análise das produções escritas.

A investigação adotou uma abordagem qualitativa, priorizando a interpretação das respostas dos estudantes, a partir da análise de seus erros. Para a elaboração da prova, foi realizada uma revisão bibliográfica em bases de dados nacionais, utilizando os descritores “Educação Matemática”, “Análise de erros”, e “Análise da produção escrita”. Além disso, o livro *Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos*, de Helena Cury, foi tomado como referência central. A autora destaca que a análise de erros não deve ser uma prática isolada, mas parte integrante do planejamento pedagógico, ainda que envolva desafios relacionados à avaliação e às emoções dos estudantes.

A Prova-Escrita-em-Fases trata-se de uma adaptação da prova em duas fases (De Lange, 1999), na qual os estudantes resolvem inicialmente a prova e, em seguida, têm a chance de retomá-la com base nas intervenções do professor.

A dinâmica da Prova-Escrita-em-Fases prevê que, na primeira fase, os estudantes resolvam as questões (quais e quantas julgarem que devam fazer); nas fases seguintes, retomam a prova, podendo resolver questões não resolvidas ou dar continuidade a resoluções já começadas, a fim de refazê-las, corrigi-las, completá-las, apagar trechos, apagá-las completamente. (Silva; Buriasco, 2022, p. 4)

A prova elaborada contou com dez tarefas de Geometria, selecionadas a partir de um anexo de uma dissertação de mestrado analisada. A aplicação da primeira fase ocorreu durante uma aula de 50 minutos, sob supervisão da professora titular da

turma e da autora desta pesquisa. Considerando o volume de produções coletadas, optou-se por analisar, neste trabalho, apenas duas tarefas: aquela que apresentou o maior número de acertos e a que registrou o maior número de erros.

Para a análise das produções, utilizou-se a classificação de erros proposta por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), que organiza os erros em diferentes categorias. Neste trabalho, optou-se por considerar quatro delas: (I) uso errado dos dados, (II) linguagem mal interpretada, (III) definição ou teorema distorcido e (IV) erros técnicos. A categoria de uso errado dos dados refere-se às discrepâncias entre as informações apresentadas no enunciado e a forma como foram mobilizadas na resolução, como quando o estudante confunde área com perímetro, situação bastante recorrente. A linguagem mal interpretada diz respeito a erros na tradução entre diferentes registros, como da língua natural ou de uma figura para a linguagem matemática. Já a categoria de definição ou teorema distorcido envolve a utilização inadequada de propriedades e conceitos em situações em que não se aplicam. Por fim, os erros técnicos abrangem falhas de cálculo ou de manipulação algébrica, tais como confusões em operações, uso incorreto da distributiva ou somas indevidas de variáveis com constantes.

A análise foi conduzida segundo a análise de conteúdo dos erros (Cury, 2007), fundamentada em Bardin (2016) e estruturada em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Essa perspectiva permitiu identificar e categorizar os erros cometidos pelos estudantes, de modo a compreender as dificuldades que emergem no processo de aprendizagem da Geometria.

Após a aplicação da primeira fase, realizou-se uma avaliação vertical das provas, que consiste na análise de todas as tarefas de um único estudante por vez. Essa etapa permitiu identificar quais tarefas apresentavam maior número de erros e quais apresentavam maior número de acertos. Para organizar os dados, elaborou-se um quadro classificando as resoluções em quatro categorias: correta, parcialmente correta, em branco e errada. Com base nesse levantamento, definiu-se que a tarefa 2, item b, foi a que obteve mais acertos, enquanto a tarefa 3, item c, apresentou a maior incidência de erros.

Após as classificações, realizou-se uma avaliação horizontal das tarefas com maior índice de acerto e erro, analisando a mesma tarefa de todos os estudantes para identificar padrões coletivos. Abaixo estão os enunciados das tarefas analisadas.

2. A figura abaixo é a planta baixa de um apartamento. Observe-a e responda às questões, considerando cada quadradinho uma unidade de medida de área:  a) Qual é a área total do apartamento? Justifique.	3. Um campo de futebol de formato retangular tem 100m de largura por 70m de comprimento. Antes de cada treino, os jogadores de um time dão cinco voltas e meia correndo ao redor do campo. a) Quantos metros os jogadores correm ao dar uma volta completa no campo? b) Quantos metros eles percorrem ao dar as cinco voltas e meia ao redor do campo?
--	---

b) Qual é a área do banheiro? Justifique. c) Qual é o cômodo cuja área mede 5 unidades? Justifique. d) Quais cômodos têm área de 4 unidades? Justifique. e) Quais cômodos têm área de 6 unidades? Justifique.	c) Se eles repetem essa corrida cinco vezes por semana, quantos metros os jogadores correm em uma semana?
--	---

Fonte: autores.

A análise da tarefa 2(b) indicou que os estudantes apresentaram facilidade em encontrar o resultado correto, com 21 acertos e apenas 2 provas em branco. Esse desempenho pode ser atribuído à presença da malha quadriculada na imagem do enunciado, que funcionou como suporte visual, permitindo o uso da contagem direta, evidenciada em justificativas como “eu contei os quadradinhos”.

Por outro lado, a tarefa 3, especialmente o item (c), apresentou maior índice de erros, com 2 acertos, 17 erros e 4 respostas em branco. Os erros mais frequentes envolveram confusão conceitual sobre perímetro, uso incorreto dos dados (como somar $100 + 70$ sem considerar o formato retangular), interpretação inadequada do percurso (desconsiderando a meia volta final) e simplificações indevidas (como calcular apenas 5×340). Tais erros revelam que o problema não estava apenas nos cálculos, mas sobretudo na interpretação do enunciado e na mobilização dos conceitos geométricos.

A comparação entre as tarefas mostra que recursos visuais, como a malha quadriculada, podem facilitar a resolução, enquanto enunciados mais complexos e sem apoios visuais favorecem a emergência de erros conceituais e interpretativos, enquadrando-se na categoria de “linguagem mal interpretada” (Movshovitz-Hadar; Zaslavsky; Inbar, 1987). Esses resultados parciais reforçam a importância de instrumentos avaliativos que permitam compreender não apenas os acertos, mas também as concepções e dificuldades reveladas nos erros.

Referências:

- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com os erros dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.
- MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14, 1987.
- OLIVEIRA, J. N. **Aspectos Da Aprendizagem Profissional De Professores Que Ensinam Matemática Nos Anos Iniciais Do Ensino Fundamental: Área e Perímetro**. 2019. Dissertação (Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.
- SILVA, G. S.; BURIASCO, R. L. C. Índícios de interatividade na aplicação de uma Prova-Escrita-em-Fases. **Ciência & Educação** (Bauru), v. 28, p. e22036, 2022.

Análise de uma tarefa de investigação à luz da Educação Matemática Realística

Andressa Balestrin Dasenbrock¹

*andressa.dasenbrock@ufpr.br*¹

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)²

*gabriel.santos22@gmail.com*²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, matematização, investigação matemática.

Resumo:

A Educação Matemática Realística (RME) surgiu nos Países Baixos, na década de 1960, como contraposição ao Movimento da Matemática Moderna (MMM) (Silva; Innocenti; Sampel, 2023). Idealizada por Hans Freudenthal, parte da concepção de que a matemática é uma atividade humana, devendo estar conectada à realidade, próxima dos estudantes e aprendida como um processo de matematização da realidade e, quando possível, da própria matemática (Freudenthal, 1968 apud Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Para ele, compreender a matemática como atividade humana implica não restringi-la ao produto final, mas considerá-la como resultado das ações humanas. Assim, o aprendizado se dá pelo “fazer matemática”, permitindo que os alunos tenham um papel ativo em sala de aula, como (re)inventores do conhecimento matemático (Silva; Innocenti; Sampel, 2023, p. 12).

Nesse contexto, entende-se a matematização como um processo de organização da realidade a partir de conceitos matemáticos (De Lange, 1987). Segundo o autor, “a realidade ‘interna’ da matemática ou o mundo real da imaginação dos alunos também fornecem fontes para o desenvolvimento de conceitos matemáticos” (De Lange, 1987, p. 37). Isso evidencia a importância de propor, em sala de aula, situações que favoreçam a matematização, de modo que os estudantes possam construir significados próprios e desenvolver uma compreensão mais profunda da matemática.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, apud Azevedo, 2020, p. 304), a investigação matemática

é vista como a descoberta de relações entre objetos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar suas respectivas propriedades que são desenvolvidas intimamente em torno de qualquer problema oriundo da matemática, buscando sua resolução mesmo sem solucioná-lo.

¹ Bolsista do programa PET Matemática

Ainda, os autores defendem que as tarefas investigativas são tarefas abertas que não possuem respostas únicas, e necessitam do envolvimento dos alunos para resolvê-las, que podem percorrer diferentes caminhos e, conseqüentemente, gerar conclusões diferentes. Destaca-se a importância do papel do professor nesse processo, que deve interagir com a turma, de forma a conduzi-los para o confronto de ideias, dificuldades e desafios, além de incentivar os alunos a agirem como matemáticos, favorecendo seu envolvimento na aprendizagem.

Diante disso, desenvolveu-se uma tarefa de investigação matemática, com foco na matematização, no contexto do estágio obrigatório da disciplina de Prática de Docência em Matemática, em uma escola pública da região metropolitana de Curitiba. A turma contava com 30 alunos, acompanhados pela professora regente e três estagiários, entre eles a primeira autora. Foi solicitada a autorização para a gravação das falas, sem objeções por parte dos estudantes.

A tarefa escolhida tem como título “A segurança é uma arte em si mesma”, e propõe uma situação de um museu de arte moderna, que precisa reorganizar seu sistema de segurança para uma grande exposição, já que as câmeras atuais não cobrem todo o espaço. Para tanto, é apresentado um novo tipo de câmera capaz de proteger completamente o espaço ao seu redor, mas cada unidade custa R\$10.000,00, o que exige planejar a instalação com o menor número possível. O museu tem formato triangular, e uma parte dele (entrada, banheiros e salas administrativas) não precisa de cobertura. Para a exposição, são necessárias ao menos 280 metros de paredes disponíveis para dispor cerca de 100 pinturas. Algumas paredes são estruturais e fixas, enquanto outras podem ser removidas ao custo de R\$500,00 por metro, o que pode contribuir para reduzir a quantidade de câmeras.

A tarefa consiste em propor um novo sistema de segurança que utilize o mínimo de câmeras possível, indicando onde elas seriam posicionadas e quais áreas cobririam. Também deve ser feita uma estimativa dos custos envolvidos na remoção de paredes e na instalação das câmeras.

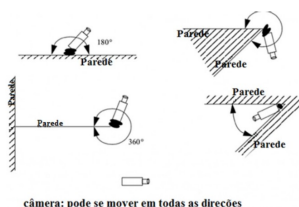


Figura 1: Ilustração do movimento das câmeras

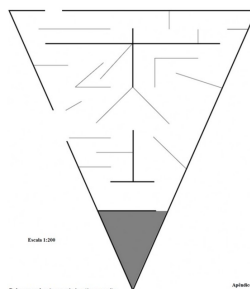


Figura 2: Mapa do museu

No início, explicou-se o funcionamento da situação de investigação matemática, os objetivos da proposta e que estava vinculada à uma pesquisa acadêmica. O

enunciado foi lido com a turma e os alunos foram orientados a registrar o máximo possível de informações para identificar indícios de matematização. Durante a resolução, os aplicadores circularam entre os grupos, intervindo quando necessário e gravando as interações. Todas as produções foram digitalizadas e apresentadas na última aula, quando cada grupo teve cerca de cinco minutos para expor estratégias, decisões e resultados.

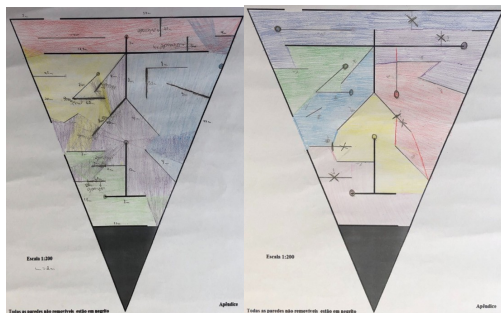


Figura 2: Mapas construídos por dois grupos

Após o desenvolvimento da tarefa, serão analisadas diferentes fontes de registro produzidas pelos estudantes, incluindo as produções escritas, os mapas elaborados e as transcrições das apresentações orais. Essas análises têm como finalidade identificar indícios de matematização, considerando aspectos como a forma de organização e representação das informações, as estratégias adotadas para a resolução da tarefa e as justificativas apresentadas. A partir disso, será possível compreender de que maneira os alunos mobilizaram conceitos matemáticos para estruturar suas resoluções de tarefas de investigação e que elementos evidenciam o processo de matematização no contexto proposto.

Referências:

AZEVEDO, Nathalia de Melo. INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA DOS AUTORES: JOÃO PEDRO DA PONTE; JOANA BROCARDO E HELIA OLIVEIRA. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 303-307, 2020.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW & OC, 1987.

HEUVEL-PANHUIZEN, Marja van den. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: Freudenthal Institute, 1996.

SILVA, Gabriel dos Santos e; INNOCENTI, Mariana Souza; SAMPEL, Vanessa Kishi.

A Educação Matemática Realística de Hans Freudenthal como uma proposta de subversão aos resquícios do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Educação Unisinos**, [s. l.], v. 27, p. 1-18, 2023.

Concepções de Resolução de Problemas em artigos do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática

Vinícius Perin Santos¹

viniperin812@gmail.com¹

Elisangela de Campos (Orientadora)²

eliscamposmat@gmail.com²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Educação Matemática, Práticas Pedagógicas.

Resumo:

O trabalho com “problemas” em Matemática remonta à Antiguidade, estando presente entre egípcios, chineses e gregos. Um exemplo clássico é o Papiro de Ahmes, que reúne diferentes situações-problema propostas e resolvidas. Ao longo dos séculos, essa prática continuou a aparecer, inclusive em manuais dos séculos XIX e XX, embora de forma bastante limitada, já que o ensino da resolução de problemas restringia-se, em geral, à apresentação de enunciados e, em alguns casos, à indicação de técnicas para solucioná-los. Mais recentemente, livros didáticos passaram a incluir problemas acompanhados de ilustrações e referências a situações do cotidiano, tornando-os visualmente mais atrativos. Ainda assim, a proposta manteve-se semelhante: apresentar um exemplo resolvido e, em seguida, uma lista de exercícios a ser solucionada pelos alunos.

A Resolução de Problemas (RP) consolidou-se como tema central na Educação Matemática, ganhando notoriedade a partir da obra de George Pólya, *How to Solve It* (1945). Nesse trabalho, o autor delineou uma heurística composta por quatro etapas: compreender o problema, planejar a solução, executar o plano e revisar o resultado. Essa abordagem sistemática passou a influenciar a forma de apresentar e explorar problemas matemáticos em diferentes contextos educacionais, sendo a RP concebida como uma estratégia de ensino.

A partir das contribuições de Pólya, a discussão sobre RP ampliou-se, consolidando-se como componente essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático. Diversos pesquisadores deram continuidade a esse movimento, aprofundando e diversificando as abordagens sobre o tema. Entre eles, destacam-se, de acordo com Onuchic e Allevato (2021), Jeremy Kilpatrick (1967), Edith Biggs (1969), Efraim Fischbein (1987), Shigeru Shimada (1970), Frederick

¹ Voluntário do Programa de Iniciação Científica.

Lester (1980) e Alan Schoenfeld (1985), cujas investigações reforçaram a relevância da RP na construção de estratégias cognitivas e na formação de competências matemáticas.

Posteriormente, a RP foi sistematizada em diferentes abordagens de ensino. Schroeder e Lester (1989), com base nos trabalhos de Hatfield (1978), categorizaram sua inserção em três modelos: ensino sobre RP, ensino para RP e ensino via RP. No contexto brasileiro, Onuchic e Allevato (2021) propuseram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, na qual o problema constitui o ponto de partida e de orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos.

Diante desse cenário, torna-se necessário analisar as diferentes concepções de RP presentes na literatura e identificar as formas de abordagem propostas. O objetivo deste estudo é analisar as publicações do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), realizado em formato virtual, em julho de 2022, com foco nos trabalhos que abordam a Resolução de Problemas. Busca-se identificar as concepções de RP declaradas pelos autores e compreender de que modo tais concepções são mobilizadas em pesquisas voltadas à Educação Básica.

Trata-se de uma pesquisa documental, fundamentada na análise dos anais do XIV ENEM. O corpus foi constituído por artigos que apresentavam o termo “resolução de problemas” em seus títulos, resumos ou palavras-chave. A Tabela 1 apresenta os trabalhos que serão analisados, incluindo título e autoria.

Tabela 1 – Artigos selecionados sobre Resolução de Problemas

Título	Autor
O ENSINO DE PROBABILIDADE POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	Tatiane Keila Model Hack Professora Dra. Deise Nívia Reisdoefer
Experimentação da metodologia ensino-aprendizagem-avaliação em aulas de Matemática no período pandêmico	Moises Dias Santos Junior Jocassia Souza Silva Marcleide Mendes Vasconcelos
A Construção de Significados para o Ensino da Multiplicação com Números Naturais: uma abordagem por meio da Resolução de Situações Problema	Ariana Costa Silva
Entre tabelas e gráficos: a compreensão de estudantes do Ciclo de Alfabetização acerca de conceitos Estatísticos a partir da resolução de problemas	Danilo do Carmo de Souza Marisa Lima de Vasconcelos Pedro Jorge Rodrigues Garcia Juscileide Braga de Castro José Aires de Castro Filho Rayssa Melo de Oliveira
O estudo do Princípio de Cavalieri por meio da Resolução de Problemas	Amanda Zanelato Colaço Elisandra Bar de Figueiredo Eliane Bihuna de Azevedo
O desenvolvimento do Pensamento Proporcional de alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas	Kátia Gabriela Moreira
Probabilidade Geométrica: possibilidades para aprendizagem de Matemática	Tatiane Aline Rodrigues Kayser Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior

Na etapa inicial da pesquisa documental, foram localizados 10 artigos relacionados ao termo resolução de problemas nos anais do XIV ENEM. Após a leitura dos títulos e resumos, 3 trabalhos foram excluídos por apresentarem foco principal na formação de professores. Dessa forma, o corpus final constituiu-se de 7 artigos, todos voltados para o ensino na Educação Básica, abrangendo tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio. A Tabela 2 apresenta as turmas e os conteúdos contemplados.

Tabela 2 – Turma e Conteúdo dos artigos selecionados

Turma / Etapa da Educação Básica	Conteúdo envolvido
8º ano do Ensino Fundamental	Proporcionalidade e Probabilidade
6º ano do Ensino Fundamental	Operações Fracionárias
6º ano do ensino fundamental	Multiplicação com Números Naturais
1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental	Conceitos Estatísticos
Ensino Médio	Princípio de Cavalieri
3º ano do Ensino Fundamental	Pensamento proporcional (relações parte-todo, razões, escalas)
Ensino Fundamental e Médio	Probabilidade Geométrica, geometria, conceitos de triângulo.

A análise preliminar evidencia que a maior parte dos trabalhos está direcionada ao Ensino Fundamental, sobretudo aos anos iniciais, abordando conteúdos como multiplicação com números naturais, proporcionalidade, operações fracionárias e conceitos estatísticos. Já no Ensino Médio, as investigações aparecem em menor número, destacando-se temas de geometria, como o Princípio de Cavalieri e a Probabilidade Geométrica.

Com base nesses resultados preliminares, a análise mais aprofundada buscará compreender de que forma as diferentes concepções de Resolução de Problemas discutidas na literatura estão sendo efetivamente mobilizadas nas práticas descritas nesses trabalhos.

Referências:

ONUChIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? In: **IV Jornada Nacional de Educação Matemática**, XVII, 06 a 09 de maio de 2012, Passo Fundo. Disponível em: <<http://anaisjem.upf.br/download/cmp-14-onuchic.pdf>>. Acesso em: 03 set. 2025.

ONUChIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Andresa Maria (Orgs.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. 216 p. ISBN 9786558407300.

Confiar em um único instrumento avaliativo pode ser prejudicial?¹

Sibeli da Rosa Da Rocha²

sibarocha02@gmail.com²

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)³

gabriel.santos22@gmail.com³

^{2,3}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Educação Matemática; Avaliação da Aprendizagem; Instrumento de Avaliação; Práticas Avaliativas; Diversificação de Instrumentos de Avaliação.

Resumo:

O Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA) completa 25 anos de atuação contínua, desenvolvendo pesquisas no campo da Educação Matemática com ênfase na Avaliação da Aprendizagem Escolar e na Educação Matemática Realística. O grupo defende que a avaliação deve estar ancorada em uma perspectiva formativa, concebida como uma prática de investigação (Ferreira, 2009) e, ao mesmo tempo, como uma oportunidade de aprendizagem (Pedrochi Junior, 2012). Nessa perspectiva, tanto professores quanto estudantes assumem responsabilidades compartilhadas no percurso avaliativo e no processo de aprendizagem (Silva, 2018).

De acordo com Silva (2018), os processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação não são dimensões isoladas, mas processos interligados e amalgamados que, em conjunto, oferecem elementos importantes sobre as dinâmicas construídas no espaço escolar. O autor acrescenta que, quando compreendida como prática de investigação, a avaliação não se restringe a indicar evidências do que os alunos aprenderam, mas também possibilita analisar a atuação docente, as formas de comunicação em sala e as estratégias de ensino mobilizadas. Ferreira (2009) reforça que investigar, nesse contexto, significa buscar elementos observáveis capazes de revelar indícios da aprendizagem. Portanto, a avaliação como prática de investigação subsidia uma orientação das ações de regulação do ensino e da própria avaliação (Silva; Sampel; Trombini, 2023). Para mais, é desejável que os instrumentos, as intervenções e os feedbacks construídos ao longo do processo avaliativo sejam também experiências de aprendizagem para os estudantes, que se beneficiam tanto da interação com o professor quanto da interação com seus colegas (Silva; Sampel; Trombini, 2023).

¹Este resumo configura-se como um recorte do trabalho completo intitulado "Diversificando Instrumentos de Avaliação: confiar em um único instrumento avaliativo pode ser prejudicial?" apresentado no XV Encontro Nacional de Educação Matemática e publicado nos anais do evento.

² Bolsista CNPq de Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica.

Entre as decisões que integram e repercutem na prática docente, destaca-se a escolha dos instrumentos de avaliação. Como apontado por Pedrochi Junior (2012), essa decisão, seja por instrumentos escritos ou não, revela intenções do professor e a maneira como compreende e conduz a avaliação. Nesse cenário, Forster et al. (2019) enfatizam que nenhum instrumento é neutro, pois cada um carrega limitações próprias e tende a ressaltar determinados aspectos em detrimento de outros. Por esse motivo, restringir-se a apenas um instrumento pode comprometer a compreensão global da aprendizagem. A diversificação de instrumentos, ao contrário, amplia as possibilidades de análise, já que informações obtidas em um instrumento podem ser confirmadas ou complementadas por outros. Isso demanda que o docente conheça as especificidades e potencialidades de diferentes instrumentos para utilizá-los de modo estratégico, favorecendo a abrangência de informações sobre sua prática docente e sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, subsidiando, assim, a tomada de decisões e a regulação da aprendizagem (Forster et al., 2019).

A diversificação, segundo Mendes et al. (2021), deve contemplar não apenas formatos variados — escritos, orais, audiovisuais, com consulta, sem consulta, de reprodução, de conexão ou de reflexão — mas também diferentes contextos, como atividades em sala de aula, em casa, em laboratório de informática, de forma individual, em dupla ou em grupo. Essa multiplicidade abre espaço para que os alunos reflitam, formulem hipóteses, estabeleçam relações, critiquem e construam sentidos sobre o que estudam (Buriasco; Ferreira; Ciani, 2009), evidenciando o que sabem em vez do que não sabem (Forster; Buriasco, 2020).

Entretanto, como alerta Boeri (2009), a avaliação muitas vezes é reduzida ao simples exercício de decorar fórmulas, levando os alunos a acreditarem que basta reproduzir conceitos, sem compreendê-los. Essa percepção tende a se intensificar quando o processo avaliativo se fundamenta quase que exclusivamente em práticas somativas. Não por acaso, em grande parte das instituições escolares, a prova escrita tradicional permanece como o único critério de classificação dos estudantes, mesmo essa sendo imprecisa nessa função (Forster; Buriasco, 2020).

Portanto, adotar instrumentos diversificados representa uma alternativa para tornar a avaliação um processo menos pontual, excludente e classificatório (Mendes et al., 2019), além de ser uma prática que entende a avaliação como prática de investigação — ou seja, um processo que, embora reconheça que todos os instrumentos têm limitações, acredita que esses podem ser valiosos para subsidiar o professor em suas inferências e tomadas de decisão (Forster et al., 2019).

Em suma, o trabalho em questão tem como objetivo apresentar um compilado de instrumentos avaliativos que são estudados e defendidos pelo GEPEMA, discutindo suas potencialidades e limitações a partir de uma perspectiva formativa. Para tanto, serão apresentadas algumas variações de provas escritas — como a Prova-Escrita-com-Cola, a Prova-Escrita-com-Consulta e a Prova-Escrita-em-Fases —, além do instrumento Vaivém.

Referências:

BOERI, C. N. In: BOERI, C. N.; VIONE, M. T. O uso da “cola oficial” nas provas de matemática. In: **Abordagens em Educação Matemática**. 2009.

BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, v. 22, p. 69-96, 2009.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da educação básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FORSTER, C.; BURIASCO, R. L. C. de. Prova-escrita-com-cola: algumas considerações. In: ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho; SANTOS, João Ricardo Viola dos. (Org.). **Avaliação e educação matemática: pesquisas e delineamentos**. Brasília: SBEM, 2020, p. 107-121.

FORSTER, C.; BURIASCO, R. L. C. de; SILVA, G. dos S. e; PRESTES, D. B. Avaliação como Prática de Investigação: algumas considerações a partir da aplicação de uma Prova-Escrita-com-Cola. In: **Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática**. Londrina, 2019. Anais do XV EPREM, 2019

MENDES, M. T.; TREVISAN, A. L.; RODRIGUES, R. G. B.; WEBER, T. C.. Prova em dupla e com consulta em aulas de Cálculo? Agora ficou fácil tirar 10!. **REMat-SP - Revista de Educação Matemática de São Paulo**, v. 2, n. 1, p. 1-12, 2021.

PEDROCHI JUNIOR, O. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em Matemática**. 2012. 56f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

SILVA, G. dos S. e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, G. dos S. e; SAMPEL, V. K.; TROMBINI, T. Uma análise das reflexões promovidas por um estudante de Licenciatura em Matemática em um Vaivém. **Paradigma**, v. 24, n. 1, p. 47-56, 2023.

Construindo o Conhecimento Matemático: A Robótica Educacional como Ferramenta de Investigação

José Divaldo Xavier da Silva¹

jose.silva1@ufpr.br

Cleide Ângela Sant'ana (Orientadora)²

cleideangela22@gmail.com

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Matemática, Robótica Educacional, Ensino-aprendizagem.

Resumo:

A educação contemporânea busca desenvolver competências que preparem os estudantes para resolver problemas. Neste contexto, emerge o conceito de Pensamento Computacional, que segundo Brackmann (2017) refere-se à habilidade de resolução de problemas complexos com base em quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define o Pensamento Computacional como a capacidade de “resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática por meio do desenvolvimento de algoritmos” (Brasil, 2018). É com o objetivo de desenvolver tais capacidades que o presente trabalho detalha a concepção e os resultados de um projeto de robótica educacional, realizado entre maio e dezembro de 2024 em uma escola da rede pública, situada em Curitiba, Paraná. A iniciativa nasceu com a liberdade pedagógica para implementar uma abordagem matemática em uma equipe de robótica do ensino fundamental II, investigando se a articulação entre a base teórica em matemática e programação e sua aplicação prática pode, efetivamente, gerar um aprendizado mais consolidado e aprofundado.

O princípio pedagógico do projeto foi o de que a eficácia da interação em sala de aula depende da construção de um universo discursivo compartilhado entre professor e aluno. No contexto da matemática, isso se traduz na aplicação consistente da linguagem formal, entendida como um sistema organizado por estruturas sintáticas bem definidas (SILVEIRA, 2010). A adoção deste formalismo não foi um fim em si, mas uma estratégia deliberada para aprimorar a comunicação e permitir que os estudantes construíssem seu conhecimento de maneira clara e rigorosa. Foi por essa razão que o projeto dedicou sua fase inicial a um processo de amadurecimento matemático, diferenciando-se de abordagens que iniciam diretamente na programação ou na montagem dos robôs. Antes de interagirem com os kits de robótica, os quatro estudantes da equipe estudaram alguns pilares da lógica, tendo como referência a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), para compreenderem a natureza de conceitos como variáveis, constantes e conectivos lógicos. Em seguida, os alunos tiveram aulas de programação em blocos, uma escolha feita por motivos didáticos para priorizar o pensamento computacional. Tal

abordagem visual elimina a complexidade da sintaxe, permitindo que os estudantes se concentrem na lógica e na organização do programa. Assim, foram apresentados de maneira intuitiva conceitos como loops, estruturas condicionais, entre outros.

Apenas após esta fase, a equipe iniciou os trabalhos práticos com os kits LEGO® Education SPIKE™¹. Dessa forma, a transição da lógica axiomática para a programação foi fluida, mas ao enfrentarem o desafio de criar um robô seguidor de linha, a aplicação de uma lógica condicional simples com *if & else* mostrou-se insuficiente, gerando um movimento instável. Este "fracasso" prático exigiu a aplicação de um dos pilares do Pensamento Computacional: a decomposição do problema complexo em partes menores e mais manejáveis, como o controle da velocidade e o tratamento do erro. A solução veio com a introdução do controlador Proporcional-Derivativo (PD), não como uma fórmula pronta, mas como a construção de um novo conhecimento matemático. Outrossim, vale ressaltar que uma característica fundamental da robótica educacional é a sua característica idiossincrática, onde o software está acoplado às especificidades do hardware. Ou seja, um mesmo algoritmo não apresenta desempenho idêntico em robôs distintos devido a inevitáveis variações físicas, como a massa, a distribuição de peso, a altura e o espaçamento dos sensores. Essa realidade impõe a necessidade de uma calibração e programação individualizadas para cada máquina, elevando o desafio para os estudantes. Por conseguinte, ainda que os estudantes possam ter buscado alguma inspiração em fontes externas, a construção de uma solução funcional exige uma adaptação criteriosa e um entendimento profundo da interação entre o código e as particularidades mecânicas de seu próprio robô.

Ademais, o desenvolvimento do controlador PD exemplificou a essência do pilar de algoritmos: a criação de estratégias lógicas e procedimentos para encontrar a solução correta, podendo testar resoluções e revisá-las se necessário. O componente Proporcional (P) foi trabalhado a partir da equação *proporcional = erro × kp*, onde *kp* é o parâmetro "constante proporcional" definido de acordo com a situação-problema, e o componente Derivativo (D) como uma representação da taxa de variação, a partir da equação *derivada = (erro - last_error) * kd*, onde *kd* é o parâmetro "constante derivada" também definido de acordo com a situação-problema. Além do seguidor de linha, os estudantes criaram programações para desviar de obstáculos, realizar dupla verificação de cores específicas, entre outros. A solução para cada desafio, da lógica inicial à calibração dos valores *kp* e *kd*, foi produto de pesquisas realizadas, do raciocínio e da colaboração intelectual dos estudantes, garantindo que o mérito de cada avanço fosse atribuído à sua crescente capacidade de análise e síntese. Vale ressaltar que todo o processo de desenvolvimento dos algoritmos operou sob a diretriz da não utilização de Inteligência Artificial Generativa (ChatGPT, Gemini, etc.).

A eficácia desta metodologia foi validada por resultados expressivos em algumas competições de robótica. Na Olimpíada Brasileira de Robótica (OBR), a equipe conquistou o prêmio extra de Escola Pública na modalidade Resgate. No Torneio Juvenil de Robótica (TJR), obteve o 1º lugar na etapa regional do Paraná e, na etapa nacional em São Paulo, alcançou o 3º lugar no pódio brasileiro, ambos na modalidade Resgate no Plano. Também na TJR a equipe alcançou o terceiro lugar

1 LEGO EDUCATION. SPIKE, 2024. Disponível em: <https://spike.legoeducation.com/>.

na modalidade de Cabo de Guerra, na etapa regional, e garantiu mais uma vaga na etapa nacional. Dessa forma, a performance superior do robô, consequência direta da robustez do algoritmo PD, foi o diferencial técnico. Porém, a participação na First Lego League (FLL), um torneio com ênfase em design mecânico, resultou em uma colocação modesta. Portanto, longe de ser um revés, esse resultado confirmou o sucesso da nossa abordagem, nos proporcionando excelentes resultados onde escolhemos focar: programação e lógica.

Em suma, a experiência aqui relatada demonstra que a concessão de autonomia pedagógica para explorar conteúdos matemáticos fundamentais é uma estratégia de enorme potencial. Assim, ao investir no amadurecimento lógico dos alunos através de uma linguagem matemática formalizada (SILVEIRA, 2010) antes de introduzir a programação, e ao valorizar a solução autoral de problemas, foi possível levar uma equipe de escola pública a um patamar de excelência nacional. O projeto serve como um forte argumento de que, com a metodologia correta e a confiança no potencial dos estudantes e educadores, é possível desenvolver, com êxito, as competências do Pensamento Computacional previstas pela BNCC e construir conhecimento científico em diversos contextos sociais.

Referências:

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Linguagem matemática e comunicação: um enfoque interdisciplinar**. Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

Desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais: um mapeamento em periódicos nacionais

Natalia Chicora¹

nataliachicora@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)¹

gabriel.santos22@gmail.com

André Lima Rodrigues (Coorientador)²

andrelimaro1@gmail.com

¹ Universidade Federal do Paraná

² Instituto Federal de Santa Catarina

Palavras-chave: Educação Matemática, desenvolvimento profissional docente, mapeamento, formação de professores que ensinam matemática, Anos Iniciais.

Resumo:

O desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental constitui um campo de investigação que articula saberes disciplinares, pedagógicos e experienciais (Tardif, 2002; Shulman, 2014; Fiorentini, 2008). Este trabalho é resultado de um estudo desenvolvido como artigo final da disciplina Tendências de Pesquisa em Educação Matemática, ministrada pelo professor doutor Gabriel dos Santos e Silva, cursada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, na Universidade Federal do Paraná (UFPR). Com o intuito de compreender como essa temática vem sendo abordada na literatura acadêmica nacional, realizou-se um mapeamento da produção científica publicada em periódicos indexados, cujo objetivo foi de identificar tendências e lacunas.

As buscas ocorreram em 5 de agosto de 2025, nas bases de dados Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Scientific Electronic Library Online (SciELO), utilizando os descritores “desenvolvimento profissional docente”, “matemática” e “anos iniciais”. Após a aplicação de critérios de inclusão, como a disponibilidade do texto integral em português e a pertinência temática, chegou-se a um conjunto de 12 artigos selecionados para o corpus, sendo 11 encontrados no Portal da CAPES e um na SciELO.

A investigação, de natureza qualitativa e exploratória, recorreu à leitura integral dos trabalhos e à Análise de Conteúdo (Bardin, 2016) para organizar e interpretar o material. As unidades de análise não foram pré-definidas, mas emergiram a partir das regularidades e ênfases encontradas nos resumos das publicações (Gil, 2019; Marconi; Lakatos, 2006). Dessa forma, foi possível agrupar os estudos encontrados em cinco unidades de análise: formação continuada (composto por três artigos encontrados no Portal da CAPES e um na SciELO), grupo colaborativo (composto por três artigos encontrados no Portal da CAPES), *Lesson Study* (composto por um artigo encontrado no Portal da CAPES), levantamentos bibliográficos/mapeamentos (composto por dois artigos encontrados no Portal da CAPES) e narrativas (composto por três artigos encontrados no Portal da CAPES).

Os artigos classificados na unidade de análise “formação continuada” descrevem ações formativas como cursos, oficinas e programas de extensão, que pretenderam articular conhecimentos matemáticos e pedagógicos, buscando favorecer mudanças no planejamento e em estratégias utilizadas pelos professores. Embora indiquem efeitos positivos, como mais segurança para abordar conteúdos e reorganização de sequências didáticas, esses trabalhos também apontam a necessidade de intervenções a longo prazo para que as mudanças se consolidem na prática cotidiana.

Na unidade de análise “grupo colaborativo”, destacam-se experiências de docentes reunidos para estudar, discutir e elaborar materiais de forma coletiva. Os trabalhos indicam que esses espaços promovem trocas importantes e fortalecem a ideia do professor como sujeito de sua própria formação. Contudo, algumas experiências relatam dificuldades para manter a periodicidade e assegurar a continuidade das ações diante das demandas escolares.

O trabalho colocado na unidade de análise de “*Lesson Study*”, estratégia metodológica originária do Japão, aparece como um dispositivo que estimula ciclos estruturados de planejamento, execução e análise de aulas. Nos artigos analisados, essa abordagem é valorizada por permitir que os docentes observem e reflitam sobre o raciocínio dos alunos, ajustando o ensino com base nas produções coletadas. Apesar disso, a efetivação desse potencial depende de suporte institucional e de tempo para o desenvolvimento dos ciclos.

Os trabalhos de “levantamento bibliográfico/mapeamento” apresentam panoramas da produção acadêmica e sinalizam temas pouco explorados, como o ensino de geometria, grandezas e medidas. Eles também ressaltam a carência de estudos de longo prazo que avaliem os impactos das formações na aprendizagem dos estudantes.

Os artigos classificados em “narrativas” apontam tal modelo como ferramenta para ressignificar experiências, crenças e afetos relacionados ao ensino de matemática. Os trabalhos apontam que ainda é pouco comum o vínculo das narrativas com dados observacionais que mostram mudanças na prática dos professores.

A análise do mapeamento revela que os trabalhos apresentam uma diversidade de abordagens e formações identificadas, nos quais prevalecem os estudos qualitativos com intervenções pontuais e de curta duração. Como encaminhamentos futuros, sugere-se ampliar o escopo das buscas bibliográficas, incorporando outras bases de dados e períodos temporais, assim como realizar pesquisas longitudinais para compreender o impacto das formações no desenvolvimento profissional docente e na sala de aula dos Anos Iniciais. Também é relevante incluir dimensões da afetividade, da identidade profissional docente e institucionais nas análises, de modo a compreender os fatores que englobam o desenvolvimento profissional docente. Tais esforços podem contribuir para a formulação de políticas e práticas, capazes de transformar, de forma contínua, o ensino de matemática nos Anos Iniciais.

Referências:

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 1. ed. portuguesa / trad. Luís Antero Reto; Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

FIORENTINI, Dário. A pesquisa e as práticas de formação de professores de Matemática em face das políticas públicas no Brasil. **Bolema — Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 29, p. 43–70, 2008.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

SHULMAN, Lee S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec**, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 196–229, dez. 2014

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

Desvendando a matemática presente nos meios de Transporte

Camila Rios¹

camilarios@ufpr.br¹

Profa. Dra. Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora)²

paulacouto@ufpr.br²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Meios de transporte, Metodologia, Ensino.

Resumo:

O trabalho a seguir apresenta o relato de experiência de criação de uma modelagem matemática do zero. A primeira autora, orientada pela segunda autora, professora regente da matéria optativa do curso de Matemática - Licenciatura "Tópicos da Educação Matemática I" no primeiro semestre de 2025, trabalhou em sala de aula sobre como planejar e executar uma atividade de modelagem matemática com um tema que envolva algum problema ambiental.

Em primeiro momento devemos compreender o que é a Modelagem Matemática e como ela se desenvolve na prática. Segundo Biembengut e Hein (2011) a modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo, a partir de um tema real, desse modo ela é capaz de interagir o "ferramental", sendo ele a matemática em si, com o real. Em outras palavras, a modelagem matemática é a forma de aplicar a matemática no nosso cotidiano. Desse modo, para criar uma atividade utilizando dessa metodologia precisa-se passar por alguns passos, descritos por Biembengut e Hein (2011), sendo eles: a interação, a matematização e o modelo matemático. Este trabalho seguiu essas etapas e a seguir apresentamos seu desenvolvimento.

O primeiro processo para a criação de uma atividade com a metodologia apresentada é a Interação. Nessa etapa, segundo Biembengut e Hein (2011), deve-se conhecer a situação problema que será trabalhada e ser feita uma familiarização com o assunto. Há diversas formas de escolha do tema e também de como prosseguir com a pesquisa exploratória a partir do tema. Aqui, foi definido o tema geral pela professora regente que estabeleceu que nós alunos deveríamos escolher um tema que se relacionasse com os problemas ambientais. Portanto, a partir disso, a primeira autora escolheu, almejando criar uma modelagem que fosse algo realmente presente no cotidiano do público alvo (nesse caso, nós mesmos alunos da matéria do desenvolvimento do trabalho) o tema "Meios de transporte em Curitiba: qual o mais vantajoso ambientalmente, financeiramente e com relação ao tempo?". Para descobrir isso, foi observada a necessidade de buscar algumas informações:

Quais os meios de transporte a serem analisados? Qual o ponto de partida e destino? Quais os possíveis trajetos para cada tipo de veículo e quantos quilômetros tem cada um deles? Qual o tempo médio para a realização de cada trajeto? Qual a quantidade de emissão de GEE de cada tipo de veículo? Qual o valor da passagem de ônibus na cidade e do litro da gasolina? Para responder essas perguntas, foram realizadas diversas pesquisas em fontes diferentes para obter as informações necessárias e continuar com os processos de modelagem matemática.

Com isso, já foi possível dar início a próxima etapa: a matematização. Nessa fase, segundo Biembengut e Hein (2011), é onde se dá o início ao processo da manipulação dos dados encontrados na pesquisa exploratória e onde iremos utilizar ferramentas matemáticas para responder o questionamento que fizemos anteriormente. Portanto, foram realizados cálculos sobre quantos litros de combustível seria utilizado nos respectivos trajetos de cada tipo de veículo, considerando que um carro tem consumo médio de 10 km/l e um ônibus de 2,4 km/l (de Carvalho, 2011). Como o trajeto do carro é de 3,5 km e o seu consumo é de 10 km/l, dividindo-se a distância pelo consumo, conclui-se que, para esses valores, foram usados 0,35 l de gasolina. De forma análoga, é possível afirmar que seriam usados 3,75l de diesel para o trajeto do ônibus. Agora, com esses novos valores obtidos calculei a quantidade, em quilogramas, de CO₂ emitido para cada combustível, chegando a 0,805 kg de CO₂ na queima da gasolina e de 13,5 Kg na queima do diesel. Também, calculei, utilizando a quantidade de litros de gasolina consumidos no trajeto, o valor gasto em combustível nesse trajeto, concluindo que seriam gastos R\$2,29 aproximadamente.

Portanto, após trabalhar com todos esses números e informações de forma matemática podemos relacionar todos eles e ver se já é possível responder a pergunta inicial de qual seria o meio de transporte mais vantajoso. Esse processo faz parte da terceira e última etapa da metodologia da modelagem matemática, o modelo matemático. Vale ressaltar que o objetivo nessa etapa, segundo Biembengut e Hein (2011), é encontrar uma solução para o problema que obtivemos no início do trabalho, resultando em um Modelo, como nomeiam os autores. Esse modelo pode se dar por várias formas, seja por meio de gráficos, tabelas, equações, entre outros. Então, para isso foi montada uma tabela.

Analisando a tabela foi percebido um erro gravíssimo. Embora o ônibus tenha um valor de emissão superior ao carro, sua capacidade de passageiros não condiz com o veículo particular. Portanto, houve a necessidade de fazer novos cálculos, agora da emissão dos GEE por pessoa no veículo, isto considerando que um carro tem capacidade de 5 passageiros e o ônibus, em média, 200 passageiros (Prefeitura de Curitiba)¹. Logo, calculando o valor, em quilogramas por pessoa, da emissão do gás carbônico seria de 0,161 e 0,0675 para o carro e o ônibus, respectivamente. Desse modo, foi criada uma nova tabela, que se tornou o modelo final.

1 Dimensionamento da Frota- Critérios técnicos utilizados pela URBS para dimensionamento da frota. Disponível em: <https://www.urbs.curitiba.pr.gov.br/transporte/rede-integrada-de-transporte/33>

Agora, analisando essa nova tabela, foi questionado se ela responderia a pergunta inicial “Meios de transporte em Curitiba: qual o mais vantajoso ambientalmente, financeiramente e com relação ao tempo?”. É possível afirmar, diante dos dados obtidos, que, tratando-se da questão ambiental, a bicicleta seria o mais vantajoso, sendo que não realiza a emissão de nenhum gás, porém dentre os meios de transporte poluentes o ônibus seria a melhor opção. Já em relação ao financeiro, a melhor opção continua sendo a bicicleta, sem gasto algum para este trajeto analisado, seguido do carro. Por fim, com relação ao tempo o carro seria o meio de transporte mais rápido, sendo assim o mais vantajoso nesse quesito. Vale ressaltar que para esse trabalho foram desconsiderados os valores de aquisição do veículo particular e da bicicleta, assim como os custos de suas manutenções. Vale ressaltar também que não foi analisado se há ciclovias para o trajeto. Desse modo, nessa atividade é possível concluir que o meio de transporte mais vantajoso depende daquilo que você almeja e tem como recursos, mas a bicicleta além de ser destaque em duas das três formas analisadas ainda é benéfica à saúde, porém em dias chuvosos por exemplo não seria uma boa opção.

Conclui-se assim, que a atividade de modelagem matemática pode ser uma estratégia interessante de ser trabalhada em sala de aula, pois ela utiliza das ferramentas da matéria em temas presentes no cotidiano dos alunos. Basta um bom direcionamento do professor que essa atividade será facilmente aplicável em sala.

Referências:

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

CARVALHO, Carlos Henrique Ribeiro de. **Emissões relativas de poluentes do transporte motorizado de passageiros nos grandes centros urbanos brasileiros**. (Texto para Discussão, n. 1606). Brasília: IPEA, 2011. Disponível em: <https://hdl.handle.net/10419/91332>. Acesso em: 19 maio 2025.

Do cálculo a vida real: práticas nas escolas com relação à matemática

Gabrielle Gislayne de Almeida Gregorio¹

gabriellegislayne99@gmail.com¹

Susi Gabrielle Morato de Souza²

sulenan5@gmail.com²

Vandressa Ribeiro³

vandressaribeiro199@gmail.com²

Liceia Alves Pires (Orientadora)

Liceia.pires@unespar.edu.br³

Danielle Marafon (Coorientadora)

danielle.marafon@unespar.edu.br³

¹Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranaguá 1

²Universidade Estadual do Paraná- Campus Paranaguá 2

³Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranaguá 3

Palavras-chave: matemática, lúdico, práticas pedagógicas.

Resumo:

A Matemática está presente em diversos aspectos da vida cotidiana, desde o cálculo de valores monetários em compras até a interpretação de informações em gráficos e a organização de finanças pessoais. Apesar de sua relevância, muitos estudantes percebem a disciplina como abstrata, descontextualizada e de difícil compreensão, associando-a à memorização de fórmulas e à resolução repetitiva de exercícios. Nesse sentido, Dante (2010) defende que o ensino da matemática deve estar vinculado a situações concretas, promovendo aprendizagens que façam sentido para o aluno e superem a visão mecanicista baseada apenas em memorização e repetição de exercícios.

Nesse cenário, torna-se fundamental adotar práticas pedagógicas que aproximem os conteúdos matemáticos da realidade do estudante, tornando-os mais acessíveis, significativos e atrativos. O Programa de Educação Tutorial – Matemática e Pedagogia (PET-MAPE), da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), tem buscado promover ações que integrem a Matemática e a Pedagogia, com vistas a apoiar alunos que apresentam dificuldades em Português e Matemática e a desenvolver metodologias inovadoras voltadas para a aprendizagem significativa.

1 Bolsista PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá.

2 Bolsista PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá.

3 Bolsista PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá.

Metodologia

As ações do PET-MAPE foram realizadas em duas instituições públicas: uma da rede estadual, contemplando turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, e outra da rede municipal, com turmas do 4º e 5º anos. As atividades foram planejadas e aplicadas por acadêmicos dos cursos de Matemática e Pedagogia, em parceria com professores regentes.

As práticas envolveram:

- **Jogos pedagógicos:** desafios de lógica, competições matemáticas em grupo e a atividade Mercado de Compras, simulando situações reais de consumo, cálculos de troco e noções de matemática financeira.
- **Atividades colaborativas:** resolução de problemas em duplas ou grupos, incentivando a troca de estratégias, o raciocínio coletivo e o respeito ao ritmo de cada colega.
- **Práticas lúdicas com material concreto:** jogos de tabuleiro e dinâmicas envolvendo as quatro operações básicas, voltadas para a compreensão conceitual e o raciocínio lógico.

O acompanhamento incluiu observação direta das aulas, registro de participação e análise da evolução da compreensão dos conteúdos pelos estudantes.

Resultados e Discussão

A experiência demonstrou que a utilização de metodologias lúdicas e contextualizadas favoreceu o engajamento dos alunos, principalmente daqueles que apresentavam maiores dificuldades em Matemática. O jogo *Mercado de Compras*, por exemplo, possibilitou que os estudantes praticassem operações com números decimais, cálculos de troco e tomada de decisões em situações de consumo, aproximando os conteúdos escolares da realidade cotidiana.

A inserção de jogos e dinâmicas proporcionou um ambiente de aprendizagem mais leve e participativo, no qual os alunos passaram a interagir de forma mais ativa, contribuindo para a construção coletiva do conhecimento. Como destacam Silva et al (2024), o uso de jogos no contexto escolar constitui recurso altamente significativo, pois permite aprender brincando, despertando interesse e prazer.

O uso de tecnologias digitais também se mostrou eficaz, uma vez que facilitou a visualização de conceitos abstratos e favoreceu a motivação dos estudantes, por se tratar de ferramentas já incorporadas ao seu cotidiano. Além disso, as atividades colaborativas evidenciaram a importância da troca de conhecimentos entre pares, fortalecendo a autonomia, a comunicação matemática e a argumentação.

Conforme apontam Spinillo e Magina (2004), embora o material concreto não deva ser considerado como recurso único ou suficiente para a aprendizagem, seu uso crítico e contextualizado pode ampliar as possibilidades de compreensão dos conceitos matemáticos.

Considerações Finais

As práticas pedagógicas desenvolvidas pelo PET-MAPE revelaram que a Matemática, quando trabalhada por meio da ludicidade, da tecnologia e da contextualização, pode ser ressignificada pelos alunos como uma disciplina acessível, útil e prazerosa. As atividades propostas contribuíram para a superação de dificuldades, o fortalecimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico, além de promoverem a inclusão de estudantes com diferentes níveis de conhecimento.

Assim, evidencia-se que metodologias diversificadas, que articulam teoria e prática, potencializam não apenas o aprendizado dos conteúdos matemáticos, mas também o desenvolvimento integral do estudante, estimulando habilidades como cooperação, autonomia e criatividade.

Referências:

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2010.

SPINILLO, A. G., MAGINA, S. Alguns "mitos" sobre a educação matemática e suas consequências para o ensino fundamental. In M. R. PAVANELLO (Org.), **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental**. São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático. 2004

SILVA E, R. et al. A ludicidade como recurso pedagógico significativo no processo de ensino e aprendizagem da matemática nas séries finais do ensino fundamental. **Revista Tópicos**, v. 2, n. 8, 2024.

Educação Financeira e Mulheres: Histórias, Desafios e Impactos na Formação Docente

Marjory Castelhane Camargo¹

*marjoryccamargo@gmail.com*¹

Liceia Alves Pires (Orientadora)²

*liceia.pires@unespar.edu.br*²

Cleonis Viater Figueira (Corientadora)³

*cleonis@utfpr.edu.br*³

^{1,2}Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), Paranaguá – PR

³Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco–PR

Palavras-chave: Mulheres; Educação Financeira; História Cultural; Formação Docente.

Resumo:

A trajetória histórica das mulheres no contexto econômico brasileiro evidencia longos períodos de restrições legais e sociais que limitaram sua autonomia financeira. Durante o início do século XX, o Código Civil de 1916 estabelecia que a mulher precisava da autorização do marido para trabalhar, herdar ou realizar viagens, restringindo significativamente sua independência (ver [3]).

Apenas com a Lei nº 4.121/1962, conhecida como Estatuto da Mulher Casada, as mulheres conquistaram o direito de exercer atividades remuneradas sem consentimento do cônjuge (ver [4]).

Outros avanços legais, como o acesso ao crédito em 1974 e a Constituição de 1988, consolidaram direitos formais de igualdade. Mais recentemente, a Lei nº 14.611/2023 reforçou a igualdade salarial e critérios remuneratórios entre mulheres e homens, buscando reduzir disparidades persistentes (ver [5]).

Apesar desses progressos legislativos, pesquisas contemporâneas apontam que barreiras culturais, desigualdades salariais e estereótipos de gênero ainda influenciam a relação das mulheres com o dinheiro, limitando seu pleno exercício de autonomia financeira (ver [1], [6], [8], [9] e [10]).

¹ Acadêmica do Curso de Licenciatura em História e bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC 2025-2026), da Unespar Campus de Paranaguá – PR, com bolsa pelo CNPq.

² Doutora em Educação, professora da Unespar – Campus Paranaguá - PR.

³ Doutora em Matemática, Departamento de Matemática, da UTFPR - Campus Pato Branco - PR.

Considerando esse panorama histórico e social, o presente projeto busca investigar a relação das mulheres com a administração financeira pessoal e profissional, enfatizando a importância do empoderamento econômico feminino. A pesquisa será realizada junto a acadêmicas de diferentes cursos, incluindo Pedagogia, Letras, História e Engenharia de Produção, com o objetivo de compreender como a formação acadêmica influencia percepções, práticas e desafios no manejo das finanças.

Ao identificar fatores culturais, educacionais e sociais que interferem na autonomia financeira, o projeto pretende oferecer subsídios teóricos e práticos para a promoção da Educação Financeira como instrumento de empoderamento das mulheres.

A metodologia contempla revisão bibliográfica das produções acadêmicas entre 2020 e 2025, análise documental de legislações e políticas públicas, aplicação de questionários e entrevistas semiestruturadas. O estudo propõe o mapeamento de percepções, hábitos financeiros e dificuldades relatadas pelas participantes, além de avaliar a importância atribuída à Educação Financeira na formação docente e na vida cotidiana.

A investigação será conduzida à luz da História Cultural, abordando as análises das práticas e representações que atravessam a história das mulheres, com foco em compreender as barreiras históricas e contemporâneas que impactam a autonomia econômica feminina e suas implicações na formação docente, contribuindo para estratégias de inclusão de conteúdos de Educação Financeira nos currículos acadêmicos escolares (ver [2] e [7]).

Como resultados esperados, citam-se contribuições significativas para a promoção da igualdade de gênero no campo econômico, fortalecendo práticas de ensino voltadas à Educação Financeira e promovendo consciência crítica sobre finanças entre mulheres.

O projeto objetiva ainda gerar recomendações para políticas públicas e programas educacionais que incentivem a autonomia financeira feminina, reforçando o papel da Educação Financeira como ferramenta de empoderamento e cidadania plena.

Ao conectar marcos históricos, legislações e experiências contemporâneas das mulheres, pretende-se evidenciar como práticas educativas podem transformar a relação das mulheres com o dinheiro, promovendo segurança, planejamento e tomada de decisões conscientes.

Referências:

[1] ARAÚJO, Marta. Lei de 15 de outubro de 1827. **Revista Educação Em Questão**, v. 36, n. 22, 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/3975>. Acesso em: 29 Agosto de 2025.

- [2] BARROS, José D'Assunção. A Nova História Cultural – considerações sobre o seu universo conceitual e seus diálogos com outros campos históricos - DOI: 10.5752/P.2237-8871.2011v12n16p38. **Cadernos de História**, Belo Horizonte, v. 12, n. 16, p. 38–63, 2011. DOI: 10.5752/P.2237-8871.2011v12n16p38. Disponível em: <https://periodicos.pucminas.br/cadernoshistoria/article/view/P.2237-8871.2011v12n16p38>. Acesso em: 29 ago. 2025.
- [3] BRASIL. **Lei nº 3.071, de 1º de janeiro de 1916**. Código Civil dos Estados Unidos do Brasil: seção 1, Brasília, DF, 05 jan. 1916. Disponível em: <https://www.jusbrasil.com.br/topicos/11494962/artigo-6-da-lei-n-3071-de-01-de-janeiro-de-1916>. Acesso em: 29 ago. 2025.
- [4] BRASIL. **Lei n.º 4.121, de 27 de agosto de 1962**. Dispõe sobre a situação jurídica da mulher casada. Diário Oficial da União, Brasília, DF, seção 1, p. 9125, 3 set. 1962. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/1950-1969/l4121.htm. Acesso em: 29 ago. 2025.
- [5] BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal, 1988. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf?sequence=. Acesso em: 29 ago. 2025.
- [6] BRASIL. **Lei nº 14.611, de 3 de julho de 2023**. Dispõe sobre a igualdade salarial e de critérios remuneratórios entre mulheres e homens; e altera a Consolidação das Leis do Trabalho. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 4 jul. 2023. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2023/lei/l14611.htm. Acesso em: 29 ago. 2025.
- [7] CHARTIER, Roger. **A história cultural: entre práticas e representações**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1988.
- [8] FERNANDES, Wander. Linha do tempo – Direitos das mulheres na legislação brasileira e na jurisprudência do STF, CNJ e STJ. **Jusbrasil**, 2024. Disponível em: <https://www.jusbrasil.com.br/artigos/direitos-das-mulheres-na-legislacao-brasileira-e-na-jurisprudencia-do-stf-do-cnj-e-do-stj-linha-do-tempo/2210718007>. Acesso em: 29 ago. 2025.
- [9] HOGEMANN, Edna Raquel. Conquistas das mulheres no Brasil: A linha do tempo das leis e políticas públicas. **Revista do Ministério Público Militar**, v. 51, n. 45, p. 173–206, 2024. Disponível em: <https://revista.mpm.mp.br/rmpm/article/view/429>. Acesso em: 29 ago. 2025.
- [10] SANDLER, Carol. 10 verdades sobre mulheres e dinheiro. **Forbes Brasil**. Colunas, maio, 2021. Disponível em: <https://forbes.com.br/colunas/2021/05/carol-sandler-10-verdades-sobre-mulheres-e-dinheiro/>. Acesso em: 29 ago. 2025.

Entre telas e conceitos: um estudo em andamento sobre o impacto de ferramentas digitais na aprendizagem da Matemática

Patrícia Vieira Alves¹

patricinha.v.alves@gmail.com¹

André Guilherme Buss Lemes (Orientador)²

andre.lemes@unespar.edu.br

^{1,2}Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR)

Palavras-chave: matemática, tecnologias digitais, aprendizagem.

Resumo:

A aprendizagem da Matemática na Educação Básica brasileira enfrenta desafios persistentes, refletidos nos baixos índices de desempenho em avaliações externas como o SAEB e o PISA (Brasil, 2018). Grande parte dessas dificuldades decorre da manutenção de práticas pedagógicas tradicionais, baseadas na memorização e repetição mecânica de exercícios, que limitam a construção significativa do conhecimento. Freire (1987) já denunciava esse modelo como “educação bancária”, em que o professor deposita conteúdos no estudante, sem diálogo ou criticidade.

Frente a esse quadro, torna-se necessário repensar metodologias que valorizem o protagonismo discente e a construção ativa do saber. As tecnologias digitais se apresentam como ferramentas mediadoras que ampliam as possibilidades de representação, experimentação e visualização dos conceitos matemáticos (Aguiar, 2008; Valente, 1999). Recursos como softwares matemáticos, jogos digitais, plataformas interativas e narrativas digitais (Valente; Almeida, 2014) permitem que os estudantes explorem variáveis, formulem hipóteses e desenvolvam autonomia no processo de aprendizagem (Lima et al., 2024).

Essa perspectiva encontra respaldo em teorias educacionais clássicas. Para Piaget (1974), o conhecimento é construído pela interação ativa do sujeito com o objeto de estudo, por meio de processos de assimilação e acomodação (Dongo Montoya, 2011; Treviso; Almeida, 2014). Vygotsky (1991), por sua vez, enfatiza a mediação social e cultural no desenvolvimento cognitivo, situando a Zona de

¹ Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática - UNESPAR - Campus Paranaguá.

Desenvolvimento Proximal (ZDP) como espaço privilegiado para a aprendizagem (Vygotsky, 1991).

Papert (1980), inspirando-se em Piaget, desenvolveu o construcionismo, defendendo que a aprendizagem se torna mais significativa quando o estudante constrói artefatos concretos ou digitais (Massa; Oliveira; Santos, 2022). Nesse sentido, Moran (2013) destaca que as tecnologias devem ir além do uso instrumental e promover aprendizagens autônomas, críticas e colaborativas. Campos (2008) reforça que a articulação entre a pedagogia freireana e a proposta construcionista de Papert amplia as possibilidades de práticas educativas transformadoras no uso das TDIC.

Este trabalho, em andamento, faz parte de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e tem como objetivo investigar as contribuições das ferramentas digitais para a aprendizagem matemática no Ensino Médio de escolas públicas. A pesquisa é qualitativa e será realizada por meio de questionários semiestruturados aplicados a estudantes. O foco é compreender as percepções dos discentes sobre potencialidades e dificuldades do uso das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem da Matemática (Oliveira, 2020).

Espera-se que os resultados parciais evidenciem tanto benefícios quanto entraves. Entre os benefícios, destacam-se o aumento do engajamento, a motivação, a apropriação mais crítica dos conceitos e a contextualização do conhecimento matemático (Roque, 2012; Jonassen, 2000). Entre os entraves, ressaltam-se a insuficiência de infraestrutura tecnológica, as desigualdades no acesso e as dificuldades de formação docente (Valente; Almeida, 2020). Nesse sentido, D'Ambrosio (1996) aponta que a Educação Matemática deve estar conectada à realidade cultural e social, o que inclui, no contexto atual, a integração consciente e crítica das tecnologias digitais.

Assim, ainda que em construção, este estudo busca contribuir para a compreensão do papel das tecnologias digitais no ensino da Matemática e oferecer reflexões que subsidiem práticas pedagógicas mais inclusivas, críticas e significativas.

Referências:

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 05 ago. 2025.
- [2] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996. Coleção Perspectivas em Educação Matemática.
- [3] FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.
- [4] MORAN, José Manuel. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 21. ed. Campinas: Papirus, 2013.

- [5] PAPERT, Seymour. **Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas**. New York: Basic Books, 1980.
- [6] PIAGET, Jean. **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.
- [7] ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- [8] VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.
- [9] VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991. Disponível em: https://www.mackenzie.br/fileadmin/ARQUIVOS/Public/1-mackenzie/universidade/pro-reitoria/graduacao-assuntos-acad/forum/X_Forum/LIVRO.VYGOTSKY.FORMACAO.MENTE.pdf. Acesso em: 20 ago. 2025.

Formação Docente em Matemática, Identidade Profissional e a dança: apresentação do portfólio de uma (futura) professora que ensina matemática

Natalia Chicora¹

nataliachicora@gmail.com

Paulo Henrique Rodrigues (Orientador)²

hrpaulo.91@gmail.com

Tania Teresinha Bruns Zimer (Orientadora)¹

taniatbz@ufpr.br

Ettiène Cordeiro Guérios (Orientadora)¹

ettiene@ufpr.br

Eduarda de Almeida Gomes Bernardo (Orientadora)¹

eduarda.almeida@ufpr.br

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

²Universidade Estadual do Paraná (Unespar) — Campus Paranavaí

Palavras-chave: Identidade Profissional docente, portfólio, prática de docência em matemática.

Resumo:

A constituição da Identidade Profissional (IP) docente é um movimento complexo, temporal, dinâmico e experiencial, marcado pela mobilização entre crenças, autoconhecimento, emoções, conhecimentos sobre a profissão, autonomia (vulnerabilidade e sentido de agência) e compromisso político (Cyrino, 2017; 2021). Nesta perspectiva de Cyrino (2017; 2021), a IP se configura como um processo em constante construção, que articula dimensões pessoais, profissionais, intelectuais, morais e políticas, as quais se influenciam e se reconfiguram mutuamente ao longo da trajetória do (futuro) professor. Esse processo, embora não tenha um ponto de início, se intensifica no início da docência, período repleto de aprendizagens, tensões e adaptações (Marcelo, 2022).

Nas licenciaturas, esse início da docência pode se estabelecer nas disciplinas de Estágio Curricular Supervisionado (ECS) obrigatório, que possibilitam ao licenciando vivenciar, de forma orientada, o cotidiano escolar e as múltiplas dimensões do trabalho docente. Essa aproximação com a Educação Básica coloca o licenciando diante de situações que exigem a mobilização de seus conhecimentos matemáticos e pedagógicos, confronte suas crenças e concepções e desenvolva autonomia para tomar decisões (Rodrigues; Cyrino, 2024).

É sob esse cenário que o presente trabalho se constitui em um portfólio de aprendizagem (Villas Boas, 2013) que foi construído pela primeira autora como autorreflexão sobre o seu processo de formação para a docência. Este trabalho ocorreu na última disciplina de ECS, intitulada pela Universidade como Prática de Docência em Matemática III e foi conduzida pelas professoras Tania Teresinha Bruns Zimer, Ettiène Cordeiro Guérios e Eduarda de Almeida Gomes Bernardo no primeiro semestre de 2025.

O objetivo do portfólio de aprendizagem, nesta disciplina, constituiu-se como um movimento de reflexão e autoanálise sobre a trajetória de formação para a docência. Assim, a primeira autora escolheu apresentar os passos dessas reflexões juntamente com os momentos em que houve a mobilização de sua IP, convidando os leitores para uma dança. Este processo foi organizado em blocos temáticos: i) primeiras percepções; ii) as características do ritmo; iii) os primeiros passos; iv) as práticas; v) erros e acertos; e vi) minha vez de dançar. Ao seguir os passos do portfólio permite-se registrar desde o encantamento inicial com a profissão, ao retornar às primeiras vivências da graduação com a prática docente, até a autonomia no planejamento e na aplicação das aulas.

O portfólio construído nesta disciplina foi organizado a partir da metáfora da dança, aqui compreendida como movimento, ritmo e expressão. Essa escolha não foi apenas estética, mas formativa: assim como aprender a dançar exige observar, ensaiar, errar e ajustar, a docência em matemática também se constitui em um processo complexo, temporal, dinâmico, experiencial e em movimento.

Portanto, a construção desse trabalho contribuiu significativamente para a compreensão da Identidade Profissional docente da primeira autora como (futura) professora que ensina matemática. Ao revisitar suas experiências, refletir sobre suas ações e projetar caminhos para a prática, percebeu-se que a Identidade Profissional está em constante construção e transformação, sendo moldada pelas interações, reflexões e escolhas realizadas no exercício da docência.

Referências:

CYRINO, M. C. C. T. Ações de Formação de Professores de Matemática e o Movimento de Construção de sua Identidade Profissional. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-26, 11 ago. 2021.

CYRINO, M. C. C. T. Identidade Profissional de (futuros) Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 24, 31 dez. 2017.

MARCELO, C. Prólogo. In: MARCELO, C. et al. (Eds.). **Programas de apoio e indução ao professor iniciante**. São Paulo: Annablume, 2022. p.13-15.

RODRIGUES, A. L.; CYRINO, M. C. C. T. Movimento de constituição da identidade profissional de futuros professores de Matemática no âmbito do Pibid e do Estágio Curricular Supervisionado. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 26, n. 1, p.237-258, 2024.

VILLAS BOAS, Benigna M. de Freitas. **Portfólio, avaliação e trabalho pedagógico**.
3. ed. Campinas, SP: Papirus, 2013

Geometria esférica no ensino médio: uma proposta didática com GeoGebra para análise de projeções cartográficas

Vinicius da Silva Kich¹

viniciusdskich@gmail.com

Fernando Yudi Sakaguti (Orientador)¹

fernando.sakaguti@unespar.edu.br

Ricardo Paleari da Silva (Coorientador)¹

ricardo.paleari@unespar.edu.br

¹Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) — Campus Paranaguá

Palavras-chave: Geometria Esférica, Educação Matemática, GeoGebra.

Resumo:

O declínio do ensino de geometria no Brasil tem sido amplamente documentado por pesquisadores como Pavanello (1993) e Lorenzato (2006), que alertam para o comprometimento do desenvolvimento pleno do pensamento matemático. Neste contexto, o presente trabalho apresenta uma aplicação prática da Geometria Esférica no Ensino Médio, utilizando o GeoGebra para análise de projeções cartográficas e suas distorções. O objetivo é mostrar como conceitos não-euclidianos podem ser abordados de forma acessível, promovendo reflexão crítica sobre representações do mundo.

A pesquisa, de natureza qualitativa e exploratória, foi desenvolvida em três fases: fundamentação teórica, desenvolvimento de construções no GeoGebra e análise de viabilidade pedagógica. A metodologia baseou-se na construção dinâmica da projeção estereográfica e na comparação quantitativa de distorções cartográficas entre diferentes sistemas de projeção.

Para a análise técnica, foi construída uma circunferência de raio 5 com centro em (0,1), representando uma seção meridiana da Terra como mostra a figura 1. O Polo Norte foi definido no ponto (0,6) e uma reta horizontal tangente ao Polo Sul funcionou como plano de projeção. Esta construção permitiu visualizar dinamicamente como pontos da superfície esférica são mapeados no plano, revelando o padrão não-linear característico da projeção estereográfica. Para fundamentar matematicamente os conceitos de geometria esférica e projeção estereográfica, apoiamos-nos em Carmo (2005), cuja obra é referência clássica na área.

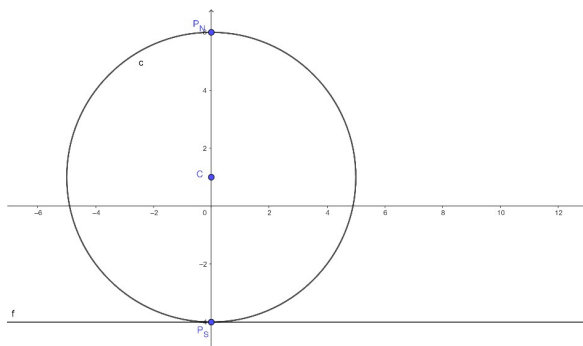


Figura 1: Setup da projeção estereográfica no GeoGebra com círculo meridiano e plano de projeção.

A análise quantitativa de distorções foi realizada comparando dois arcos de 30° : um próximo ao Polo Sul (-60° a -30°) e outro próximo ao Polo Norte (30° a 60°). Ambos os arcos possuem comprimento idêntico de 2,62 unidades no círculo original, calculado pela fórmula $l=r\cdot\theta=5\cdot(\pi/6)$. Entretanto, após a projeção estereográfica, os segmentos resultantes apresentaram comprimentos drasticamente diferentes: 3,09 unidades para o arco próximo ao Polo Sul e 20 unidades para o arco próximo ao Polo Norte.

Estes resultados mostram quantitativamente como a projeção estereográfica amplifica regiões próximas ao Polo Norte em aproximadamente 6,5 vezes, enquanto comprime levemente as regiões próximas ao Polo Sul. Este fenômeno explica matematicamente por que projeções como a de Mercator distorcem o tamanho de territórios polares como a Groenlândia.

A aplicação cartográfica foi desenvolvida através da comparação entre diferentes projeções do mundo utilizando mapas de Mercator, Robinson e Winkel-Tripel inseridos no GeoGebra. A análise das áreas da Groenlândia e África revelou distorções significativas: enquanto na projeção de Mercator a Groenlândia parece visualmente maior que a África, as medições no GeoGebra confirmaram que a África possui área aproximadamente 14 vezes maior (30,2 milhões km^2 contra 2,2 milhões km^2).

A proposta didática estruturada em três módulos apresentou viabilidade técnica, curricular e pedagógica. O GeoGebra mostrou-se uma ferramenta eficaz para tornar conceitos abstratos da geometria esférica acessíveis ao ensino médio, permitindo construções dinâmicas e medições precisas que facilitam a compreensão das propriedades não-euclidianas.

Além dos aspectos técnicos, a abordagem promove uma perspectiva crítica alinhada aos princípios da Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2000). Os estudantes são convidados a questionar: "Qual é a 'verdade' em um mapa? Quem decide como o mundo é representado?" Esta reflexão contribui para desnaturalizar representações cartográficas, mostrando que não existe uma única forma "correta"

de representar o mundo, mas escolhas que envolvem compromissos entre fidelidade geométrica e objetivos práticos.

Como contribuições principais, destacam-se: (a) apresentação prática da viabilidade de integrar geometria esférica ao currículo do ensino médio; (b) desenvolvimento de metodologia tecnológica para análise de projeções cartográficas; (c) quantificação de distorções geométricas através de software livre; e (d) promoção de interdisciplinaridade entre matemática, geografia e pensamento crítico.

As perspectivas futuras incluem aplicação piloto em turmas reais para validação empírica da proposta, desenvolvimento de materiais complementares para formação docente e ampliação da abordagem para outras aplicações da geometria esférica como navegação e astronomia. A proposta representa um passo concreto na renovação do ensino de geometria, oferecendo alternativas tecnológicas e críticas para a educação matemática contemporânea.

Referências:

- [1] LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** Campinas: Autores Associados, 2006.
- [2] PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil.** Campinas: UNICAMP, 1993.
- [3] CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana.** Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [4] SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica:** incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2000.

Investigação Matemática com estudantes do Ensino Fundamental: uma experiência com Medidas de Tendência Central na Eletiva de Exatas

Wanderson dos Santos Rodrigues¹

wandersonrodrigues@alunos.utfpr.edu.br

Dra. Mirian Maria Andrade González (orientadora)²

miriangoncalvez@utfpr.edu.br

^{1,2}Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Curitiba

Palavras-Chave: Educação Básica, Educação Estatística, Metodologia.

Resumo: Este trabalho objetiva socializar uma experiência vivenciada por um estudante de Licenciatura em Matemática envolvendo uma ação desenvolvida no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), que teve como foco a utilização da Investigação Matemática para a revisão dos conceitos de Medidas de Tendência Central. A ação foi realizada na Eletiva de Exatas com um oitavo ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual João Bettge e, buscou-se analisar como a metodologia contribuiu para a revisão e os estudos dos conceitos matemáticos.

A Investigação Matemática tem o intuito de promover a autonomia e o protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), ao invés dos estudantes receberem apenas as informações, eles são motivados a elaborar questionamentos, projetar hipóteses e desenvolver experimentos, gerando engajamento e desenvolvimento de competências. Desta forma, a metodologia visa promover a colaboração e o trabalho em equipe, encorajando os estudantes a debaterem ideias, compartilharem percepções e problematizar conceitos, gerando um ambiente de aprendizagem colaborativa.

A metodologia de Investigação Matemática tem ganhado destaque nas discussões sobre ações pedagógicas envolvendo o ensino da Matemática e práticas correlatas. Segundo Vieira, Silva e Possamai (2023), diferentemente do ensino matemático tradicional, na qual é centrada na memorização e reprodução de fórmulas, a abordagem investigativa propõe uma postura ativa do estudante, na qual ele passa a ser o protagonista na ação. Ao incentivar a formulação de hipóteses, a exploração de estratégias e o compartilhamento de resultados, a Investigação Matemática tende a favorecer uma aprendizagem contextualizada ao estudante.

¹ Graduando em Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba. Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência de Matemática.

² Doutora em Educação Matemática. Docente do Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba. Coordenadora de Área do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência de Matemática.

As Medidas de Tendência Central (MTC) são conteúdos presentes em documentos curriculares e possuem tópicos importantes para compartilhar em sala de aula, pois vários conceitos podem ser mobilizados e contribuem para o desenvolvimento do letramento estatístico. Para Figueiredo (2020), a média, a moda e a mediana, são itens necessários para representar conjuntos de dados, auxiliando os estudantes a compreenderem as informações em movimentos de pesquisas, ampliando a capacidade de analisar dados do cotidiano. A aprendizagem das MTC precisa ser pensada de forma interativa, valorizando a construção do saber através de situações práticas envolvendo coleta e organização de dados contextualizados.

No segundo semestre de 2023, foi desenvolvido no PIBID de Matemática uma situação de ensino conduzida por um Licenciando em Matemática no Colégio Estadual João Bettega. Para o planejamento, o estudante de Iniciação a Docência realizou reuniões com a professora supervisora para definir a turma, a temática e a metodologia envolvendo a ação a ser elaborada baseada na observação da prática docente. Após verificarem, foi selecionada uma turma da Eletiva de Exatas composta por estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental para trabalhar conceitos de MTC através de uma dinâmica envolvendo a Investigação Matemática.

A dinâmica teve como objetivo solucionar situações em diferentes contextos envolvendo os cálculos e as interpretações das MTC, especialmente a média, a moda e a mediana, focando nas estimativas de dados e informações matemáticas. Nesta situação, os estudantes da Eletiva de Exatas (Unidade Curricular de livre escolha do estudante no semestre que possibilita experiências de temas focados nas Ciências Exatas) estariam elaborando, conduzindo e analisando tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas para preparar e compartilhar relatórios em meios de divulgação. A dinâmica ocorreu em duas tardes e foi desenvolvida na sala ambiente de Matemática, com o acompanhamento da professora supervisora.

No primeiro dia da dinâmica, o estudante do PIBID apresentou a proposta na Eletiva, destacando que os participantes atuariam como pesquisadores em um ambiente de investigação. Com o auxílio da televisão da sala, foi iniciada a leitura de uma situação que possuía uma história fictícia do cotidiano e que norteariam as ações nos próximos passos. Organizados em cinco grupos, cada um recebeu temas variados (esporte, filme, animação etc.) e, a partir dos quais era preciso elaborar questões instigantes para elencar o perfil da turma. Após responderem circularmente às perguntas, e com o compartilhamento de novos dados sobre a história fictícia, os registros foram socializados e recolhidos para a continuidade no encontro seguinte.

No segundo dia, foi feita uma introdução aos conceitos de Estatística, com ênfase no uso de gráficos e tabelas para a organização e interpretação de dados. Em seguida, as respostas dos grupos foram transformadas em gráficos de barras, setores e linhas, que serviram de base para o desenvolvimento dos conceitos de média, moda e mediana. Cada grupo produziu um relatório dos dados coletados e analisados com a intenção de socializar as informações e que visava concluir a tarefa envolvendo a história fictícia. O material resultante na ação foi transformado em portfólio e foi apresentado na Culminância das Eletivas no final do semestre.

Portanto, na situação de ensino foi possível observar como a Investigação Matemática contribuiu para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, leitura e interpretação crítica dos dados desenvolvidos em sala de aula. Por meio da dinâmica contextualizada, em que os estudantes atuaram como pesquisadores, elaborando e executando questionários, construindo gráficos e redigindo relatórios, o ensino das MTC passou a estar ancorado em situações próximas da realidade dos participantes. A análise de dados sobre o perfil da turma despertou interesse e participação, possibilitando a apropriação de conceitos matemáticos de forma ativa.

Referências Bibliográficas

FIGUEIREDO, H. A. **Construção do conhecimento de Medidas de Tendência Central com o Ensino Fundamental**: reflexões sobre uma Sequência Didática. 91 f. Dissertação (Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/11667>. Acesso em: 12 ago. 2025.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

VIEIRA, R. P.; SILVA, V. C.; POSSAMAI, J. P. Metodologia de Investigação nos anos iniciais: tarefas investigativas em conteúdos matemáticos. **Boletim Online de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 1, p. 1-15, 2023. Disponível em: <https://periodicos.udesc.br/index.php/boem/article/view/18435/16454>. Acesso em: 12 ago. 2025.

Levantamento das definições de pensamento algébrico em produções acadêmicas

Andressa Balestrin Dasenbrock¹

*andressa.dasenbrock@ufpr.br*¹

Isabele Andrade Vichinieski¹

*isabele.vichinieski@ufpr.br*²

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)

*gabriel.santos22@gmail.com*³

^{1,2,3} Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, pesquisa bibliográfica, aritmética generalizada, pensamento funcional, modelação.

Resumo:

Essa pesquisa tem como principal objetivo caracterizar os aspectos de pensamento algébrico estabelecidos por Blanton e Kaput (2005). Para eles, o pensamento algébrico

[...] é um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso da argumentação, e as expressam de maneiras cada vez mais formais e adequadas à idade (Blanton; Kaput, 2005, p. 413, tradução nossa).

De acordo com Lins e Gimenez (1997, p. 137), “a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade”. Nesse sentido, para os autores, pensar algebricamente corresponde a um processo de produção de significados para a álgebra. Radford (2006 apud Almeida; Santos, 2017) destaca que não existe um consenso quanto à definição de pensamento algébrico, possivelmente por abranger uma ampla gama de objetos e processos, bem como diferentes formas de manifestação. Assim, evidencia-se a necessidade de estudos que identifiquem elementos capazes de contribuir para uma compreensão mais abrangente desse conceito.

Blanton e Kaput (2005) ressaltam que o pensamento algébrico pode se manifestar de diversas formas, entre as quais destacam:

- (a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
- (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);

¹ Bolsistas do programa PET Matemática

Apesar das definições sintéticas apresentadas pelos autores, observa-se a importância de aprofundar a investigação sobre como esses aspectos se manifestam nas produções acadêmicas e de que maneira podem orientar o ensino de álgebra desde os anos iniciais.

Para a realização da pesquisa, foram coletados artigos, dissertações e teses disponíveis no Portal de Periódicos da Capes, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Em cada repositório, utilizaram-se como termos de busca as expressões “aritmética generalizada”, “pensamento funcional” e “‘modelação’ and ‘pensamento algébrico’”. Após a exclusão de textos repetidos ou indisponíveis, contabilizaram-se 46 trabalhos. Cada um deles foi analisado com o objetivo de identificar possíveis definições relacionadas aos três aspectos pesquisados. Os trechos que apresentavam características ou conceitos relevantes foram organizados em um quadro de definições e, posteriormente, agrupados segundo suas semelhanças.

Os resultados da pesquisa mostram que a aritmética generalizada, seguindo as definições encontradas, pode ser manifestada a partir de indícios como o tratamento algébrico de situações do cotidiano, a construção e descoberta de sequências numéricas e geométricas, bem como a comparação entre expressões numéricas e padrões geométricos. Além disso, envolve a utilização de variáveis e símbolos para generalizar casos particulares, a generalização das propriedades das operações e a compreensão do número como elemento generalizado, valorizando sua estrutura em detrimento do valor específico. Também se expressa na interpretação da igualdade como uma relação entre quantidades, na determinação e manipulação de termos desconhecidos em uma igualdade, na adoção de cálculos aritméticos escritos e mentais, e na produção de diferentes significados para uma mesma expressão numérica.

Em relação ao pensamento funcional, pode ser manifestado por indícios como a generalização de quantidades, padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais, a investigação de regularidades e o desenvolvimento de regras para explorar relações recursivas, bem como a generalização de relações por meio de diferentes representações e funções. Também se evidencia na representação e resolução de problemas, no uso de símbolos para modelar situações, na simbolização de quantidades e na representação gráfica de dados. Além disso, manifesta-se na previsão de resultados desconhecidos a partir de informações disponíveis, nas operações com expressões simbólicas, na descrição da variação numérica em determinados domínios e no reconhecimento da dependência entre grandezas variáveis.

Por fim, a modelação pode ser identificada pela generalização de regularidades em situações do dia a dia, ainda que essas regularidades não sejam o foco principal, assim como pela capacidade de expressar e formalizar generalizações. Também se manifesta na representação de diferentes situações em um contexto algébrico e no

uso de expressões, equações, inequações, sistemas, funções e gráficos para interpretar e resolver problemas tanto da matemática quanto de outros domínios. Além disso, envolve a construção de modelos matemáticos que revelem as relações propostas nas informações de um problema e a análise crítica desse processo por meio da justificação, prova e teste de conjecturas.

Dessa forma, evidencia-se a relevância de estudos que aprofundem a compreensão e a sistematização das caracterizações do pensamento algébrico, considerando a diversidade de definições encontradas e a complexidade do conceito. Tais compreensões podem favorecer o ensino de álgebra desde os anos iniciais e orientar tanto professores quanto pesquisadores da área.

Referências:

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Câmara dos. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p. 34-60, 2017.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Washington, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

CANAVARRO, Ana Paula. O Pensamento Algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. São Paulo: **Quadrante**, XVI, n. 02, p. 81-118, 2007.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade.; OLIVEIRA, Hélia Margarida de. Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, Rio Claro, São Paulo, v. 24, n. 38, p. 97-126, 2011.

KAPUT, James J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Ed.). Algebra in the early grades. New York, NY: Lawrence Erlbaum, 2008. p. 5-17.

LICHTI, M.; ROTH, J. Functional thinking — a three-dimensional construct? **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 40, p. 169–195, 2019.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da Escola Média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

Ludicidade e Aprendizagem Matemática: Experiências do PET-MAPE no Ensino Fundamental

Anita Castro Silva¹

*anitaccsilva2002@gmail.com*¹

Edimara Pereira Machado²

*edipereira.mel@gmail.com*²

Ana Lara do Nascimento Schimanski³

*analaraschimanski@gmail.com*²

Liceia Alves Pires (Orientadora)

*Liceia.pires@unespar.edu.br*³

Danielle Marafon (Coorientadora)

*danielle.marafon@unespar.edu.br*³

¹Universidade Estadual do Paraná 1

²Universidade Estadual do Paraná 2

³Universidade Estadual do Paraná 3

Palavras-chave: Ludicidade, Ensino de Matemática, Formação de Professores.

Resumo:

O ensino da Matemática no Ensino Fundamental é um campo repleto de desafios, que envolvem tanto a motivação quanto a aprendizagem dos estudantes. Muitas vezes, os conteúdos são trabalhados de forma descontextualizada, reforçando práticas centradas na repetição de exercícios e na memorização de fórmulas. Essa abordagem tende a afastar os alunos do processo de construção do conhecimento, limitando a compreensão da Matemática como ferramenta social.

O Programa de Educação Tutorial – Matemática e Pedagogia (PET-MAPE), vinculado à UNESPAR, propõe integrar os conhecimentos das licenciaturas em Matemática e Pedagogia, aproximando-os da realidade escolar. O projeto parte da premissa de que a Matemática não deve ser ensinada de maneira isolada, mas vinculada ao cotidiano, valorizando experiências significativas e inclusivas.

Metodologia

O projeto foi realizado em uma escola da rede estadual do município de Paranaguá, junto a turmas do 6º ano, as atividades foram elaboradas coletivamente

¹ Bolsista PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá.

² Bolsista PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá.

³ Bolsista PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá.

pelos bolsistas e desenvolvidas de forma colaborativa entre professores e acadêmicos dos cursos de Matemática e Pedagogia.

Foram propostas dinâmicas lúdicas que contemplaram:

- Jogo de charadas matemáticas: estruturado em uma narrativa com personagens fictícios, Nino e Nina, desafiando os alunos a resolverem problemas para avançar nas fases.
- Roleta interativa: organizada em formato de perguntas e respostas em equipes, estimulando o raciocínio lógico, a cooperação e o trabalho coletivo.
- Tabuada gigante: construída no quadro, em que os alunos posicionavam cartões numéricos nos resultados corretos, favorecendo a sistematização de cálculos básicos de multiplicação.

As observações e os registros dos encontros foram utilizados para analisar a participação, a motivação e as aprendizagens dos estudantes.

Resultados e Discussão

Durante a aplicação das práticas, verificou-se que os estudantes passaram a participar ativamente das atividades, superando a percepção inicial de que se tratava de um simples “reforço escolar”. As propostas despertaram entusiasmo, colaboração e maior disposição em aprender Matemática.

Os jogos estimularam a autonomia e possibilitaram que os alunos percebessem a disciplina como parte de seu cotidiano, em consonância com Lorenzato (2006), que afirma que o ensino de Matemática ganha relevância quando parte da realidade do estudante. Além disso, as atividades reforçaram a ideia de Machado (2014) de que a Matemática é fundamental para a formação integral, articulando raciocínio, análise e tomada de decisões.

A ludicidade mostrou-se proveitosa também na socialização entre os alunos, que encontraram apoio mútuo na resolução das tarefas, aproximando-se da perspectiva de Montessori (1965), para quem é necessário criar ambientes estimulantes e intencionais de aprendizagem.

Considerações Finais

As experiências do PET-MAPE evidenciam que as dificuldades em Matemática, muitas vezes, não se relacionam a limitações individuais, mas à ausência de práticas pedagógicas diversificadas e significativas. A inserção de atividades lúdicas possibilitou maior envolvimento dos alunos, promovendo aprendizagens contextualizadas e participativas.

Conclui-se que o projeto contribuiu não apenas para a aprendizagem matemática dos estudantes, mas também para a formação inicial dos licenciandos, fortalecendo a articulação entre universidade e escola e demonstrando o potencial da ludicidade como recurso pedagógico.

Referências:

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MACHADO, Nilson José. **Ensino de matemática: pontos e contrapontos**. São Paulo: Summus, 2014.

MONTESSORI, Maria. **Mente absorvente**. Rio de Janeiro: Portugália Editora, 1965.

Mapeamento da Produção Acadêmica em Educação Matemática Realística no Brasil

Andressa Balestrin Dasenbrock^{1*}

andressa.dasenbrock@ufpr.br¹

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)

gabriel.santos22@gmail.com¹

¹Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, mapeamento, Educação Matemática Realística.

Resumo:

Para a Educação Matemática Realística (RME), matemática é compreendida como uma atividade humana em constante construção, e não como um conhecimento pronto e acabado. Hans Freudenthal, principal idealizador da proposta, motivou-se por sua insatisfação com os currículos dos Países Baixos durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), surgido pela necessidade de reformulação do ensino de matemática na época da Guerra Fria. O MMM “pode ser definido como ‘uma abordagem ‘estruturalista’ que considera a matemática como centrada em estruturas básicas, dando ênfase ao estudo da matemática por si, sem uma preocupação com aplicações” (Silva, 2018, p. 20).

Atualmente, a estrutura da RME é fortemente influenciada pela concepção de matemática defendida por Freudenthal, que a entendia como uma disciplina conectada à realidade, próxima dos estudantes e relevante para a sociedade (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2001 apud Prestes; Buriasco, 2022, p. 170). Segundo Freudenthal, a

matemática é uma actividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita. Figura entre as primeiras actividades cognitivas conhecidas e foi a primeira disciplina a ser ensinada, mas evoluiu e transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua Filosofia e a maneira de ser ensinada. (Freudenthal, 1979, p. 321, apud Trevisan; Buriasco, 2015, p.169)

Desde a idealização da RME, pesquisadores de diferentes países têm investigado suas concepções e princípios, buscando formas de introduzi-los em sala de aula para romper com práticas tradicionais e promover um ensino mais formativo.

^{1*} Bolsistas do programa PET Matemática

Destaca-se a pesquisa de Ferreira et al. (2012), que elaborou um inventário das publicações sobre RME no Brasil e no exterior, identificando 53 publicações nacionais entre 1972 e 2010, distribuídas entre teses, dissertações, artigos em periódicos e eventos.

Esta pesquisa tem como objetivo mapear os artigos publicados sobre Educação Matemática Realística no Brasil, fornecendo dados atualizados sobre a produção nacional e contribuindo para discussões sobre a implementação e desenvolvimento da RME. Para isso, foi construído o corpus a partir de textos disponíveis no Repositório CAFe, utilizando a busca por “Educação Matemática Realística”. Após a coleta, foi realizada uma filtragem para remover os textos repetidos, totalizando, ao final, 26 trabalhos.

As análises seguiram os procedimentos metodológicos do mapeamento elaborado por Rocha (2021), intitulado “Um mapeamento de publicações em Educação Matemática no Instituto Freudenthal de 2000 a 2019”, que analisou os resumos dos trabalhos produzidos no Instituto Freudenthal, agrupando-os de acordo com suas temáticas principais. Com base em Ferreira (2002), considera-se que os resumos fornecem informações sobre objetivo da investigação, procedimentos metodológicos, instrumentos teóricos, técnicas, sujeitos, tratamento de dados, resultados, conclusões e, por vezes, recomendações finais (Garrido, 1993 apud Ferreira, 2002).

Para o agrupamento dos 26 textos coletados, utilizou-se a estrutura de Rocha (2021), que organizou 13 agrupamentos e 68 unidades de análise a posteriori, consideradas a priori nesta pesquisa. As unidades que tiveram textos incluídos foram: (A01a) avaliação da aprendizagem; (A01c) instrumentos de avaliação informativos; (A04a) desenvolvimento de currículos; (A05a) design do ensino; (A05b) desenvolvimento e avaliação de trajetórias de aprendizagem; (A05c) estratégias de ensino; (A05h) uso de práticas autênticas no ensino; (A05i) modos e elementos do ensino; (A05j) ambientes de aprendizagem incorporados; (A13a) natureza das tarefas matemáticas; e (A13c) design de tarefas.

Dos textos agrupados, apenas 21 se encaixaram nessas unidades, pois cinco abordavam temas não contemplados no mapeamento de Rocha (2021). Para esses casos, foram criadas novas unidades: aspectos históricos e teóricos da RME; produções relacionadas à RME; e relações teóricas com a RME. Essa necessidade era esperada, já que esses textos tratam de temáticas específicas da RME que não são abordadas diretamente nas pesquisas do Instituto Freudenthal.

No que se refere ao ano de publicação, os textos encontrados abrangem o período de 2015 a 2024, sendo 2017 o ano com maior número de publicações, mostrando um aumento no interesse pela RME no Brasil. Em relação à autoria, Regina Luzia Corio de Buriasco (UEL) se destaca, com 14 trabalhos no total. Além disso, nota-se uma grande presença de autores vinculados ao GEPEMA (Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação), coordenado por Buriasco, o que demonstra a importância desse grupo para o desenvolvimento das pesquisas sobre RME no país.

Quanto às temáticas dos trabalhos, verificou-se que o agrupamento com maior número de textos foi “Ensino de Matemática (A05)”, indicando que as produções acadêmicas têm se dedicado principalmente às práticas em sala de aula. Destacam-se, principalmente, estudos que exploram a Educação Financeira integrada à RME e propostas didáticas contextualizadas. Em “Avaliação (A01)”, predomina-se o tema de prova-escrita-em-fases e seu desenvolvimento com diferentes alunos, enquanto no agrupamento “Tarefas Matemáticas (A13)”, predomina-se trabalhos que tratam de análises de enunciados de tarefas matemáticas na perspectiva da RME. Por fim, o agrupamento “Currículo (A04)” contou com apenas um trabalho, que propõe uma organização curricular alternativa para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, baseando-se em ideias da RME.

Dessa forma, conclui-se que o mapeamento oferece uma visão geral das produções acadêmicas sobre RME no Brasil, ressaltando a relevância do tema para a pesquisa em educação matemática e seu impacto na prática docente. Como possibilidade para trabalhos futuros, sugere-se a realização de um levantamento mais completo, incluindo dissertações e teses, buscando investigar com maior profundidade o que vem sendo estudado.

Referências:

FERREIRA, Norma Sandra Almeida. Pesquisas denominadas Estado da Arte: possibilidades e limites. **Educação e Sociedade**, Campinas, v. 1, n.79, p. 257-274, 2002.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves et al. Inventário de publicações a respeito da Educação Matemática Realística. In: V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis. **Anais [...]**. Petrópolis: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2012.

PRESTES, Diego Barboza; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Tarefa de livro didático de Matemática: Uma exploração sob o olhar da Educação Matemática Realística. **Vidya**, Santa Maria, v. 42, n. 1, p. 167-184, 2022

ROCHA, Fernanda Boa Sorte. **Um mapeamento de publicações em Educação Matemática no Instituto Freudenthal de 2000 a 2019. 2021**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

TREVISAN, André Luis; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação Matemática Realística: Uma Abordagem para o Ensino e a Avaliação em Matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, Florianópolis, v. 10, n. 2, p. 167-184, 2015.

Mapeamento de provas e cadernos de prova no repositório institucional da UFSC

Sibeli da Rosa da Rocha¹
sibarocha02@gmail.com¹
Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabriel.santos22@gmail.com²
^{1, 2} Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática; Avaliação Escolar; Índícios avaliativos; Documentos escolares; Repositórios Digitais.

Resumo:

A presente pesquisa é fruto do trabalho de conclusão de curso da estudante autora e caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Foram adotados como instrumentos de análise as provas, os cadernos escolares com provas e os cadernos de provas levantados e disponibilizados no Repositório de Conteúdo Digital (RDC) do GHEMAT Brasil² e no Repositório Institucional (RI) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O objetivo da pesquisa consiste em apresentar agrupamentos de provas, cadernos escolares com provas e cadernos de provas disponíveis nesses repositórios, sendo que os procedimentos metodológicos adotados foram realizados à luz da Análise de Conteúdo, conforme proposto por Bardin (2016).

Tanto o Repositório de Conteúdo Digital (RDC) do GHEMAT Brasil quanto o Repositório Institucional (RI) da UFSC reúnem uma grande quantidade de arquivos organizados em agrupamentos amplos, muitas vezes sem uma descrição mais detalhada. É nesse cenário, que esta pesquisa almeja construir uma base de dados que disponibilizará as fontes de forma organizada, pensada por e para um leitor/pesquisador da Avaliação Escolar em Matemática no contexto da Educação Matemática, visando facilitar o acesso e consequentemente a produção de trabalhos futuros que farão análises desses documentos. Essa iniciativa se justifica, sobretudo, pela constatação de que “no Brasil muito, senão quase tudo, está para ser feito quando se trata da pesquisa com e sobre cadernos escolares” (Rios et al., 2017, p. 49). Portanto, ao sistematizar essas fontes, amplia-se o acesso e consequentemente a possibilidade de análises mais profundas sobre práticas avaliativas no ensino de matemática ao longo da História, além de trazer subsídios para o debate acerca da constituição de fontes para a História da Avaliação Escolar.

Além disso, este trabalho também busca reconhecer o valor dos acervos digitais e o esforço dos grupos de pesquisa responsáveis pelo RDC e pelo RI, compreendendo que ações como esta podem apoiar a continuidade e o fortalecimento desses repositórios — especialmente considerando que, segundo Rios et al. (2017), o RDC ainda se encontra em fase de construção.

Outrossim, ao entender os cadernos escolares como fontes de pesquisas, emerge a importância de elaborar inventários que os agrupem por suas tipologias, tais como: por uso, temas ou conteúdo, por tipos de atividades, por período histórico, por influência de movimentos educacionais, por região, por nível de escolaridade,

¹ Bolsista CNPq de Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica

² Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (GHEMAT Brasil)

por grupo, seja familiar com cadernos de uma mesma família ou de um mesmo colégio ou professor. Reconhece-se que trabalhar com essas fontes de pesquisa, seja caderno escolares com prova, caderno de prova ou provas, possibilita estudar práticas didáticas, cultura escolar, organização do conhecimento e currículo e diferentes formas de ensinar matemática, articulando com outros documentos, como livros didáticos e documentos oficiais.

O levantamento realizado se divide em duas partes, em que a primeira parte foi realizada por meio da busca de cinco palavras-chaves, sendo estas: "caderno de prova", "livro de prova", "prova de matemática", "caderno de matemática" e "caderno escolar" no Repositório Institucional da UFSC. Na segunda parte do levantamento ocorreu por meio do mapeamento das coleções "Cadernos Escolares" e "Provas - Exames - Avaliações" do Repositório de Conteúdo Digital do GHEMAT, o qual é disponibilizado a partir do RI da UFSC. Após realizar as buscas da primeira parte do levantamento foram encontrados 18 resultados para a palavra-chave "caderno de prova" (no dia 07/04/2024), nenhum resultado para "livro de prova" (no dia 10/04/2024), 125 resultados para "caderno de matemática" (no dia 15/04/2024), 127 resultados para "caderno escolar" (no dia 15/04/2024) e 100 resultados para "prova de matemática" (no dia 26/04/2024). Já na segunda parte do levantamento, foram encontrados 375 resultados na coleção "Cadernos Escolares" e 151 resultados na coleção "Provas - Exames - Avaliações". Cabe destacar que já era esperado que alguns resultados encontrados na primeira parte do levantamento também fossem encontrados na segunda parte, visto que o RDC está contido no RI da UFSC. Dentre os resultados foram encontrados cadernos escolares, provas resolvidas sem nota, provas resolvidas com nota, provas sem resolução, cadernos e livros do professor, folhas de atividades, livros didático, artigos, documentos, trabalhos de conclusão de curso (TCC), dissertações e teses, alguns de Matemática e outros de disciplinas como Geografia, Física, Química, Música, Arte, etc.

Ao finalizar o processo de busca, iniciou-se o processo de exploração dos materiais. O primeiro passo foi baixar os arquivos e salvar no acervo do Laboratório de Estudos em Avaliação em Educação Matemática (LEAMat) da Universidade Federal do Paraná, sob responsabilidade do orientador do trabalho. Os documentos foram organizados seguindo a sequência de identificação (ID) do tipo `arquivo_autor_serieanal_ano_parte`, um exemplo é o arquivo `CadernoEscolar_ClaudioZardo_3ªclasse_1972_p1`, que representa que esse arquivo é a primeira parte do caderno escolar do estudante Claudio Zardo, utilizado durante o ano de 1972 para a 3ª classe. Em seguida, os documentos encontrados por meio de cada palavra-chave e em cada coleção foram organizados em uma planilha eletrônica, contendo as informações disponibilizadas pelos repositórios, tais como: título atribuído pelo repositório, autor identificado (estudante ou professor), ano de utilização do documento, resumo, descrição e URI³ do material. Além dessas informações, foram adicionados à planilha dados complementares obtidos durante a leitura e análise dos documentos, como: nome do estudante (quando o documento é de um estudante), nome do professor, nome da instituição de ensino, série escolar indicada no documento (série real), o link de acesso ao documento, o estado, além da identificação se os documentos possuem indícios de práticas avaliativas por parte do professor ou do estudante, dentre esses indícios podem estar intervenções do professor, notas cifradas, notas por conceitos, correções ou anotações que tragam um contexto de avaliação.

3 Identificador Uniforme de Recurso (URI) é uma sequência de caracteres que identifica um recurso específico na internet, como uma página web, imagem, vídeo ou serviço.

Durante esse processo foram identificados quantidade de arquivos por URI, pois cada URI poderia deter mais de um arquivo, de modo que cada arquivo também poderia conter um conjunto de documentos. Dessa forma, nos resultados parciais foram inventariados 576 URI de cadernos escolares, 1 URI de atividades escolares e 194 URI de provas. Após a identificação dos documentos duplicados, presentes nos dois repositórios, identificou-se que esses 771 URIs resultaram em 534 arquivos de cadernos escolares, 1 arquivo de atividades escolares e 656 arquivos de provas, isto é, 1191 arquivos que variam de 5 a mais de 500 páginas, sendo que alguns desses arquivos podem se configurar como um conjunto de documentos escolares.

Outra classificação realizada durante o levantamento é se o arquivo, seja caderno escolar com prova, caderno de prova, prova, tem ou não nota. Por isso, destaca-se que um trabalho será entendido com nota se tiver tanto as notas por conceito, sendo conceito A, B, C, D ou Ótimo, Bom, Regular e etc, como as notas cifradas, isto é, as notas representadas por um número. Visto que ambas, a nota por conceito e a nota cifrada, representam um julgamento baseado por critérios que podem estar bem estabelecidos e expostos ou não, ainda assim, o número irá apresentar uma conotação afetiva tão forte quanto a palavra (Barlow, 2006).

Por fim, tendo em vista que os resultados parciais desta pesquisa já foram apresentados em uma edição anterior do evento, neste trabalho busca-se expor os resultados finais. Para tanto, será apresentado a quantidade de documentos por arquivo e alguns dos agrupamentos realizados, tais como agrupamento pela distribuição dos documentos por regiões do Brasil, por períodos históricos, por autoria, por instituição de origem, entre outros.

Referências:

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luís, A. R.; Augusto P. São Paulo: Edições 70, 2016.

BARLOW, C. M. **Avaliação escolar: mitos e realidades**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

GHEMAT - BRASIL. O Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática. Disponível em: <https://ghemat-brasil.com.br/home/>.

GHEMAT - BRASIL. Repositório de Conteúdo Digital. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>.

RIOS, D. F.; BÚRIGO, E. Z.; FISCHER, M. C. B.; VALENTE, W. R. (orgs.). **Cadernos Escolares e a Escrita da História da Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. ISBN 978-8578615147.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. Repositório Institucional. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/>.

Modelagem Matemática nos Banheiros do Politécnico da UFPR: Análise Comparativa entre Papel Toalha e Secador de Ar Quente

Luís Gustavo Nadalin¹

luisgustavonadalin@gmail.com

Profa. Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora)²

paulacouto@ufpr.br

^{1,2}Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Papel Toalha, Secador de Ar Quente.

Resumo:

Este trabalho foi desenvolvido como parte das atividades da disciplina Tópicos de Educação Matemática voltada para a Modelagem Matemática na Educação Matemática, oferecida no primeiro semestre de 2025. A proposta, feita pela professora regente e segunda autora do estudo, tinha como objetivo incentivar os estudantes a aplicar os princípios da modelagem matemática na análise de problemas ambientais e de consumo do cotidiano. A partir dessa premissa, surgiu a ideia de investigar a viabilidade de uma solução mais sustentável para os banheiros da universidade.

Para Bassanezi (2002, p. 16), a modelagem matemática consiste na arte de "transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" [6]. Alinhado a essa concepção, este estudo foi motivado pela observação de secadores de ar quente em banheiros públicos na Europa e pela frequente ausência de papel toalha e inexistência de secadores nos banheiros do térreo do Prédio da Administração (PA) do Politécnico da UFPR. Assim, o presente trabalho aplica a modelagem para realizar uma análise comparativa entre papel toalha e secadores de ar quente nos banheiros masculino e feminino do térreo da PA, examinando os aspectos financeiros, higiênicos e ambientais. O objetivo final é fornecer subsídios para uma decisão informada [5], visando à otimização da gestão de recursos e da infraestrutura da universidade.

O estudo emprega uma modelagem matemática comparativa e de análise de custo-benefício, baseada em dados coletados e estimativas de mercado. Para o consumo de papel toalha, uma entrevista informal com a Sra. Rozana, funcionária da limpeza do Politécnico, revelou que, em média, o papel é repostado 4 vezes em cada um dos dois turnos de trabalho, totalizando 8 reposições diárias por suporte. Considerando que cada um dos dois banheiros (masculino e feminino) possui dois suportes, o consumo total estimado é de 32 pacotes de papel por dia.

A análise financeira considerou o custo de R\$ 4,00 por pacote de papel toalha [2] e uma média de compra de R\$ 500,00 por secador de ar quente². A tarifa de energia elétrica em Curitiba, utilizada para o cálculo do custo do secador, é de R\$ 0,570 por kWh[3]. O custo anual com papel toalha, considerando 30 semanas letivas e 5,5 dias úteis por semana, totaliza **R\$ 21.120,00**. Para o secador, o investimento inicial com dois aparelhos e instalação é de R\$ 1.400,00. Com base em uma estimativa de uso total de 2 horas diárias (considerando o fluxo de pessoas no prédio) e um consumo de 2kW por secador, o custo anual de energia é de R\$ 1.504,80. Adicionando uma manutenção anual estimada de R\$ 100,00, o custo operacional anual do secador é de **R\$ 1.604,80**. A decisão entre as duas opções vai além do aspecto financeiro, envolvendo considerações higiênicas e ambientais cruciais. A tabela abaixo resume a comparação entre as duas opções, considerando esses critérios.

Critério	Papel Toalha	Secador de Ar Quente
Financeiro	Custo Anual Estimado: R\$ 21.120,00. Alto custo operacional contínuo.	Custo Inicial: R\$ 1.400,00. Custo Anual Operacional Estimado: R\$ 1.604,80. Menor custo operacional após o investimento.
Higiênico	Considerado eficaz na remoção de bactérias por atrito. Estudos sugerem menor dispersão de germes [1,4], mas a falta de reposição ou descarte inadequado compromete a higiene e gera acúmulo de lixo.	Alguns estudos indicam que secadores a jato podem espalhar mais bactérias no ar e superfícies [1,4]. A ausência de contato físico é um benefício, mas manutenção e filtragem adequadas são cruciais.
Ambiental	Impacto elevado: produção envolve desmatamento, uso intensivo de água e energia. Descarte gera resíduos não recicláveis, contribuindo para aterros e emissões de metano.	Impacto médio a alto, dependendo da matriz energética. Consumo de eletricidade gera emissões, mas a vida útil longa e a ausência de resíduos diários reduzem o impacto. Descarte do aparelho (lixo eletrônico) é menos frequente.

Em síntese, os secadores de ar quente apresentam uma vantagem econômica significativa a longo prazo. Contudo, a escolha ideal para a UFPR deve considerar a dispersão de microrganismos (mitigável com manutenção rigorosa) e o impacto ambiental. A universidade poderia adotar secadores de ar quente como uma alternativa mais sustentável e economicamente viável, desde que implemente protocolos rigorosos de manutenção e limpeza. Uma solução híbrida, combinando

ambas as opções em diferentes áreas, pode ser explorada para otimizar benefícios e atender às preferências dos usuários.

Referências

[1] BBC NEWS BRASIL. **O grande debate na hora de enxugar as mãos: toalha de papel ou secador de mãos? É mais saudável usar toalhas de papel ou jatos de ar para secar as mãos?** [S. l.], 2019. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/vert-fut-46797887>. Acesso em: 29 jun. 2025.

[2] MERCADO LIVRE. **Papel Toalha Interfolha Branco Luxo Banheiro 1000 Folhas**. [S. l.], 2025. Disponível em: <https://www.mercadolivre.com.br/papel-toalha-interfolha-branco-luxo-banheiro-1000-folhas/p/MLB19943547>. Acesso em: 29 jun. 2025. Nota: O preço do secador de ar quente é uma média de mercado, não ligado a um único link do Mercado Livre.

[3] BLOG WEBAR. **Tarifa de Energia Elétrica Curitiba: Valor do kWh**. [S. l.], [20--?]. Disponível em: <https://blog.webar.com.br/tarifa-de-energia-eletrica-curitiba/>. Acesso em: 29 jun. 2025.

[4] G1. **É mais saudável usar toalhas de papel ou jatos de ar para secar as mãos?** Ciência e Saúde, [S. l.], 2014. Disponível em: <https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2014/11/e-mais-saudavel-usar-toalhas-de-papel-ou-jatos-de-ar-para-secar-maos.html>. Acesso em: 29 jun. 2025.

[5] O SECADOR de mão e o papel toalha. [S. l.: s. n.], 2009. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/21808/000720491.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 jun. 2025.

[6] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

Noções topológicas e identidade profissional docente: uma proposta de formação para professores que ensinam matemática nos anos iniciais

Natalia Chicora¹

nataliachicora@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)¹

gabriel.santos22@gmail.com

¹ Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, formação de professores que ensinam matemática, noções topológicas, identidade profissional docente, anos iniciais.

Resumo:

A formação de professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental exige reconhecer a complexidade do desenvolvimento profissional docente, entendido como um processo contínuo que articula saberes institucionais, disciplinares e experienciais construídos no exercício da profissão (Fiorentini, 2008). Essa compreensão amplia o olhar para além da “transmissão” de conteúdos e nos faz pensar nas dimensões da identidade profissional docente, que influenciam diretamente as escolhas e a forma como o professor se posiciona no cotidiano escolar (Cyrino, 2021; Kelchtermans, 2009).

No caso de professores dos Anos Iniciais, a docência da matemática é frequentemente atravessada por inseguranças e lacunas na formação inicial (Arcari, 2022; Deimling; Deimling, 2024), o que reforça a necessidade de ações formativas que conciliem a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, a negociação de significados e a reflexão crítica sobre a prática.

A presente proposta, que é um trabalho em desenvolvimento na disciplina de Monografia 2 sob orientação do professor Gabriel dos Santos e Silva, descreve uma sequência formativa hipotética, composta por 12 encontros, a ser aplicada com professores atuantes que ensinam matemática nos Anos Iniciais. A sequência tem como eixo central a exploração das noções topológicas (orientação, proximidade, limitação, ordenação, continuidade, simetria e relação de Euler) em conjunto com momentos de reflexão sobre a mobilização da identidade profissional dos docentes.

As noções topológicas são tomadas como ponto de partida por estarem presentes nos livros didáticos analisados previamente (Dante, 2017), mas ainda pouco exploradas em propostas de formação continuada (Cavalheiro, 2021). A seguir, será descrita a primeira versão de estruturação dos encontros da sequência.

O encontro introdutório tem como objetivo apresentar a proposta, organizar o cronograma, explicitar os procedimentos de registro (como entrevistas e diários reflexivos), promover um primeiro contato com os professores e realizar um mapeamento dos saberes dos participantes.

Em seguida, nos próximos dois encontros, abordam-se as noções de orientação e proximidade, a partir da construção de um glossário (Lange, 2024) para termos como “em cima”, “embaixo”, “perto”, “longe”, “frente”, “atrás” e “entre”, acompanhado de exemplos e ideias de como os professores apresentam esses termos em suas salas de aula.

O quarto e quinto encontros exploram a noção de ordenação, propondo que os professores descubram e discutam critérios usados por estudantes para ordenar um conjunto de objetos, por diferentes critérios, através da análise da produção escrita. Os participantes também resolvem tarefas similares, analisando suas próprias soluções e refletindo sobre as implicações para a prática docente.

Nos encontros seis e sete, trabalham-se as noções de continuidade e simetria. Inspirada em obras de Paulus Gerdes e na edição n.º 11 da revista *Scientific American*, a proposta é que os professores desenhem *sona* e discutam as propriedades encontradas nas criações. Além disso, o grupo produzirá, posteriormente, e de forma coletiva, uma nova *lusona* com uma narrativa que possa ser contada aos alunos dos Anos Iniciais.

O oitavo e nono encontros tratam da noção topológica “relação de Euler”, trazendo uma tarefa adaptada de Prestes (2013), que envolve problemas contextualizados a partir de dúvidas de alunos, estimulando a investigação coletiva e a análise da produção escrita dos estudantes.

Nos encontros dez e onze, a última noção a ser trabalhada é a limitação, utilizando a tarefa do Teorema das Quatro Cores (Souza, 2001) como ponto de partida. Após vivenciar a tarefa, os professores discutem como poderiam implementá-la em suas turmas, considerando materiais, possíveis adaptações e desafios esperados.

Por fim, o décimo segundo encontro é dedicado à síntese da sequência formativa apresentando um fechamento e convidando os professores a redigir uma narrativa sobre como vivenciaram a formação e quais elementos pretendem levar para sua prática, conectando-os à mobilização de sua identidade profissional docente e a eventuais mudanças percebidas.

Uma possível coleta de informações da aplicação da sequência poderia incluir entrevistas pré e pós-formação, diários reflexivos, registros fotográficos e audiovisuais dos encontros. A análise desse material pode ser feito de acordo com orientações da Análise de Conteúdo (Bardin, 2016), buscando identificar possíveis mobilizações de elementos da identidade profissional docente e de conhecimentos matemáticos por parte dos professores.

Espera-se que a proposta contribua para pensar ações formativas que superem o viés técnico-instrumental, fortalecendo a compreensão sobre como outras dimensões se entrelaçam no ensino de matemática, oferecendo subsídios para formações continuadas e, potencialmente, também para a formação inicial.

Referências:

ARCARI, F. M. **A formação matemática em cursos de pedagogia de instituições públicas de ensino superior do Estado de Santa Catarina**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Campus Erechim. Programa de Pós-Graduação em Educação, Erechim, 2022.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 1. ed. portuguesa / trad. Luís Antero Reto; Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

CAVALHEIRO, Y. B. **COMPREENSÕES E USOS DAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS DURANTE O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

CYRINO, M. C. C. T. Ações de Formação de Professores de Matemática e o Movimento de Construção de sua Identidade Profissional. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-26, 11 ago. 2021.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática: Ensino Fundamental - Anos Iniciais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

DEIMLING, N. N. M.; DEIMLING, C. V. Formação continuada de professores dos anos iniciais do ensino fundamental: a extensão universitária comprometida com a relação escola–universidade. **Ensino & Pesquisa**, União da Vitória, v. 22, n. 3, p. 49–64, ago./dez. 2024.

FIORENTINI, D. A pesquisa e as práticas de formação de professores de Matemática em face das políticas públicas no Brasil. **Bolema — Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 29, p. 43–70, 2008.

KELCHTERMANS, G. Who I am in how I teach is the message: self-understanding, vulnerability and reflection. **Teachers and Teaching: theory and practice**, v.15, n.2, p.257-272, 2009.

LANGE, T. C. G. F. **Ações Formativas para/na Formação Continuada de Professores que Ensinam Matemática nos Anos Iniciais para o Ensino de Geometria**. 2024. 160f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

PRESTES, D. B. **Proposta de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**. 2013. 39f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SOUZA, L. O Teorema das Quatro Cores. **Millenium - Journal of Education Technologies and Health**, n. 24, p. 121-151, 2001.

O júri simulado como estratégia para investigação da mecanização do pensamento algébrico no curso de matemática da UNESPAR – Campus Paranaguá

Gabriel Leal Kulik¹

gabrielealkgk@gmail.com

Ricardo Paleari da Silva (Orientador)²

ricardo.paleari@unespar.edu.br

^{1,2}Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranaguá

Palavras-chave: Júri simulado, Mecanização do ensino, Pensamento algébrico.

Resumo:

A pesquisa investiga as dificuldades no ensino e na aprendizagem da álgebra, em especial a resistência dos estudantes ao caráter abstrato da disciplina e a tendência à mecanização do raciocínio, isto é, a aplicação de procedimentos e fórmulas sem compreensão conceitual. Estudos anteriores (ALCÂNTARA et al., 2015; SANTOS; SANTOS-WAGNER, 2016) indicam que tais dificuldades estão relacionadas à forma como o ensino da Matemática é conduzido, muitas vezes priorizando a repetição de técnicas em detrimento da reflexão conceitual.

O estudo foca nos alunos do curso de Matemática da UNESPAR – Campus Paranaguá e propõe o júri simulado adaptado como estratégia metodológica para identificar e problematizar esses aspectos. Essa proposta encontra respaldo em Oliveira e Lopes (2023), que destacam o júri simulado como uma metodologia ativa capaz de promover maior envolvimento dos estudantes e favorecer o pensamento crítico. O objeto principal desse trabalho é analisar a influência da mecanização no pensamento algébrico durante a resolução de equações e compreender de que modo esse fenômeno se manifesta entre licenciandos em Matemática, comparando o desempenho dos alunos em várias fases de suas formações. A temática é relevante para a formação docente, pois futuros professores que não refletem criticamente sobre suas práticas tendem a reproduzir procedimentos mecânicos em sala de aula. Ao oferecer uma alternativa metodológica, o júri simulado, busca contribuir para a formação de docentes capazes de promover um ensino da álgebra mais consciente. A pesquisa adota abordagem qualitativa, com caráter exploratório e interpretativo. Participarão quatro turmas da UNESPAR – Campus Paranaguá cujos integrantes serão organizados em papéis: réus, advogados, jurados e juiz mediador. A atividade pedagógica será estruturada em etapas: apresentação do caso fictício, resolução da equação, defesa das soluções, debate crítico e emissão de veredito

fundamentado. As interações serão registradas em áudio e vídeo. A análise dos dados será feita a partir de critérios que consideram: presença ou ausência de análise de condições de existência, estratégias de resolução algébricas empregadas, verificação e validação das soluções, capacidade de generalização e reflexão sobre erros. A proposta está em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que reforça a importância de práticas que estimulem a argumentação e o raciocínio lógico. A equação proposta, $\sqrt{2x + 3} = -x$, foi selecionada por permitir observar quatro fases essenciais do raciocínio algébrico frequentemente negligenciadas:

- condições de existência;
- manipulação algébrica adequada;
- verificação (“prova real”) dos valores encontrados;
- formulação de generalizações ou conjecturas.

Esses elementos funcionarão como indicadores para avaliar se os estudantes realizam o processo de forma consciente ou se recorrem predominantemente a procedimentos automáticos. Mais do que aferir apenas o resultado final, o estudo pretende revelar como os alunos constroem (ou deixam de construir) um pensamento relacional e crítico em Matemática. Espera-se que o júri simulado favoreça a argumentação, o pensamento crítico, a tomada de decisão e a análise lógica, além de permitir ao professor identificar padrões de erro e orientar intervenções pedagógicas mais reflexivas. No trabalho que será apresentado, serão divulgados dados concretos e relevantes sobre a aplicação da dinâmica, a fim de entender se problemas de formação continuam ocorrendo durante a graduação ou se são sanados ao longo do tempo, o que ajudará o curso como um todo a ser repensado para estudar estratégias de como evitar esses problemas básicos de formação.

Referências:

- [1] de Alcântara, Lucy Aparecida Gutiérrez, et al. **“As estratégias de ensino júri simulado e Phillips 66 como facilitadores do ensino e da aprendizagem na disciplina de Matemática.”** *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco* – ISSN 2316-7297, 4.1 (2015).
- [2] dos Santos, Daniel Moreira, e Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner. **“Raciocínio proporcional em livros didáticos de Matemática: abordagem relacional ou procedimental?”** *VIDYA*, 36.1 (2016): 187–201.
- [3] Oliveira, Saulo Macedo de, e Rieuse Lopes. **“O júri simulado como metodologia ativa no curso de Licenciatura em Matemática.”** *Educação Matemática em Debate*, 7.13 (2023).
- [4] BRASIL. **“Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.”** (2018): 600–600.

O ensino do sistema monetário por meio de atividades lúdicas: uma experiência do projeto PET-MAPE nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Karolyna da Silva Batista¹

karolynasilva76@gmail.com

Keila Santos da Silva¹

keila.s.silva93@gmail.com

Tatiane dos Santos¹

tatianesantos6@yahoo.com.br

Liceia Alves Pires (Orientadora)²

Liceia.pires@unespar.edu.br

Danielle Marafon (Coorientadora)²

danielle.marafon@unespar.edu.br

^{1,2}Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – Campus de Paranaguá

Palavras-chave: Ludicidade, Ensino de Matemática, Aprendizagem Significativa.

Resumo:

O ensino da Matemática no Ensino Fundamental representa um desafio recorrente, especialmente no que diz respeito à motivação dos estudantes e à aplicação prática dos conteúdos escolares. Muitas vezes, os alunos se deparam com atividades descontextualizadas, o que resulta em desinteresse e dificuldades de aprendizagem (LORENZATO, 2006). Nesse sentido, a ludicidade apresenta-se como recurso pedagógico fundamental, pois favorece uma aprendizagem prazerosa, ativa e significativa (KISHIMOTO, 1994).

O Projeto de Educação Tutorial – Matemática e Pedagogia (PET-MAPE), desenvolvido em parceria com os cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, tem como propósito desenvolver práticas diferenciadas que aproximem a Matemática da realidade dos estudantes, explorando metodologias ativas por meio de jogos, brincadeiras e simulações. Este trabalho relata uma experiência desenvolvida com alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública municipal em Paranaguá, que utilizou a simulação de um supermercado fictício como estratégia para o ensino do sistema monetário.

Metodologia

A experiência foi realizada em uma escola pública municipal de Paranaguá, com turmas de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, envolvendo estudantes entre 9 e 11 anos. A atividade do supermercado fictício foi planejada coletivamente pelas bolsistas do PET-MAPE e contou com os seguintes recursos: embalagens de

¹ Bolsista PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá

produtos, etiquetas de preços baseadas em mercados locais e cédulas e moedas fictícias confeccionadas em papel.

Na dinâmica, cada aluno recebeu determinado valor em dinheiro fictício e foi convidado a realizar compras, calcular o valor total dos produtos escolhidos, verificar se dispunha de recursos suficientes e efetuar o cálculo de troco. As bolsistas atuaram como mediadoras, auxiliando no desenvolvimento dos cálculos, estimulando a reflexão crítica sobre as escolhas e incentivando os estudantes a planejarem suas compras.

O acompanhamento incluiu observações diretas, registros das interações e análise das estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução das situações propostas.

Resultados e Discussão

A prática demonstrou resultados positivos em diferentes dimensões. Os alunos apresentaram alto nível de participação e entusiasmo durante a atividade, o que contribuiu para a assimilação de conceitos matemáticos relacionados ao sistema monetário. Além de exercitarem cálculos básicos, os estudantes foram incentivados a tomar decisões, organizar financeiramente seus recursos e refletir sobre a importância do planejamento de gastos.

Alguns alunos inicialmente tentaram realizar compras sem efetuar os cálculos, apenas entregando as cédulas; porém, ao longo da dinâmica, com a mediação das bolsistas e a troca com os colegas, conseguiram superar essas dificuldades. Essa socialização favoreceu a aprendizagem colaborativa, conforme defendido por Vygotsky (1991), que destaca o papel da interação social no desenvolvimento cognitivo.

O caráter lúdico da atividade reforçou o papel do jogo como mediador da aprendizagem (KISHIMOTO, 1994), proporcionando um ambiente descontraído, mas com intencionalidade pedagógica. A vivência aproximou os conteúdos matemáticos da realidade cotidiana, evidenciando que a Matemática não se limita a abstrações, mas constitui-se como instrumento fundamental para compreender e atuar no mundo.

Considerações Finais

A experiência com o supermercado fictício, desenvolvida pelo PET-MAPE, evidencia que a ludicidade é uma estratégia significativa no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A proposta permitiu aos alunos vivenciarem conceitos curriculares de forma prática e prazerosa, contribuindo para a autonomia, o raciocínio lógico e a construção de significados relacionados ao sistema monetário.

Além disso, a atividade reforça a importância da integração entre a universidade e a escola básica na construção de metodologias inovadoras. Conclui-se que práticas pedagógicas lúdicas, quando planejadas com intencionalidade, são fundamentais para promover aprendizagens significativas e tornar a Matemática mais próxima da realidade das crianças.

Referências:

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 1994.

LORENZATO, S. **O ensino de Matemática em sala de aula**. Campinas: Autores Associados, 2006.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

O uso do Algeplan no desenvolvimento do pensamento algébrico de licenciandos surdos em Pedagogia: um estudo em andamento

Fernando Lucas Rosa Hernandez¹

fernando.hernandes.56@estudante.unespar.edu.br

André Guilherme Buss Lemes (Orientador)²

andre.lemes@unespar.edu.br

Silvia de Ross (Co-orientadora)³

silvia.ross@unespar.edu.br

¹Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Palavras-chave: materiais manipulativos, educação inclusiva, ensino de matemática.

Resumo:

Este trabalho, em fase de desenvolvimento, integra o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do curso de Licenciatura em Matemática da UNESPAR – Campus Paranaguá. A pesquisa investiga o uso do Algeplan como recurso pedagógico para a construção do pensamento algébrico por acadêmicos surdos.

Parte-se da premissa de que a educação inclusiva demanda metodologias acessíveis, especialmente no ensino da matemática, uma área marcada pela abstração. A questão norteadora é: Qual o impacto do uso do Algeplan na construção do pensamento algébrico em licenciandos surdos de Pedagogia?

A relevância do estudo reside na necessidade de formar futuros professores preparados para atuar em contextos de diversidade. Como aponta Mantoan (2003), inclusão não é apenas inserção física, mas transformação das práticas escolares para responder às necessidades individuais. Assim, o ensino de álgebra para estudantes surdos deve superar barreiras abstratas por meio de recursos visuais e manipulativos.

O presente estudo possui como objetivo geral analisar o impacto do uso do Algeplan na construção do pensamento algébrico de licenciandos surdos e, como objetivos específicos: identificar dificuldades e potencialidades do material; avaliar sua contribuição para a visualização de conceitos; investigar sua eficácia na retomada de conteúdos e propor novas estratégias pedagógicas inclusivas.

A pesquisa ancora-se em autores que discutem educação inclusiva (Mantoan,

¹Graduando do curso de Licenciatura em Matemática - UNESPAR - Campus Paranaguá.

²Professor do Colegiado de Matemática da UNESPAR - Campus Paranaguá.

³Professora do Colegiado de Pedagogia da UNESPAR - Campus Paranaguá.

2003; Declaração de Salamanca, 1994; Constituição de 1988; LDB/1996; Estatuto da Pessoa com Deficiência, Lei 13.146/2015). Para a perspectiva de aprendizagem, adota-se Vygotsky (1993), que enfatiza a mediação social e a linguagem – destacando o papel da Libras e dos recursos visuais/manipulativos. O pensamento algébrico é compreendido como habilidade que vai além da aritmética, envolvendo generalização, simbolização e múltiplas linguagens (Ponte, Branco e Matos, 2009; Kaput, 1999 apud Santos, 2016; Almeida e Santos, 2017). Nesse contexto, materiais manipuláveis como o Algeplan (Lorenzato, 2006) tornam-se essenciais para tornar o abstrato tangível. Além disso, a metodologia de Peer Instruction (Mazur, 2015) contribui para potencializar a aprendizagem colaborativa entre pares.

A investigação é de natureza qualitativa, em andamento, realizada com dois licenciandos surdos, identificados como *Alpha* e *Betha*. São analisadas suas experiências com o uso do Algeplan em atividades de álgebra, bem como seus relatos sobre a aprendizagem mediada por recursos visuais e pela interação entre pares.

Os resultados preliminares indicam que o licenciando *Alpha* reconhece o valor dos materiais manipulativos e destaca que a ausência deles no Ensino Médio gerou desmotivação. Desta forma, há uma sinalização de que o Algeplan representa uma oportunidade de ressignificação pedagógica. O licenciando *Betha* no uso do Algeplan enfatiza a importância da ludicidade e da instrução por pares, evidenciando como a mediação entre colegas contribui para superar dificuldades. Ambos os relatos reforçam a necessidade de combinar estratégias diversas, respeitando ritmos e perfis individuais, e confirmam a importância do Algeplan como recurso de mediação didática.

Os achados preliminares nos permitem inferir que o Algeplan é um recurso pedagógico relevante para a construção do pensamento algébrico de licenciandos surdos, promovendo autonomia, confiança e aprendizagem colaborativa em Libras. A pesquisa destaca a importância de integrar recursos inclusivos e metodologias interativas na formação de futuros professores, reforçando a construção de uma matemática acessível e significativa.

Referências:

- [1] ALMEIDA, Ana; SANTOS, Valdeni P. **O pensamento algébrico: uma nova perspectiva para o ensino de matemática.** 2017.
- [2] BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.** Brasília, DF: Senado Federal, 1988.
- [3] BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996.
- [4] BRASIL. **Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015.** Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Diário Oficial da União, Brasília, DF, 7 jul. 2015.
- [5] DECLARAÇÃO DE SALAMANCA. **Sobre princípios, políticas e práticas na área das necessidades educativas especiais.** Salamanca: UNESCO, 1994.

- [6] KAPUT, James J. **O pensamento algébrico em sala de aula.** In: SANTOS, Valdeni P. O pensamento algébrico em sala de aula. 2016.
- [7] LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática e os materiais didáticos manipuláveis.** Campinas: Autores Associados, 2006.
- [8] MANTOAN, Maria Teresa Égler. **Inclusão escolar:** o que é? por quê? como? São Paulo: Moderna, 2003.
- [9] MAZUR, Eric. **Peer instruction:** a revolução na sala de aula. Porto Alegre: Penso, 2015.
- [10] PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **O pensamento algébrico no currículo de matemática.** 2009.
- [11] VYGOTSKY, Lev Semiónovitch. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1993.

Práticas em Matemática nas Escolas: Experiências do PET-MAPE

Erik Carollo Martins¹

erikcarolomartins2009@gmail.com

Jéssica Souza Da Cunha¹

jessicaestudosprof@gmail.com

Stella Cristina Cordeiro Do Rosário¹

scordeirodorosario@gmail.com

Liceia Alves Pires (Orientadora)²

Liceia.pires@unespar.edu.br

Danielle Marafon (Coorientadora)²

danielle.marafon@unespar.edu.br

^{1,2}Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranaguá

Palavras-chave: Educação Matemática, Formação de Professores, Metodologias Ativas.

Resumo:

O ensino da Matemática na educação básica, historicamente, tem enfrentado inúmeros desafios que ultrapassam a simples transmissão de conteúdo. Entre eles, destacam-se a dificuldade de aprendizagem, a percepção da disciplina como abstrata e distante da realidade, bem como a dicotomia entre teoria e prática que ainda permeia muitas práticas escolares (D'Ambrosio, 2001; Lorenzato, 2006). Nesse cenário, torna-se essencial a busca por metodologias que possibilitem um ensino mais significativo, aproximando os estudantes do conhecimento matemático de forma contextualizada.

O Programa de Educação Tutorial – Matemática e Pedagogia (PET-MAPE) insere-se nesse contexto como uma proposta inovadora, articulando ensino, pesquisa e extensão para aproximar a universidade das escolas da educação básica. Sua proposta é reunir licenciandos em Matemática e em Pedagogia em práticas colaborativas, nas quais o conhecimento técnico e os aspectos pedagógicos se integram. Dessa forma, busca-se fortalecer tanto a formação inicial docente quanto a aprendizagem dos estudantes da educação básica.

Este trabalho tem como objetivo apresentar experiências desenvolvidas pelo PET-MAPE nas escolas, evidenciando práticas pedagógicas adotadas e seus impactos na aprendizagem dos alunos e na formação de futuros professores.

¹ Bolsista do Programa PET-Matemática da Unespar – Campus Paranaguá

As ações do PET-MAPE foram realizadas em uma escola da rede pública, no município de Paranaguá, envolvendo turmas dos 6 anos do ensino fundamental anos finais. Participaram licenciandos dos cursos de Matemática e de Pedagogia, orientados por docentes universitários.

As atividades foram organizadas a partir de três eixos principais:

1. Modelagem Matemática, situações cotidianas foram utilizadas como ponto de partida para explorar conceitos matemáticos, como análise de custos de produtos, interpretação de gráficos e resolução de problemas de consumo. Essa abordagem possibilitou aos alunos compreenderem a Matemática como uma ferramenta útil para decisões práticas do dia a dia.
2. Tarefas não rotineiras, inspiradas em propostas apresentadas no J3M, foram planejadas atividades que fugiam do padrão algorítmico, exigindo raciocínio lógico, argumentação e criatividade. Tais tarefas permitiram aos alunos explorarem múltiplas estratégias de resolução e desenvolver maior autonomia intelectual.
3. Intervenções pedagógicas conjuntas, o caráter interdisciplinar do PET-MAPE possibilitou a integração entre licenciandos de Matemática e Pedagogia, enquanto os acadêmicos de Matemática focavam em estratégias para o ensino dos conteúdos, os de Pedagogia contribuíam com metodologias lúdicas e didáticas adaptadas às dificuldades apresentadas pelos alunos atendidos no projeto.

O acompanhamento das atividades envolveu observações, registros em diário de campo, discussões coletivas e relatos dos participantes.

Resultados e Discussão

As práticas realizadas revelaram os seguintes impactos:

Aprendizagem dos estudantes da educação básica, as atividades contextualizadas geraram maior participação dos alunos, que passaram a perceber a Matemática como aplicável ao seu cotidiano. Em atividades de modelagem, por exemplo, muitos relataram compreender melhor conceitos que antes pareciam distantes. A participação em dinâmicas em grupo também favoreceu a cooperação, a argumentação e a troca de estratégias.

Formação inicial dos licenciandos, o contato com a realidade escolar permitiu que os futuros professores vivenciassem desafios como turmas heterogêneas, dificuldades de aprendizagem e a necessidade de adaptação constante das estratégias. Essa experiência contribuiu para o desenvolvimento de competências ligadas à didática, ao planejamento pedagógico e à gestão de sala de aula.

Articulação universidade-escola, a presença do PET-MAPE nas escolas aproximou a produção acadêmica da prática docente, fortalecendo o diálogo entre teoria e prática. Esse movimento mostrou-se fundamental para repensar o ensino de Matemática em bases críticas e contextualizadas, rompendo com o ensino exclusivamente tradicional e conteudista.

Esses resultados corroboram com perspectivas de autores como Skovsmose (2000), que defendem uma educação matemática crítica, capaz de integrar conteúdos e

contextos sociais. Além disso, reafirmam a importância de metodologias ativas, que contribuem para a construção de um aprendizado mais autônomo e significativo (Moran, 2018).

Considerações Finais

As experiências do PET-MAPE nas escolas reforçam a relevância de práticas pedagógicas que ultrapassem a lógica tradicional de transmissão de conteúdos. A integração entre licenciandos de Matemática e de Pedagogia mostrou-se um diferencial para o planejamento de atividades inovadoras, que consideram tanto a dimensão técnica da disciplina quanto os aspectos didáticos e metodológicos necessários à sua mediação.

Conclui-se que a proposta do PET-MAPE contribui para transformar a relação dos estudantes com a Matemática, promovendo aprendizagens mais contextualizadas e significativas. Do mesmo modo, fortalece a formação inicial de professores, preparando-os para lidar com os desafios da docência em contextos reais.

Assim, o trabalho evidencia que iniciativas interdisciplinares e de extensão universitária podem constituir caminhos profícuos para a melhoria do ensino da Matemática, articulando teoria e prática de forma crítica e colaborativa.

Referências:

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2001.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: uma visão sociopolítica da Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 2000.

Projeto Investigação SEED/PR: uma leitura pela abordagem do Ciclo de Políticas Públicas Educacionais

Laura Carolina Aymoré Ferrandin*

lauraaferradin@gmail.com¹

Pedro Dell'Agnolo Busarello†

pedrodellbusa@gmail.com²

Emerson Rolkouski (Orientador)

rolkouski@uol.com.br³

^{1,2,3}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Projeto Investigação, Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), Ciclo de Políticas Públicas Educacionais.

Resumo:

Este estudo pretende analisar o Projeto Investigação, uma iniciativa da Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED/PR), implementada no primeiro trimestre de 2025, com o objetivo de estimular o pensamento crítico e científico em estudantes do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental e da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio. A proposta tinha como foco central a melhoria do desempenho dos estudantes paranaenses no PISA (*Programme for International Student Assessment*), aplicado em maio do mesmo ano (PARANÁ, 2025). Para tanto, priorizou os componentes curriculares de Língua Portuguesa, Matemática e Biologia, desenvolvendo materiais pedagógicos próprios e ofertando formação aos professores, tanto online quanto presencial. A sustentabilidade foi adotada como eixo temático integrador, promovendo o trabalho interdisciplinar, a utilização de metodologias ativas e a busca pela elevação dos índices de proficiência (PARANÁ, 2025).

Dentre os elementos que motivaram a escolha do Projeto Investigação como objeto de estudo, destacam-se: a elaboração de um material pedagógico específico, cujo currículo difere das orientações da BNCC e do Referencial Curricular do Paraná; e a realização de aulas em duplas de professores, com carga horária dobrada. Para realizar a análise, compreendemos o Projeto como uma política pública educacional, visto que, conforme Azevedo (2003), “políticas públicas correspondem a tudo aquilo que um governo faz ou deixa de fazer, com seus impactos e omissões”. Assim, ao

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

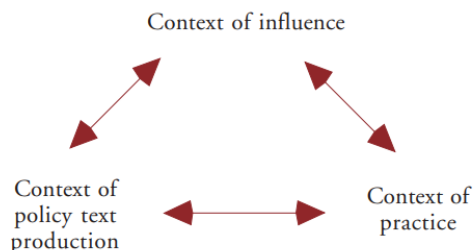
†Bolsista do Programa PET-Matemática.

ser concebido como ação estratégica para elevar o desempenho no PISA, o Projeto pode ser compreendido como uma política educacional com efeitos diretos sobre as práticas escolares e curriculares.

O PISA, coordenado internacionalmente pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e, no Brasil, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), é uma avaliação amostral aplicada trienalmente a estudantes de 15 anos. Seu objetivo é comparar, entre os países participantes, o nível de desenvolvimento de competências consideradas fundamentais no mundo contemporâneo. As provas concentram-se em três áreas, Leitura, Matemática e Ciências, sendo que, a cada edição, uma delas recebe maior ênfase. No caso do Brasil e do Paraná, os resultados têm mostrado desempenho inferior ao dos países da OCDE, ainda que o Paraná apresente médias um pouco superiores à nacional. Isso reforça a importância que o PISA adquiriu como dispositivo de influência sobre políticas educacionais, uma vez que seus resultados ranqueiam países e induzem governos a alinhar currículos e práticas escolares a suas demandas.

É nesse contexto que surge o Projeto Investigação, traduzindo localmente uma resposta aos resultados do PISA. Para analisar políticas como essa, o referencial teórico-metodológico adotado é o Ciclo de Políticas Públicas Educacionais, formulado por Stephen Ball e colaboradores. Esse modelo compreende a política não como um processo linear, mas como um ciclo constituído por três contextos principais e inter-relacionados, que podem ser vistos na Figura 1: influência, produção de texto e prática.

Figura 1: Contextos do processo de formulação de uma política



Fonte: Bowe, Ball e Gold, 1992, p. 20.

No contexto de influência, diversos atores sociais, políticos e econômicos disputam a definição de problemas e soluções para a educação. No caso do Projeto Investigação, evidencia-se a influência de organismos internacionais, em especial a OCDE, cujas avaliações induzem os governos a formular ações específicas para elevar seus indicadores. Além disso, questiona-se: quem participou, efetivamente, da decisão de criação projeto?; As escolas participaram dessa decisão?

No contexto da produção de texto, as ideias e disputas do campo da influência são traduzidas em documentos oficiais, materiais de apoio e discursos públicos que buscam legitimar a política perante diferentes audiências. No Projeto Investigação, isso ocorreu por meio da elaboração de materiais próprios, formações docentes e orientações didáticas, buscando alinhar a prática escolar às competências valorizadas pelo PISA.

Já o contexto da prática corresponde ao momento em que as políticas são efetivamente interpretadas, apropriadas e ressignificadas pelos profissionais da educação na escola. Nesse espaço, a política não é apenas implementada, mas recriada: professores, com suas histórias, valores e experiências, transformam os textos oficiais em práticas concretas, que podem reproduzir, modificar ou até resistir às intenções originais. Para este trabalho, a interpretação deste contexto se dará a partir de um formulário disponibilizado aos professores de um colégio da rede estadual de Curitiba, que participaram do projeto em 2025.

Nesse sentido, Bowe, Ball e Gold (1992), ressaltam que os profissionais não são meros executores, mas intérpretes ativos das políticas, podendo assumir diferentes posturas diante delas, desde a aceitação e conformismo até movimentos de resistência e adaptação. Para ilustrar esse processo, os autores recorrem à distinção de Barthes entre textos “*writerly*” (que convidam o leitor a ser coautor, participando ativamente da construção de sentido) e “*readerly*” (que limitam o papel do leitor a um consumidor passivo). Assim, compreender uma política pública como o Projeto Investigação exige analisar como seus textos foram lidos, apropriados e recriados pelos atores escolares.

Portanto, o Projeto Investigação constitui um exemplo de como avaliações internacionais, como o PISA, podem incidir diretamente sobre políticas públicas, induzindo mudanças curriculares e pedagógicas. Ao mesmo tempo, ao ser analisado pelo Ciclo de Políticas, evidencia-se que sua materialização depende não apenas das intenções governamentais, mas sobretudo das interpretações e práticas construídas pelos profissionais da educação em seus contextos de atuação.

Referências

- [1] AZEVEDO, Sérgio de. Políticas públicas: discutindo modelos e alguns problemas de implementação. In: SANTOS JÚNIOR, Orlando A. Dos (et. al.). **Políticas públicas e gestão local**: programa interdisciplinar de capacitação de conselheiros municipais. Rio de Janeiro: FASE, 2003.
- [2] BOWE, Richard; BALL, Stephen John; GOLD, Anne. **Reforming education & changing schools**: case studies in policy sociology. London: Routledge, 1992.
- [3] PARANÁ (Estado). Paraná fortalece preparação de professores para avaliação internacional de estudantes. **Secretaria da Educação do Paraná**, Curitiba, 11 fev. 2025. Disponível em: <https://www.educacao.pr.gov.br/Noticia/Parana-fortalece-preparacao-de-professores-para-avaliacao-internacional-de-estudantes>. Acesso em: 1 set. 2025.

Quem é Regina Buriasco, segundo o Google? Um levantamento de sua presença digital

Sibeli da Rosa Da Rocha¹
sibarocho02@gmail.com¹

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabriel.santos22@gmail.com²

^{1, 2} Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática; História da Educação Matemática; Regina Buriasco; Análise Bibliométrica; Presença Digital.

Resumo:

Regina Luzia Corio de Buriasco atua como pesquisadora na área de Avaliação em Educação Matemática, é bolsista de produtividade em pesquisa do CNPq (nível 2) e coordena o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA). Escolheu-se essa pesquisadora por sua ampla atuação nos debates sobre Avaliação da Aprendizagem e Educação Matemática, bem como pela influência de suas produções nas práticas pedagógicas, fomentando discussões acadêmicas e subsidiando reflexões de caráter político-educacional.

Assim, ao realizar um levantamento de caráter bibliográfico e bibliométrico, a proposta não se restringe a quantificar a produção de Regina Luzia Corio de Buriasco por meio de indicadores como número de publicações, citações e circulação em periódicos. Busca-se também interpretar qualitativamente os principais temas abordados e a relevância de suas contribuições. Nessa perspectiva, a pesquisa assume uma abordagem quali-quantitativa, com caráter interpretativo, tendo como propósito examinar a presença digital da pesquisadora a partir dos resultados obtidos no Google e no Google Acadêmico. A metodologia empregada foi orientada pelos princípios da Análise de Conteúdo, conforme Bardin (2016).

As buscas foram realizadas em duas plataformas, Google e Google Acadêmico. No Google, a busca “Regina Buriasco” retornou 101 resultados (09/05/2025), enquanto a busca “Regina Luzia Corio de Buriasco” retornou 87 resultados incluindo citações (19/06/2025). Já no Google Acadêmico, a busca “Regina Buriasco” apresentou 123 resultados, enquanto a busca “Regina Luzia Corio de Buriasco” apresentou 311 resultados incluindo citações (20/06/2025). Os resultados foram organizados em agrupamentos, considerando a natureza dos assuntos identificados.

A análise, de caráter quali-quantitativo, envolveu diferentes aspectos, como a quantidade de artigos publicados por ano, a quantidade de trabalhos completos em anais de eventos por ano, a quantidade de capítulos publicados por ano e o total dessas publicações anuais. Também incluiu a análise da quantidade de trabalhos por coautores, identificando os principais colaboradores da pesquisadora. Foram examinados os temas de pesquisa a partir das palavras-chave dos artigos, enumerando quantos trabalhos se relacionam a cada temática e destacando as principais áreas de investigação da pesquisadora. Além disso, foi considerado o alcance de sua produção científica por meio da análise dos eventos em que a

¹ Bolsista CNPq de Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica

pesquisadora participou e das revistas em que publicou, identificando as regiões do Brasil em que ela apresentou trabalhos, os principais eventos de sua trajetória e as revistas de maior destaque em suas publicações. Também foram contabilizados os orientandos de mestrado e doutorado ao longo dos anos, identificando a árvore genealógica acadêmica da pesquisadora e destacando quais orientandos também se tornaram seus coautores. Por fim, analisou-se o impacto de sua produção a partir do número de documentos que a citam e quais de suas obras são mais citadas.

Em suma, Regina Luzia Corio de Buriasco destaca-se como uma das pioneiras nas pesquisas sobre Análise da Produção Escrita no Brasil, ao mesmo tempo em que desempenhou papel de influência em áreas decisivas. Na década de 1990, integrou o Conselho Estadual de Educação do Paraná e sua atuação também se estendeu à formação de professores, especialmente no âmbito do programa Pró-Letramento em Matemática.

No cenário acadêmico, esteve presente em diferentes frentes de liderança e colaboração. Buriasco esteve ligada à criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) (Pereira, 2005), contribuiu para a consolidação da revista BOLEMA (Passos, 2009), e teve participação destacada na revista EMR (Santos et al., 2024). Ademais, integrou a Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM) (Rosa, 2019) e liderou no Grupo de Trabalho 8 (GT8 – Avaliação e Educação Matemática) da SBEM, criado durante o I SIPEM, em 2000, sob sua coordenação (Araújo, 2015).

Outro aspecto relevante de sua trajetória refere-se à participação em processos de avaliação de cursos e políticas educacionais. Atuou como parecerista na construção da Base Comum Curricular (BCC) e integrou comitês de assessoramento científico (Costa, 2022; Fratti, 2001). A pesquisadora também esteve entre os especialistas consultados em processos de definição de matrizes avaliativas nacionais, como o Saeb e os PCN (Búrigo, 2025). Essas experiências evidenciam a diversidade de sua trajetória, marcada pela pesquisa, pela docência, pela formação de professores, pela atuação em políticas curriculares e pela inserção em instituições científicas.

Para mais, sua atuação como professora e orientadora evidencia o compromisso com práticas de avaliação formativa e com a formação de novos pesquisadores. Outrossim, a avaliação constitui-se como um dos principais eixos de sua produção acadêmica, defendendo que a avaliação didática deve ser como uma prática de caráter democrático e investigativo, em que instrumentos, métodos e conteúdos se colocam a serviço da aprendizagem. Nesse âmbito, também merece destaque a elaboração do instrumento avaliativo Vaivém.

Dessa forma, a trajetória de Buriasco se consolida como um dos principais nomes da e na Educação Matemática brasileira, sobretudo relacionado à temática de Avaliação da Aprendizagem Escolar. Sua atuação ultrapassa a produção científica e se estende às dimensões institucionais, formativas e políticas, evidenciando um compromisso contínuo com uma Educação Matemática reflexiva, crítica, democrática e socialmente referenciada.

Referências:

ARAÚJO, A. F. de. Inventário de dissertações e teses com o tema avaliação em educação matemática publicadas no Brasil. In: CIBEM, 3., 2015, Belém. **Anais** [...]. Belém: CIHEM, 2015. p. 1–17.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BÚRIGO, E. Z. Escrutinando o instrumento: em questão, as provas de Matemática do Sistema de Avaliação da Educação Básica. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 39, e240162, 2025

COSTA, W. Currículo e suas características: o caso da Matemática de Pernambuco. **Seminário Temático Internacional**, [S. l.], v. 1, n. 1, p. 1–18, 2022.

FRATTI, R. G. **Conhecimento, currículo e política educacional**: a proposta de ensino de Educação Física para a escola pública do Paraná, Brasil, anos 90. 2001. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. DOI <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2001.17>

MIRANDA, C. de A.; SANTOS, T. S. dos; FERREIRA, L. Uma história da criação do curso de Matemática da UNESPAR – Campus de Campo Mourão. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 21, p. 160–183, 2021

PASSOS, M. M. **O professor de matemática e sua formação**: análise de três décadas da produção bibliográfica em periódicos da área de educação matemática no Brasil. 2009. 328 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru, 2009.

PEREIRA, D. J. R. **História do movimento democrático que criou a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM**. 2005. 261 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Orientadora: Maria Ângela Miorim.

ROSA, M. Por que Insubordinação Criativa na Educação Matemática?. **RIPEM**, Brasília, v. 9, n. 3, p. 1–4, 2019.

SANTOS, W. de S.; SOUZA, J. P. de A.; PESSOA, M. F.; DANTAS, S. E. de. O cenário da Educação Matemática pela EMR: uma análise através das redes de coautoria. **Educação Matemática em Revista**, [S. l.], v. 29, n. 84, p. 1–15, 2024.

SILVA, G. dos S. e; INNOCENTI, M. S.; ZANQUIM, J. A. B. Um estudo sobre intenções de intervenções feitas por uma professora em um Vaivém. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 19, n. Edição Especial, p. e022041, 2022.

Regina Buriasco e Avaliação: intersecções entre o vivido e o pesquisado, a partir da História Oral

Sibeli da Rosa Da Rocha¹
sibarocho02@gmail.com¹

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)
gabriel.santos22@gmail.com²

^{1,2} Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, História da Educação Matemática, Avaliação, História Oral.

Resumo:

Esta pesquisa define-se como qualitativa e de cunho interpretativo, tendo por objetivo investigar intersecções entre o vivido e o pesquisado pela pesquisadora Regina Luzia de Corio de Buriasco, a partir de narrativas criadas por meio de entrevistas que seguiram os pressupostos da História Oral.

Regina Luzia Corio de Buriasco é uma pesquisadora da área de Avaliação em Educação Matemática, bolsista de produtividade em pesquisa do CNPq (Nível 2) e coordenadora do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA). A escolha por essa pesquisadora justifica-se pela sua ampla participação em pesquisas sobre a Avaliação da Aprendizagem em Educação Matemática, pela influência que suas produções têm em práticas pedagógicas, fomentado discussões acadêmicas e subsidiado reflexões de natureza político-educacional por mais de duas décadas.

As entrevistas seguiram o modelo semiestruturado, orientadas por um roteiro de perguntas. Realizadas de forma virtual, conforme a disponibilidade da pesquisadora, foram gravadas em áudio e vídeo, por meio de plataforma de videoconferência. Cada gravação está armazenada em uma pasta do *Google Drive* e está passando pelo processo de transcrição e, em seguida, passará pelo processo de textualização e de cessão de direitos.

Durante as entrevistas, foram disponibilizadas um conjunto de fichas com temáticas a serem discutidas, tendo a depoente liberdade para escolher por onde iniciar e como conduzir a entrevista. As perguntas do roteiro foram utilizadas apenas em momentos pontuais, quando a pesquisadora não as abordou direta ou indiretamente, buscando-se, assim, interromper o fluxo narrativo o mínimo possível, mas garantindo que os temas previstos fossem contemplados. Entre as temáticas têm-se: Criação do Vaivém; Reunião preparatória TIMSS em 1991; Validação de Instrumentos no Chile em 1993; SAEB de 1993; Prova AVA-PR 1995-2002; Coordenação GT8 SBEM; Avaliação vivenciada na infância; Avaliação vivenciada na graduação e na pós-graduação; Suas práticas avaliativas ao longo de sua docência;

¹ Bolsista CNPq de Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica

concepções de avaliação durante a trajetória de pesquisadora; Influências da pesquisa nas práticas docentes; e Relação entre Avaliação e justiça social.

Referências:

GARNICA, A. V. M. Filosofia da educação matemática: algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa. In: BICUDO, Maria Aparecida V. (ed.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

GARNICA, A. V. M.; FERNANDES, D. N.; SILVA, H. da. Entre a Amnésia e a Vontade de nada Esquecer: notas sobre regimes de historicidade e história oral. **Bolema**, 25, n. 41, p. 213-250. Rio Claro (SP), 2011.

GARNICA, A. V. M. História oral em educação matemática: um panorama sobre pressupostos e exercícios de pesquisa. **História Oral**, v. 18, n. 2, p. 35-53, jul./dez. 2015.

Teoria da Objetivação e o papel do labor conjunto na formação de sujeitos críticos

Camilly Silva dos Anjos¹

camillyanjos@ufpr.br

Prof. M.e Edisio Alves dos Anjos (Orientador)²

edisioanjos@yahoo.com.br

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Teoria, Metodologia, Método, Objetivação, Labor Conjunto.

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo apresentar as ideias da **Teoria da Objetivação (TO)**, desenvolvida por Luís Radford para a Educação Matemática, teve seus primeiros trabalhos publicados na década de 1990, com a proposta de romper com concepções tradicionais de ensino e aprendizagem. Fundamentada no materialismo dialético e inspirada na perspectiva vygotskiana, a TO compreende a educação como um processo político, social, histórico e cultural (Radford, 2014). Nessa direção, o autor afirma que “[...] tal esforço visa a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos, capazes de se posicionar criticamente diante das práticas matemáticas constituídas histórica e culturalmente, ponderando e deliberando sobre novas possibilidades de ação e pensamento” (Radford, 2017). Seu grande objetivo é contribuir para a formação de cidadãos críticos e “desalienados”, capazes de atuar de forma reflexiva e ética na sociedade.

Sob a perspectiva da Teoria da Objetivação, a educação e a aprendizagem são concebidas como processos essencialmente coletivos, que se concretizam por meio da resolução conjunta de problemas, da discussão e do debate em sala de aula. Inspirado em Hegel, Radford (2017) compreende o trabalho conjunto como um movimento em que professores e alunos interagem para alcançar objetivos comuns, ao mesmo tempo em que se transformam e desenvolvem consciência crítica. Essa ideia surgiu do materialismo hegeliano, que acreditava que existe a construção mútua do ser e da cultura no trabalho conjunto.

Nesse sentido, a principal ferramenta proposta pela teoria é o **labor conjunto**, entendida como uma prática colaborativa em que o conhecimento é produzido por meio da interação, do diálogo e da partilha de significados. Longe de representar apenas a soma de esforços individuais, o labor conjunto constitui um espaço de construção coletiva do pensamento, no qual emergem cooperação, solidariedade e uma ética comunitária. Assim, cada participante assume responsabilidade pelo aprendizado coletivo, e ensino e aprendizagem deixam de ser atividades separadas, ocorrendo de forma simultânea em uma mesma prática compartilhada, na qual cada

sujeito desempenha um papel fundamental. Na figura seguinte, é apresentado um esquema sobre as fases do labor conjunto:



Figura 1 – Radford (2018)

Nesse contexto, ganham centralidade os conceitos de objetivação e subjetivação. A objetivação refere-se ao processo pelo qual os sujeitos se apropriam de saberes, práticas e significados culturais já existentes, tornando-os acessíveis e compreensíveis. Já a subjetivação diz respeito à transformação dos próprios sujeitos ao longo desse processo, uma vez que, ao interagir, interpretar e refletir, eles se constituem como indivíduos críticos, éticos e participativos. Assim, a aprendizagem não é apenas um acúmulo de conteúdos, mas um movimento dialético no qual o estudante se forma e se transforma, simultaneamente, como sujeito histórico e social.

A tão sonhada educação libertadora de Paulo Freire vira realidade quando o educando, transformado pelo saber edificado, deixa a ignorância e se liberta da alienação, ganhando voz e o direito de transformar a sociedade, encontrando nela o seu espaço.

Diante do exposto, a Teoria da Objetivação se apresenta como uma contribuição significativa para repensar os processos de ensino e aprendizagem na Educação Matemática. Ao propor o labor conjunto como prática central, evidencia-se que a formação do estudante ultrapassa a mera aquisição de conteúdos, tornando-se um movimento coletivo, ético e transformador. Nesse processo, a objetivação e a subjetivação se entrelaçam, possibilitando ao sujeito apropriar-se de saberes culturais e, simultaneamente, constituir-se como agente crítico e participativo. Assim, compreender e aplicar os princípios dessa teoria significa caminhar em direção a uma educação libertadora, que não apenas transmite conhecimentos, mas emancipa, promove consciência e contribui para a construção de uma sociedade mais justa e crítica.

Referências

BRIZUEÑA, T. M. D. G.; PLAÇA, J. S. V.; GOBARA, S. T. **A alienação escolar na perspectiva da teoria da objetivação: um olhar para o Ensino de Ciências.** *Ciência & Educação*, Bauru, v. 28, e22030, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1516-731320220030>.

FREIRE, P.; D'AMBROSIO, U.; MENDONÇA, M. **A Conversariam with Paulo Freire.** *For the Learning of Mathematics*, Canada, v. 17, n. 3, p. 7-10, nov. 1997. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/40248246>. Acesso em: 15 jul. 2024.

RADFORD, L. **A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática.** In: MORETTI, V. Dias; CEDRO, W. Lima (orgs.). *Educação Matemática e a teoria histórico-cultural*. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2017. p. 229-261.

RADFORD, L. **Teoria da Objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da Matemática.** 1ª ed. São Paulo: Editora da Física, 2021.

Um Olhar Para Inclusão Nos Cursos De Graduação: O Que Dizem Os Estudantes Surdos E Sua Intérprete?

Bárbara Caroline Zanetti Borkowski*
*barbarazanetti@utfpr.alunos.edu.br*¹

Mirian Maria Andrade Gonçalves
*miriangoncalvez@utfpr.edu.br*²

Marta Rejane Proença Filietaz
*martafilietaz@utfpr.edu.br*³

¹ UTFPR

² UTFPR

³ UTFPR

Palavras-chave: História Oral; Educação Inclusiva; Estudantes Surdos; Ensino Superior; Matemática.

Resumo:

A inclusão de estudantes surdos no ensino superior ainda é um campo pouco explorado, especialmente nos cursos de exatas. A presença desses sujeitos na universidade suscita questões relevantes sobre acessibilidade, aprendizagem e práticas pedagógicas, principalmente quando se trata do ensino da Matemática. Nesse contexto, a pesquisa proposta tem como finalidade compreender, a partir das vozes dos próprios estudantes e de sua intérprete de Libras, como se dá o processo de vivência acadêmica em um curso de graduação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Curitiba. O estudo está fundamentado na metodologia de pesquisa da História Oral, entendida como uma metodologia que valoriza a escuta ativa e a produção de narrativas, reconhecendo a legitimidade das experiências individuais. Segundo Garnica (2011, 2020), a História Oral assume a função de produzir fontes históricas a partir da oralidade, permitindo que sujeitos que vivenciam determinados contextos sociais tenham suas histórias registradas e analisadas. Portelli (2016) reforça que a História Oral é, antes de tudo, uma arte de

escuta, em que a narrativa não transmite apenas informações, mas sentidos e significados atribuídos pelos narradores às suas próprias trajetórias.

Com base nessa perspectiva, a pesquisa buscará registrar e analisar narrativas de estudantes surdos matriculados nos cursos de graduação na UTFPR e da Tradutora Intérprete de Língua de Sinais que os acompanha. As entrevistas serão realizadas em Libras, gravadas e posteriormente transcritas e textualizadas para a Língua Portuguesa. Esse processo envolve várias etapas metodológicas: a pré-seleção e convite dos participantes, a gravação das entrevistas em áudio ou vídeo, a transcrição literal do que foi dito, a textualização para construção de uma narrativa coesa e, por fim, a devolutiva ao colaborador para validação. Somente após essa etapa e a assinatura da carta de cessão de direitos, o material será considerado como fonte da pesquisa.

A História Oral permite que os estudantes surdos e sua intérprete sejam protagonistas na construção do conhecimento, relatando de forma sensível e legítima as dificuldades, conquistas e estratégias que constroem em sua vida acadêmica. Pretende-se, inicialmente, realizar uma análise individual das narrativas, respeitando as singularidades de cada trajetória, para em seguida desenvolver uma análise de convergências, buscando pontos comuns que revelem os principais desafios da inclusão nos cursos de exatas. Essa dupla abordagem, como sugere Garnica (2020), possibilita compreender tanto a singularidade quanto a coletividade das experiências. O tema é relevante não apenas por documentar vivências até então pouco registradas, mas também por contribuir para reflexões acerca das políticas de inclusão no ensino superior e para a formação docente voltada ao trabalho com a diversidade linguística e cultural.

Dessa forma, o estudo pretende compreender como os estudantes surdos constroem sua aprendizagem e participação no espaço acadêmico, qual o papel desempenhado pela intérprete no processo de mediação linguística e pedagógica e de que forma esses sujeitos percebem suas conquistas e desafios na trajetória universitária. Ao trazer suas vivências para o centro da pesquisa, busca-se dar visibilidade a experiências que possam subsidiar novas práticas inclusivas e políticas institucionais mais sensíveis à diversidade.

A História Oral, ao transformar relatos pessoais em fontes históricas, permitirá não apenas registrar, mas também interpretar os significados atribuídos pelos próprios estudantes e por sua intérprete à vivência acadêmica. Trata-se de

compreender não somente os obstáculos enfrentados, mas também as estratégias de resistência, os aprendizados e as conquistas que emergem desse processo. Assim, o trabalho se propõe a contribuir para uma universidade mais plural, que reconheça e valorize as identidades surdas e promova uma inclusão efetiva.

Referências:

ALMEIDA, M. C. História oral e pesquisa educacional: reflexões metodológicas. *Revista Brasileira de História da Educação*, Campinas, n. 20, p. 79-98, 2010.

CRUZ, A. C. História oral: metodologia e prática de pesquisa em educação. Curitiba: Appris, 2023.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática: múltiplas possibilidades. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 233-256, 2011.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática: fundamentos, percursos e desafios. Campinas: Mercado de Letras, 2020.

PORTELLI, A. Ensaio de história oral. São Paulo: Letra e Voz, 2016.

SILVA, H. C. S.; SOUZA, R. M. História Oral: um caminho para a pesquisa em Educação. *Cadernos de História da Educação*, Uberlândia, v. 6, n. 2, p. 141-152, 2007.

SILVEIRA, C. L. A produção de fontes visuais em Libras: reflexões sobre história oral e comunidade surda. *Revista Educação Especial*, Santa Maria, v. 31, p. 1-17, 2018.

Um olhar sobre uma turma de Altas Habilidades e Superdotação

Alisson Gabriel Struz¹

alissonstruz@ufpr.br

Paula Rogéria de Lima Couto (Orientadora)²

paulacouto@ufpr.br

^{1, 2}Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Especial; Sala de Recursos Multifuncional; Matemática.

Resumo:

Este trabalho é um relato da experiência do primeiro autor, orientado pela segunda autora, numa atividade de extensão desenvolvida em parceria com um colégio do Paraná cujo objetivo é contribuir com o ensino-aprendizagem de matemática para estudantes com Altas Habilidades e Superdotação.

As Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD) referem-se a um conjunto de características cognitivas, criativas e motivacionais que possibilitam ao indivíduo desenvolver desempenhos acima da média em áreas potencialmente valiosas do conhecimento humano (Brandão; Mori, 2012; Renzulli, 2004). No Paraná, o atendimento educacional especializado para estudantes com AH/SD é regulamentado pela Instrução nº 10/2011 da Secretaria de Estado da Educação (SEED/PR, 2011), que define diretrizes para o funcionamento das Salas de Recursos Multifuncionais – Tipo I, que atende os estudantes com AH/SD nas escolas. Dentre as normativas, destaca-se a necessidade de espaço físico adequado conforme padrões da ABNT, a elaboração de um Plano de Atendimento Educacional Especializado (PAEE) para cada aluno, o caráter de atendimento diferenciado e a preservação da identidade escolar do aluno, sem registro da participação no histórico oficial. A normativa reconhece ainda que o trabalho docente exige “soluções criativas”, evidenciando que a flexibilidade metodológica é central para este campo.

Neste contexto, o Colégio Estadual Júlio Mesquita implementa uma sala de recursos para AH/SD, multisseriada, onde uma das atividades desenvolvidas acontece em parceria com o projeto de extensão Caminhos Olímpicos na Matemática (COM) do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR). A prática pedagógica é estruturada em parceria entre a professora regente e coordenadora da sala e o professor de matemática, bolsista de extensão e primeiro autor deste trabalho, do COM. Os encontros ocorrem semanalmente, com duração de aproximadamente cinco horas, contando com cerca de 20 alunos matriculados, embora a média de frequência nas aulas de matemática seja de cinco estudantes,

entre 10 e 14 anos, oriundos do 6º ao 8º ano. O grupo — além do diagnóstico de AH/SD — apresenta heterogeneidade que inclui TDAH, traços de Transtorno do Espectro Autista e perfis de hiperfoco e habilidade multitarefa (Alves; Nakano, 2015).

O ambiente de aprendizagem é estruturado de modo acolhedor: mesas grandes encostadas umas às outras, jogos de tabuleiro, momentos para compartilhamento de lanches e espaço afetivo como pano de fundo para o engajamento. No entanto, persiste a limitação material — ausência de recursos como mapas, atlas, enciclopédias ou computadores — situação já apontada em estudos sobre o atendimento no Paraná (Brandão; Mori, 2012). O ambiente, mesmo com escassez de recursos, se afirma como lugar de pertencimento e socialização, permitindo que os estudantes encontrem pares em condição semelhante, elemento crucial para o desenvolvimento socioemocional. É nesse cenário que o PAEE, elaborado pela professora regente, orienta a intervenção pedagógica individualizada, respeitando os interesses e estilos de aprendizagem.

Metodologicamente, as aulas foram inauguradas com abordagem expositiva tradicional, dividida em blocos de exposição, dinâmicas e pausa. Logo se percebeu que, diante das características do grupo — distração fácil, necessidade de estímulo constante e uso atraente de tablets —, esse formato era ineficaz. Assim, adotou-se o que passou a ser chamado pelo primeiro autor de "aula desmontável": uma proposta onde o cronograma rígido era suspenso, dando lugar a sequências de aula adaptáveis conforme atenção, interesse e ritmo de cada aluno, o qual recebia, a depender do encontro, um conteúdo diferente dos demais que acompanhasse seu nível de desenvolvimento. Momentos de acolhimento os preparavam emocionalmente para as atividades, o que se tornou componente fundamental para a execução das aulas.

Desse modo, as atividades passaram a integrar artes, geografia e literatura — áreas de interesse dos alunos — com matemática, tornando o ensino mais significativo e próximo da realidade de cada estudante. Entre as atividades realizadas, destacam-se:

- **Equação do desenho:** um jogo de composição coletiva de desenhos proporcionais de criaturas fictícias, estimulando a discussão matemática de frações e pesos; nele, cada aluno era orientado a desenhar, a sua maneira, a fração de um animal ($\frac{7}{4}$ de um tubarão-duende, por exemplo), e o desenho era passado para o próximo colega que, na nova rodada, completava com outra fração dada pelo professor; ao final, os alunos tinham trabalhado noções de frações mistas e soma de frações, já que, para finalizar, deviam “somar” as partes e o resultado seria o animal criado;
- **Proporcionalidade no corpo humano:** nessa atividade, os alunos, deveriam desenhar um personagem, a gosto, e depois eram introduzidos ao conceito de proporcionalidade e à noção clássica da regra das “oito cabeças”, redesenhando, ao final, o personagem para enquadrá-lo na proporção;
- **Teoria de Conjuntos e Geografia:** os alunos eram apresentados à linguagem de Conjuntos e, depois, associavam a noção com países, desenhando os estados

como subconjuntos e as capitais como elementos, reconhecendo as relações de pertinência e inclusão.

Essas propostas reforçam a importância de aliar conteúdo formalizado às áreas de interesse e criatividade dos alunos, conforme defendido pela Teoria dos Três Anéis de Renzulli e pelos princípios de Enriquecimento Curricular (Renzulli, 2004). Tais estratégias não apenas evitaram a exposição massiva de conteúdo, mas privilegiaram conversas enquanto realizavam-se as tarefas, fomentando a intuição matemático-artística e valorizando o olhar individual de cada estudante. Apesar das dificuldades estruturais e metodológicas, observa-se que o ambiente de acolhimento, aliado a práticas interdisciplinares, favorece o desenvolvimento das potencialidades e a inclusão escolar.

Em síntese, a atuação evidencia que o atendimento a alunos com AH/SD demanda práticas educacionais interdisciplinares, ambientalmente acolhedoras e metodologicamente flexíveis, exigindo muito mais que aplicação de conteúdos: requer sensibilidade, criatividade e adaptação às singularidades. As dificuldades estruturais e a heterogeneidade da turma, longe de inviabilizar o trabalho, reforçam a necessidade de metodologias inovadoras. Nesse sentido, a parceria entre escola e universidade mostra-se fundamental, pois amplia horizontes pedagógicos e assegura um espaço em que potencialidades podem se desenvolver, sendo de vital relevância para a promoção de uma educação inclusiva e significativa. É no encontro entre acolhimento, flexibilidade metodológica e enriquecimento interdisciplinar que a educação especial para AH/SD encontra sua força transformadora, pela construção de sentido, pertencimento e autoexpressão.

Referências:

MORI, N.; BRANDÃO, S. **O atendimento em salas de recursos para alunos com altas habilidades/superdotação: o caso do Paraná.** Revista Educação Especial, 2012.

RENZULLI, J. S. **The Three-Ring Conception of Giftedness: A Developmental Model for Promoting Creative Productivity.** Connecticut: Creative Learning Press, 2004.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Instrução nº 10/2011 – SEED. **Diretrizes para o funcionamento das Salas de Recursos Multifuncionais Tipo I para Altas Habilidades/Superdotação.** Curitiba, 2011.

ALVES, R. J. R.; NAKANO, T. C. **A dupla excepcionalidade: relações entre altas habilidades/superdotação com a síndrome de Asperger, transtorno de déficit de atenção e hiperatividade e transtornos de aprendizagem.** Revista Psicopedag., São Paulo, 2015.

Uma análise de tarefas não-rotineiras em textos que discutem pensamento algébrico

Isabele Andrade Vichinieski¹

isabele.vichinieski@ufpr.br

Andressa Balestrin Dasenbrock¹

andressa.dasenbrock@ufpr.br

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)²

gabriel.santos22@gmail.com

^{1,2}Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, ensino de álgebra, aritmética generalizada, pensamento funcional, modelação.

Resumo:

O presente trabalho parte do entendimento de que, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o pensamento algébrico, quando mobilizado de forma intencional, favorece o reconhecimento de padrões, a identificação de regularidades e a generalização, ainda que sem o uso de símbolos formais. Nesse sentido, cabe ao professor de Matemática oportunizar situações que envolvam diferentes dimensões da ação de pensar algebricamente. Com base nisso, o objetivo do trabalho é analisar tarefas não-rotineiras disponíveis em artigos, teses e dissertações que tratam de pensamento algébrico.

Dentre as pesquisas que discutem o tema, destacam-se as contribuições de Blanton e Kaput (2005). Para estes autores, o pensamento algébrico é um processo que envolve a generalização de ideias matemáticas a partir de casos particulares, o estabelecimento dessas generalizações por meio da argumentação e a sua expressão de maneiras mais formais e adequadas, de acordo com a idade dos estudantes. Diante disso, afirmam que o pensamento algébrico pode se apresentar de diversas formas, como

- (a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
- (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);
- (c) modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações [...]. (Blanton; Kaput, 2005, p. 413, tradução nossa).

¹ Bolsista do programa PET Matemática

Silva, Innocenti e Rocha (2024) destacam que conhecer as características de tarefas capazes de mobilizar o pensamento algébrico permite ao professor criar condições para que os estudantes manifestem diferentes formas desse pensamento, ao mesmo tempo em que favorece a reflexão sobre suas práticas e estratégias em sala de aula.

Buscando identificar tarefas favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a pesquisa utilizou como fontes artigos, dissertações e teses que abordam as formas propostas por Blanton e Kaput (2005). A coleta dos textos foi realizada em três repositórios institucionais: o Portal de Periódicos da Capes, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, por meio de buscas pelas expressões “aritmética generalizada”, “pensamento funcional” e “‘modelação’ and ‘pensamento algébrico’”. Das 46 produções localizadas, 17 apresentavam tarefas com potencial de mobilizar o pensamento algébrico. Os enunciados foram organizados em tarefas rotineiras e não-rotineiras, sendo essas últimas reunidas em um Quadro de Tarefas, totalizando 32 registros. Em seguida, tais tarefas não-rotineiras foram analisadas e agrupadas conforme as demandas de seus enunciados, resultando em sete agrupamentos: i) expressar grandezas; ii) identificar e expressar relações de dependência; iii) operar com o desconhecido; iv) utilizar fórmulas; v) identificar e expressar padrões; vi) elaborar e testar conjecturas; e vii) reconhecer e validar outros tipos de raciocínio.

A tarefa apresentada na Figura 1 pode ser usada para exemplificar o agrupamento “expressar grandezas”, que reuniu 11 tarefas. Nesse grupo, foram incluídos os enunciados que solicitam a expressão e comparação de diferentes grandezas, bem como a expressão ou determinação de grandezas desconhecidas a partir de conhecidas.

A professora Norma entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de 20 cm por 30 cm, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.

Jorge disse: - No meu cabe mais, porque é mais alto.
Ema disse: - No meu cabe mais, porque é mais largo.
O que você pode falar dessa situação?



Figura 1: Tarefa BA08T4
Fonte: Laier (2014)

Como exemplo do agrupamento “elaborar e testar conjecturas”, que contemplou 8 enunciados, apresenta-se a tarefa de código BA08T2 na Figura 2. Esse agrupamento inclui tarefas que propõem ao estudante formular, testar e justificar conjecturas sobre fatos e relações matemáticas.

Um aluno diz que encontrou 3 números ímpares, cuja soma é 20. É dado a você esse problema.
Apresente uma solução, registre e relate como a obteve.

Figura 2: Tarefa BA08T2
Fonte: Laier (2014).

Após a análise dessas tarefas, observou-se que alguns agrupamentos tiveram poucas ocorrências, como “utilizar fórmulas” (1 tarefa) e “reconhecer e validar outros tipos de raciocínio” (2 tarefas), enquanto “identificar e expressar uma relação de dependência” apresentou o maior número, com 17 tarefas, seguido de “expressar grandezas”, com 11 tarefas, sendo a maioria provenientes de textos obtidos através da busca por “aritmética generalizada”. Entretanto, é importante ressaltar que a criação dos agrupamentos se deu a partir das demandas dos enunciados, e deve-se considerar que uma mesma tarefa pode favorecer diferentes formas de pensamento algébrico, identificáveis nas produções escritas dos alunos que a realizam, como indica Viola dos Santos (2007).

Em síntese, a análise dos enunciados evidenciou tanto as possibilidades quanto a relevância de propor, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, atividades que favoreçam intencionalmente o desenvolvimento do pensamento algébrico e contribuam para o ensino de álgebra. Além disso, ao considerar diferentes perspectivas teóricas sobre álgebra, outras tarefas podem ser identificadas e analisadas, ampliando as possibilidades para investigações futuras.

Referências:

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Washington, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

LAIER, Simone Simionato dos Santos. **Álgebra e aspectos do pensamento algébrico: um estudo com resolução de problemas na licenciatura em Ciências Naturais e Matemática** - UFMT/Sinop. 2014. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, 2014.

SILVA, Gabriel dos Santos e; INNOCENTI, Mariana Souza; ROCHA, Fernanda Boa Sorte. Um Estudo de Índícios de Pensamento Algébrico de Estudantes do Ensino Fundamental por meio da Análise da Produção Escrita. In: ELIAS, Henrique Rizek; PANOSSIAN, Maria Lucia. **Ensino e Aprendizagem de Álgebra: Pesquisas e Propostas Pedagógicas**. São Paulo: LF Editorial, 2024. p. 199-220.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Uma investigação sobre o uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino da álgebra em colégios de Paranaguá

Anay Kurpel Pusch¹

anyunespar@gmail.com

Tiago Luiz Ferrazza (Orientador)²

tiago.ferrazza@unespar.edu.br

^{1,2}Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranaguá

Palavras-chave: álgebra, materiais didáticos manipuláveis, pensamento algébrico.

Resumo:

O ensino da Matemática se torna cada vez mais difícil conforme o nível de abstração dos objetos de estudo aumenta e essa dificuldade se torna mais evidente no ensino da Álgebra. Uma estratégia de ensino que se propõe facilitar o processo de ensino e aprendizagem de conceitos mais abstratos é utilizar materiais didáticos manipuláveis (MDM) para desenvolver nos alunos ideias que constituem o Pensamento Algébrico, favorecendo assim a aprendizagem da Álgebra. Porém, observa-se nas escolas uma escassez de materiais que têm essa função como sendo a principal. Por isso, esta pesquisa, vinculada a um projeto de Iniciação Científica e que está em sua fase inicial de desenvolvimento, visa investigar a utilização de materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico para o ensino da Álgebra, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, em colégios localizados no município de Paranaguá.

O ensino da Álgebra, uma das cinco unidades temáticas da Matemática consideradas na BNCC (2018), visa o desenvolvimento do Pensamento Algébrico “que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (Brasil, 2018, p. 226). Entende-se que Pensamento Algébrico envolve o raciocínio matemático dentro de um referencial algébrico, dando significado para símbolos e expressões algébricas em termos da aritmética. Complementando essa caracterização do Pensamento Algébrico, Godino e Font (2003, p.8, *apud* Groenwald, 2014, p. 3), afirmam que

O raciocínio algébrico é caracterizado por representar, generalizar e formalizar padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática. E à medida que se desenvolve esse raciocínio, se vai

¹ Voluntária do Programa de Iniciação Científica.

evoluindo no uso da linguagem e seu simbolismo, necessário para apoiar e comunicar o pensamento algébrico, especialmente nas equações, nas variáveis e nas funções. Esse tipo de pensamento está no coração da Matemática concebida como a ciência dos padrões e da ordem, já que é difícil encontrar em outra área da Matemática em que formalizar e generalizar não seja um aspecto central. Em consequência, os professores em formação têm que construir essa visão do papel das ideias algébricas nas atividades matemáticas, e sobre como desenvolver o pensamento algébrico durante todos os níveis de ensino (Godino & Font, 2003, p.8).

Becher e Groenwald (2009) também reforçam que

O pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações, tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial (Becher e Groenwald, 2009, p. 246).

A Álgebra tem grande importância no processo ensino, já que se utiliza muito da linguagem algébrica para discutir propriedades, relações e generalidades em todos os outros campos da matemática. Porém, ao avançar no ensino da álgebra, principalmente no Ensino Fundamental, encontram-se alguns obstáculos, como: a) a falta de recursos materiais e de tempo para a real efetivação do processo de ensino-aprendizagem; e b) a dificuldade dos alunos em conceber os conceitos abstratos e apropriar-se da linguagem algébrica utilizada no tratamento e discussões acerca dos objetos de estudo. Uma alternativa que propõe superar o obstáculo b) é fazer uso de materiais didáticos manipuláveis, visto que “no ensino e aprendizagem de álgebra, o uso de materiais manipuláveis pode atuar como um facilitador nesse processo e trazer significado para os conceitos algébricos ensinados através da exploração e manipulação dos materiais pelos alunos” (Bresan et al., 2024, p. 76).

Contudo, apesar de existirem diversos estudos apontando os benefícios de se utilizar materiais manipuláveis, favorecendo a passagem do concreto para o abstrato, raramente veem-se professores da rede pública utilizando desses recursos no ensino da álgebra (provavelmente consequência do obstáculo a) citado anteriormente). Por isso, essa pesquisa tem como objetivo geral investigar o uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino da álgebra em colégios localizados no município de Paranaguá, ou seja, investigar se nesses colégios estão presentes e são utilizados materiais didáticos manipuláveis que tenham como utilidade principal facilitar o ensino da álgebra, ou que possam ser direcionados de alguma forma para esse fim e propor atividades que objetivam ensinar conceitos/ideias da álgebra a partir exploração de materiais manipuláveis.

Para cumprir com tal objetivo, os próximos passos dessa pesquisa são aprofundar a pesquisa bibliográfica para que se possa dar início às investigações nos colégios de Paranaguá conhecendo: a) a relação entre o concreto e o abstrato

no ensino da matemática; b) a(s) caracterização(ões) dos materiais didáticos manipuláveis; e c) as ideias que constituem o Pensamento Algébrico.

Num segundo momento dar-se-á início a preparação para a pesquisa de campo onde serão elaboradas as especificações da investigação nos colégios: quais MDM serão observados e considerados como possíveis de serem utilizados no ensino da álgebra, quais perguntas serão feitas aos professores sobre o uso e a percepção desses materiais no ensino da álgebra e da matemática em geral, e como serão organizados e analisados esses dados.

Num terceiro momento serão feitas as visitas nos colégios para coletar as informações acerca dos MDM e encaminhado um questionário aos professores desses colégios para responderem as perguntas sobre o uso desses materiais.

Num quarto e último momento, será feita a organização e análise dos dados obtidos para posterior divulgação dos resultados em eventos científicos acadêmicos de pesquisa e na forma de artigo.

Referências:

- [1] BECHER, E. L. e GROENWALD, C. L. O. **Características do Pensamento Algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio**. Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí, Rio Grande do Sul, 2009.
- [2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 16 mar. 2025.
- [3] BRESSAN, G. M.; SOUZA, P. M.; MARTINEZ, A. L. M.; STIEGELMEIER, E. W. O uso de Materiais Manipuláveis como recurso pedagógico no Ensino da Álgebra. In: SOUZA, A. C.; VIUDES, M. M. (org.) **Narrativas em Educação Matemática: pesquisas, trajetórias, concepções e práticas**. São Paulo, SP: Editora Científica Digital LTDA, 2024.
- [4] GROENWALD, C. L. O. **Pensamento Aritmético e Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental**. IV EIEMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática. 2014. ISSN 2316-7785.
- [5] SOARES, L. H.; RÊGO, R. G. O concreto e o abstrato no ensino de matemática. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais[...]** Ilhéus: UESC, 2015.
- [6] USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis In: Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.) **As ideias da álgebra** (Chap. 2, pp. 9-22). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.

Viajando com a história da matemática

Destino: Sala de aula – Boa Viagem

Francine Gabriely de Oliveira Sergio¹

francine.sergio.56@estudante.unespar.edu.br

Marcia Maria da Veiga Arantes¹

marcia1905unespar@gmail.com

Solange Maria Gomes dos Santos (Orientadora)²

solange.santos@unespar.edu.br

^{1,2}Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – Campus de Paranaguá

Palavras-chave: História da Matemática, Oficinas Matemáticas, Educação Matemática.

Resumo:

Este trabalho tem por objetivo relatar uma sequência de aulas diferenciadas, trabalhadas na disciplina de História da Matemática, 3º ano de Matemática/licenciatura da Unespar – Campus de Paranaguá, que levou a exposição na Mostra das Profissões da mesma Instituição de Ensino Superior e futura aplicação em sala de aula na Educação Básica. Partindo da disciplina estudada, e com base em um dos temas das Tendências Metodológicas da Educação Matemática, a História da Matemática, estruturada com base no Currículo da Rede Estadual Paranaense (Crep) e do Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná, SEED/PR, elaborou-se uma linha do tempo que mostrava a construção humana da matemática ao longo dos séculos, enfatizando os contextos geográficos, políticos e sociais de cada época. Em cada linha do tempo foram desenvolvidas atividades que evidenciavam a importância de cada civilização, oficinas com a aplicação das descobertas de matemáticos, construção de mapas com a localização da origem dos principais matemáticos que descobriram e ou colaboraram para que a matemática fosse vista e estudada de forma dinâmica.

Não houve uma única pessoa que "organizou" a linha do tempo da história da matemática, pois sabe-se que ela é fruto do desenvolvimento contínuo ao longo de milênios. Foram construções posteriores que documentaram o surgimento e a evolução de conceitos matemáticos através dos tempos, das descobertas matemáticas e da colaboração de diferentes culturas. A construção da linha do tempo facilitou o entendimento da evolução dos conceitos e descobertas matemáticas e de como podem, nos dias de hoje, serem trabalhadas na forma de oficinas, objetivando a melhoria da qualidade ensino aprendizagem em sala de aula.

¹Acadêmica do 3º ano – Curso de Licenciatura em Matemática – Unespar – Campus de Paranaguá.

Os períodos cronológicos na história da matemática são de grande importância, pois ajudam a reconhecer que diferentes povos contribuíram de maneira significativa, formando um mosaico de saberes que não pertence a uma única nação e contexto, mas também servindo como marcos de evolução do conhecimento matemático, não como algo pronto e acabado, mas como uma ciência em constante construção. O quadro abaixo apresenta a Contextualização histórica da matemática:

QUADRO - CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DA MATEMÁTICA

PRÉ-HISTÓRIA 10.000 a.C. a 4.000 a.C.	PALEOLÍTICO (pedra lascada) 10.000 a.C.
	MESOLÍTICO (entre pedras) 10 mil a 8 mil a.C.
	NEOLÍTICO (pedra polida) 8 mil a 5 mil a.C.
Idade Antiga (sec. 3 a.C. - 8 a.C.)	Mesopotâmia 3.500 a.C.
	Egito 3.500 a.C.
	Grécia: sec. 8 a.C.
IDADE MÉDIA (sec. 5 d.C. /metade do 15 d.C.)	A Europa na Idade Média – sec. XI a XIII
	Renascimento – Europa - fins do sec. XIII e meados do séc. XVII
	Desenvolvimento Formal - Árabes e Hindus – sec. 16
IDADE MODERNA Meados do sec. 17d.C.	Revolução Francesa
	Era Euler - Era Bernoulli
	Europa – sec. 17 - Idade dos gênios matemáticos
IDADE CONTEMPORÂNEA (sec.17/ dias de hoje)	Matemáticos de diferentes países
	Matemáticos brasileiros

Fonte: Elaborada pelas autoras (2025)

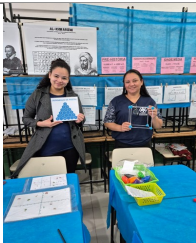
Em cada período acima citado, a evolução do conhecimento foi atendendo as necessidades e transformações sociais, econômicas e culturais das civilizações.

A colocação das oficinas para alguma finalidade de ensino é entendida por Neto (2013) como o ensino tácito, ligado ao caráter prático e evidencia novamente a necessidade para a diversidade das abordagens de ensino. As oficinas desenvolvidas nas aulas diferenciadas mostraram que a teoria se torna mais produtiva quando trabalhada com a prática. Segundo Alves (2006, p.10), oficinas matemáticas através de jogos e o uso de materiais concretos constituem dimensões de enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório, necessárias para aprendizagem matemática.

Entre as oficinas trabalhadas, destacam-se: Ossos de Napier (material manipulativo criado pelo matemático escocês John Napier uma espécie de “calculadora manual” para facilitar a compreensão dos algoritmos matemáticos); Relação de Euler no Triângulo de Pascal (muito interessante, que mostra como os números binomiais se organizam dentro do triângulo) e o Método Cartesiano, criado

por René Descartes mostrando a relação da matemática com situações do cotidiano e estimulando a resolução de problemas por meio da localização de pontos.

Fotografias - Oficinas trabalhadas no evento

		
Ossos de Napier	Triângulo de Pascal Relação de Euler	Método Cartesiano

Fonte: Elaborada pelas autoras (2025)

Ainda como estratégia didática para diversificar as atividades, o uso de mapas (Europa e Brasil) para identificar a origem dos principais matemáticos, potencializaram a importância da história da matemática como um dos fatores do desenvolvimento de pensamento crítico no aluno e sua visão de integração, ou seja, de permitir a conexão da matemática com outras realidades, tornando-a mais acessível e compreensível.

Outro ponto a ressaltar, como futura atividade, a ser aplicada na sala de aula da Educação Básica e Ensino Médio, serão as oficinas e atividades diferenciadas. Tratando-se de história da matemática, temos, em D'Ambrósio (2009, p. 29), que uma percepção da história da matemática em sala de aula é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino.

O estudo da história da matemática permite ao aluno compreender que os conceitos, as descobertas matemáticas, as fórmulas, os teoremas e postulados, não surgiram de maneira repentina, mas sim, são resultado de um processo contínuo de muitos homens e mulheres que dedicaram e continuam se dedicando suas vidas por uma matemática mais participativa no cotidiano das pessoas, mais um caminho para formar cidadãos críticos e o papel transformador da matemática na sociedade.

Referências:

- ALVES, Eva Maria Siqueira. **A ludicidade e o ensino de Matemática: uma prática possível**. Campinas, SP: Papirus, 2006.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Transdisciplinaridade**. 2. ed. São Paulo: Palas Athena, 2009.
- NETO, José Henrique Duarte. **Epistemologia da Prática: fundamentos teóricos e epistemológicos orientadores da formação de professores que atuam na Educação Básica**. Revista Educação e Cultura Contemporânea. Vol. 10, n. 21. 2013

Equações Diferenciais

Comissão Científica:

Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes

Prof. Dr. André Pedroso Kowacs

Banca Avaliadora:

Dr. André Pedroso Kowacs

Ldo. Ruan Pablo Ronson Luqueti

Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes

A Matemática do Átomo de Hidrogênio

Fabricia Oliveira dos Santos*

fabriciasantos0504@gmail.com¹

Renan Gambale Romano (Orientador)

r.g.romano@ufsc.br³

¹UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina

Palavras-chave: Átomo de hidrogênio, mecânica-quântica, operadores de Schrödinger, resolução de EDO.

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo encontrar o operador hamiltoniano do átomo de hidrogênio e resolver o problema de autovalores associado. Segundo os axiomas da mecânica quântica, conhecer os autovalores e autovetores desse operador permite determinar os possíveis estados quânticos de uma partícula. No caso específico do átomo de hidrogênio, isso possibilita prever a localização do elétron em torno do núcleo, o que está relacionado diretamente à camada eletrônica em que ele se encontra.

Para encontrar o hamiltoniano, aplica-se o *método de quantização* para uma partícula carregada (elétron) sob a influência de um campo eletromagnético gerado por uma partícula fixa, o próton. Neste método, começa-se com as equações do movimento da mecânica clássica, no caso, a equação da força de Lorentz dada por

$$m \ddot{\mathbf{x}} = q \mathbf{E} + q \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Aqui, m representa a massa da partícula (no caso, o elétron), $\ddot{\mathbf{x}}$ é a aceleração vetorial, q é a carga elétrica do elétron, $\mathbf{E}$ é o vetor campo elétrico no ponto onde a partícula se encontra, $\mathbf{B}$ é o vetor campo magnético, e $\dot{\mathbf{x}}$ é a velocidade da partícula, que interage com $\mathbf{B}$ por meio do produto vetorial.

A partir daí, procura-se uma função L tal que as equações do movimento acima podem ser recuperadas pela *equação de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (2)$$

Quando tal função existe, diz-se que ela é a *lagrangiana* do sistema. Para o átomo de hidrogênio, obtém-se

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}). \quad (3)$$

*Voluntária do programa de Iniciação Científica.

A partir desta lagrangiana, o hamiltoniano (clássico) é obtida através da seguinte fórmula, de acordo com a formulação hamiltoniana da mecânica clássica:

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L, \text{ sendo } \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}. \quad (4)$$

O método de quantização padrão permite obter o hamiltoniano (quântico) de um elétron na presença de um campo eletromagnético através da substituição $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$. Portanto, o hamiltoniano (ou operador de Schrödinger) para uma partícula quântica, na presença de potenciais elétrico V e magnético $\mathbf{A}$, é dado por:

$$H\psi = \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2 + qV \right] \psi. \quad (5)$$

Para estudar o átomo de hidrogênio de maneira simplificada, supõe-se que o elétron (de carga $q = 1$ e massa $\frac{1}{2}$) interage com o potencial de Coulomb gerado pelo próton, o qual é dado por,

$$V = -\frac{\gamma}{\|\mathbf{x}\|} \text{ e } \mathbf{A} = 0. \quad (6)$$

Supondo $\hbar = 1$, chegamos portanto ao seguinte operador hamiltoniano para o átomo de hidrogênio simplificado:

$$H\psi = -\Delta\psi - \frac{\gamma}{\|\mathbf{x}\|}\psi. \quad (7)$$

Determinado o operador hamiltoniano, deve-se investigar a equação de autovalores associada, dada por $H\psi = \lambda\psi$. Essa equação pode ser reescrita em coordenadas esféricas, ficando no formato

$$-\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right] + V\psi = \lambda\psi. \quad (8)$$

A partir disso foi possível a separação de variáveis e a decomposição do problema em três equações diferenciais independentes do tipo *Sturm-Liouville*.

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + r^2(\lambda - V(r)) = l(l+1), \\ \sin(\theta) \left[\frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin(\theta) \right] = m^2, \\ \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2. \end{cases} \quad (9)$$

As soluções de cada problema acima podem ser obtidas usando, respectivamente, funções de Bessel, polinômios de Legendre e técnicas de EDO de segunda ordem, sendo assim descritas:

$$\begin{cases} u(r) = \alpha x^{-l/2} r j_l(\sqrt{z}r) + \beta z^{(l+1)/2} r y_l(\sqrt{z}r), \\ \Theta_l^m(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P_l^m(\cos \theta), \\ \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (10)$$

Estes resultados podem ser usados para se obter os níveis de energia do átomo de hidrogênio e assim descrever todas as camadas eletrônicas neste modelo.

Referências

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. Dover, 1965.
- [2] ALBEVERIO, S.; GESZTESY, F.; HØEGH-KROHN, R.; HOLDEN, H. **Solvable Models in Quantum Mechanics**. Springer-Verlag, 1988.
- [3] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. (2nd ed.) Pearson Prentice Hall, 2005.
- [4] KREYSZIG, E. **Introduction to Functional Analysis with Applications**. John Wiley e Sons, 1978.
- [5] TESCHL, G. **Mathematical Methods in Quantum Mechanics**. American Mathematical Society, 2009.

Análise de Fourier para EDPs periódicas

Daniel Thiago Ivanchechen*

daniel.ivanchechen@ufpr.com¹

Fernando de Ávila Silva (Orientador)

fernando.avila@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Análise de Fourier; Hipoeliticidade; Campos vetoriais.

Resumo:

Os coeficientes de Fourier permitem representar funções periódicas como uma série de senos e cossenos, constituindo uma ferramenta fundamental no estudo de equações diferenciais parciais lineares e periódicas, que são amplamente estudadas em cursos básicos de graduação. Porém, um fato pouco explorado é a ligação entre a **suavidade da função** e a **rapidez com que seus coeficientes de Fourier decaem**. Neste trabalho apresentamos a ligação entre a regularidade das soluções de certas EDPs lineares e o decaimento de seus coeficientes de Fourier.

Nosso objetivo com este trabalho foi estudar a regularidade das soluções de certas equações diferenciais parciais (EDPs) através de propriedades dos seus coeficientes de Fourier. De modo mais preciso, exibimos condições algébricas sobre os coeficientes de tais equações que nos permitem enunciar resultados do tipo **se, e somente se**, relacionados com a teoria dos números, em particular sobre a velocidade de aproximação de números reais por racionais. Para fundamentar os resultados apresentados, introduzimos algumas definições e conceitos centrais.

Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável e 2π -periódica. Para cada $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, definem-se os números complexos

$$\hat{f}(m, n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy, \quad (1)$$

chamados de coeficientes de Fourier de f . Assim, a série de Fourier de f é então denotada por

$$f \sim \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(m, n) e^{i(mx+ny)}.$$

Definição 1. Dizemos que uma sequência de números complexos $\{a_{(m,n)}\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ é rapidamente decrescente se, para cada $k \in \mathbb{N}$ dado, existe $C_k > 0$ tal que

$$|a_{(m,n)}| \leq \frac{C_k}{\|(m, n)\|^k}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado; Voluntário do Programa de Educação Tutorial.

Teorema 1. Se $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$, então seus coeficientes de Fourier formam uma sequência rapidamente decrescente. Reciprocamente, se $\{a_{(m,n)}\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ é rapidamente decrescente, então a série

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{(m,n)} e^{i(mx+ny)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

converge uniformemente para uma função $a \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e vale a igualdade

$$a_{(m,n)} = \hat{a}(m, n), \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Definição 2. Dizemos que o operador $L = \partial_x - \alpha \partial_y$, $\alpha \in \mathbb{C}$, definido em $\mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ é Globalmente Hipoeolítico (GH) se toda solução u da equação

$$Lu = f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (2)$$

for também uma função em $\mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Para tanto, observamos inicialmente que através da comparação de coeficientes de Fourier, buscar soluções da equação (2) equivale a resolver a equação algébrica

$$i(m - \alpha n)\hat{u}(m, n) = \hat{f}(m, n), \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Entretanto, note que o fato de uma sequência numérica $a_{(m,n)}$ satisfazer (3) não implica, necessariamente, que obtivemos uma solução suave para a equação (2). De fato, suponha que α é um número racional. Então, podemos tomar uma sequência crescente $(m_j, n_j) \in \mathbb{Z}^2$ satisfazendo $m_j - \alpha n_j = 0, \forall j$. Neste caso, definindo

$$a_{(m,n)} = \begin{cases} 1, & (m, n) = (m_j, n_j), \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

teríamos $(m - \alpha n)a_{(m,n)} = 0, \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, porém $\{a_{(m,n)}\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ não é rapidamente decrescente e, portanto, não define uma função $a \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Nosso objetivo é então caracterizar a regularidade das soluções da equação (2) através dos coeficientes de Fourier de u e f .

É importante notar neste ponto que quando $\alpha \in \mathbb{R}$, a condição

$$\exists A, B > 0 \text{ tais que } |m - \alpha n| \geq \frac{A}{\|(m, n)\|^B} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (4)$$

diz respeito a **velocidade** na qual um número real pode ser aproximado por números racionais. Dessa forma, é possível mostrar que a hipoeoliticidade global do operador depende essencialmente da qualidade da aproximação diofantina de α , estabelecendo uma ponte entre análise de Fourier, EDPs e teoria dos números. Em particular, tem-se a seguinte definição.

Definição 3. Um número irracional α é dito **número de Liouville** se, para cada $N \in \mathbb{N}$ dado, existe $C > 0$ e uma sequência de números racionais distintos $\{\frac{p_j}{q_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{C}{|q_j|^N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, a caracterização geral das soluções de (2) é feita através do seguinte resultado

Teorema 2. *Considere o operador L e ponha $\alpha = a + ib$. Então, L é GH se, e somente se, uma das seguintes condições é cumprida:*

(i) $b \neq 0$;

(ii) $b = 0$ e a é um irracional não-Liouville.

Referências

- [1] BOBKO, N. **Hipoeliticidade Global no Toro bidimensional**, Cadernos PET-Matemática-UFPR, (2007).
- [2] GREENFIELD, S. J.; WALLACH, N. R. **Global Hypoellipticity and Liouville Numbers**. Proc. Am. Math. Soc., 31, 112–114, (1972).
- [3] ZANI, S. L. **Hipoeliticidade Global para operadores de segunda ordem**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - USP, São Carlos, (1988).

EDO's Aplicadas em Modelos Biológicos

Nathan Hanashiro Fodor *
Orientador: Bruno de Lessa Victor †

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Palavras-chave: EDO's, modelos biológicos, modelo Lotka-Volterra, modelo SIR.

Resumo: Estudamos dois importantes modelos biológicos de equações diferenciais ordinárias: o predador-presa de Lotka-Volterra e o epidemiológico SIR.

O modelo predador-presa de Lotka-Volterra:

O modelo de Lotka-Volterra é um sistema de duas EDOs autônomas, no qual uma das equações representa a população das presas e a outra dos predadores. Aqui assumimos apenas a existência das duas espécies, supomos que as presas possuem recursos infinitos e os predadores se alimentam única e exclusivamente das presas.

Supondo a existência tanto de presas quanto predadores, como se comporta a dinâmica entre essas duas populações? Será possível os predadores se alimentarem de todas as presas fazendo elas entrarem em extinção e consequentemente se extinguirem? Veremos que não, e que na verdade as soluções serão ciclos fechados.

Para melhor estudarmos esse modelo devemos adicionar algumas constantes no estudo. Considere os seguintes parâmetros:

- a representa a velocidade com que as presas se reproduzem;
- b representa a susceptibilidade das presas às ações predatórias;
- c representa a velocidade com que os predadores morrem;
- d representa a habilidade predatória dos predadores.

Como o decaimento das presas e o crescimento dos predadores dependem da quantidade de encontros entre as espécies, o problema é modelado através do seguinte sistema de equações, com x e y representando a população das presas e predadores, respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-c + dx)y. \end{cases}$$

* e-mail: nathanfodor@gmail.com

† e-mail: bruno.lessa@ufsc.br

Temos duas singularidades no sistema: $(0, 0)$ e $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Ao analisarmos ambas no sistema linear, utilizando o Teorema de Hartman-Grobman, deduzimos que $(0, 0)$ é um ponto de sela e portanto o mesmo vale para o sistema não-linear. Já $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ é um centro no sistema linear, podendo assim ser um centro ou uma espiral no caso não-linear. Através de uma análise gráfica, devido a Volterra, concluímos que a singularidade se trata de um centro com órbitas em formato de elipse. Além disso, também encontramos o período dos ciclos e as populações médias de cada uma das espécies.

O modelo epidemiológico SIR (Kermack-McKendrick):

Este modelo propõe o estudo do desenvolvimento de uma epidemia numa região, separando sua população em três grupos:

- S : *Suscetíveis* - pessoas saudáveis que podem pegar a doença;
- I : *Infectados* - pessoas que possuem a doença e podem transmiti-la;
- R : *Recuperados* - pessoas saudáveis que estão imunes à patologia.

Existem diversas variações do modelo SIR, mas o mais simples deles é o seguinte: se β e γ são constantes que representam a taxa de infecção e recuperação, respectivamente, temos

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta I, \\ \frac{dI}{dt} = \beta I - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases}$$

Para obter um modelo que se aproxime mais da realidade, consideramos os seguintes parâmetros, estabelecidos em [4]:

- b representa a taxa de nascimento;
- c representa a taxa de recuperação dos infectados;
- d representa a taxa de morte sem relação com a doença;
- δ representa a taxa de morte por sequelas dos recuperados;
- e representa a taxa de perda de imunidade;
- ϵ representa a taxa de morte pela doença;
- λ representa a taxa de contato de infectados.

Se N representa a população total ($N = S + I + R$) e definimos $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$ e $r = \frac{R}{N}$, estudamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = bN - dS - \lambda \frac{SI}{N} + eR, \\ \frac{dI}{dt} = -(d + \epsilon + c)I + \lambda \frac{SI}{N}, \\ \frac{dR}{dt} = -(d + \delta + e)R + cI. \end{cases}$$

Considere agora os seguintes parâmetros adicionais:

$$R_0 = \frac{\lambda}{b+c+\epsilon}, \quad R_1 = \begin{cases} \frac{b}{d} & \text{se } R_0 \leq 1, \\ \frac{b}{d+\epsilon i^* + \delta r^*} & \text{se } R_0 > 1, \end{cases}, \quad R_2 = \begin{cases} \frac{\lambda}{c+d+\epsilon} & \text{se } R_0 \leq 1, \\ \frac{\lambda s^*}{c+d+\epsilon} & \text{se } R_0 > 1. \end{cases}$$

- R_0 representa a *força de infecção da doença em relação à população total* (descreve se i aumenta ou diminui); se $R_0 > 1$, a patologia é considerada *altamente contagiosa*;
- R_1 representa a *taxa de crescimento populacional* (fatalidades causadas pela doença são consideradas apenas quando a doença é altamente contagiosa);
- R_2 representa a *força pura da infecção relacionada com a proporção suscetível* (descreve se I aumenta ou diminui).

Buscamos então condições para dois tipos de estabilidade para (s, i, r) :

- (s^*, i^*, r^*) constante, com $i^* > 0$ (todas as proporções se tornarem constantes);
- $(s, i, r) = (1, 0, 0)$ (uma quantia insignificante de infectados em relação ao todo)

Nosso objetivo final é o estudo do seguinte resultado e suas consequências.

Teorema (Thm 2.1, [4]). *Considere o modelo descrito acima, $D = \{(s, i, r) \in \mathbb{R}^3 : s, i, r > 0, s + i + r = 1\}$ e $D_0 = D \setminus \{(1, 0, 0)\}$. Então:*

1. *A proporção de equilíbrio livre da doença $(s, i, r) = (1, 0, 0)$ sempre existe, e é globalmente assintoticamente estável em D sempre que $R_0 \leq 1$, e instável se $R_0 > 1$;*
2. *quando $R_0 > 1$ existe uma única proporção de equilíbrio $(s, i, r) = (s^*, i^*, r^*)$ com $i^*, r^* > 0$, que é globalmente assintótica em D_0 ;*
3. *a população total $N(t)$ tem comportamento assintótico $N(t) \rightarrow 0$ se $R_1 < 1$, e $N(t) \rightarrow \infty$ se $R_1 > 1$;*
4. *quando $R_1 > 1$, a população total de infectados tem comportamento assintótico $I(t) \rightarrow 0$ se $R_2 < 1$, e $I(t) \rightarrow \infty$ se $R_2 > 1$.*

Referências

- [1] CAPASSO, V., *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Springer, 2008.
- [2] DE OLIVEIRA, E. T., *Teoria de atratores, Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicação ao modelo S.I.R.*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2025.
- [3] DE FIGUEIREDO, D. G., & NEVES, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, 2008.
- [4] BUSENBERG S., & VAN DEN DRIESSCHE P., *Analysis of a disease transmission model in a population with varying size*, Journal of Mathematical Biology, 1990.

Um Estudo Qualitativo de Sistemas Planares de Equações Diferenciais

Kaue Novaki João*

kaunenovaki2@gmail.com¹

Fernando Ávila (Orientador)

fernando.avila@ufpr.br

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Estabilidade, Equações Diferenciais, Autovalores e Autovetores.

Resumo:

Nosso principal objetivo apresentar uma caracterização do comportamento das soluções de um sistema linear de equações diferenciais bidimensional. Veremos que através da forma canônica de Jordan da matriz associada ao sistema é possível descrever o comportamento das soluções quando $t \rightarrow \infty$ através dos autovalores de tal matriz. Em particular, veremos que esse estudo de equações lineares pode ser aplicado a certos problemas não-lineares.

Fundamentação teórica:

Considere o sistema linear de equações diferenciais bidimensional

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

com $A \in M_2(\mathbb{R})$ e $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dentre os principais problemas no estudo de tais equações temos a análise do comportamento das suas soluções através de propriedades da matriz A . Destacam-se dentre diversas técnicas para tal análise relacionar tais propriedades aos autovalores de A e, para tanto, utiliza-se a forma canônica de Jordan.

Para dar uma breve introdução, relembramos que se λ_1, λ_2 são os autovalores de A , então temos as seguintes possibilidades (formas de Jordan):

1. se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

2. se $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e

(a) $\dim(V_{\lambda_0}) = 2$, então $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$.

*Bolsista do programa PET Matemática

(b) $\dim(V_{\lambda_0}) = 1$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

3. se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, então $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$,

em que o símbolo $A \sim B$ indica a existência de uma matriz invertível S satisfazendo

$$A = S \cdot B \cdot S^{-1},$$

sendo

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Assim, provando que o comportamento das soluções de (1) equivale aos de sistemas da forma

$$y'(t) = By(t),$$

teremos uma descrição completa do comportamento das soluções do sistema original. Por exemplo, a equação

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \quad (2)$$

descreve o problema massa-mola e pode ser estudada através do sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$

com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Assim, as discussões sobre a equação diferencial (2) recaem sobre propriedades da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

De fato, o relevante é a configuração dos autovalores de A .

Vale ressaltar que o estudo de sistemas lineares nos permite adquirir informações importantes sobre sistemas não lineares. De fato, seja $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 definida no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ e considere a equação diferencial

$$x' = f(x).$$

Nosso interesse é estudar o comportamento das soluções próximas das soluções de equilíbrio de f , ou seja, próximo dos pontos $x_0 \in \mathcal{A}$ tais que $f(x_0) = 0$. Para isso, iremos linearizar o problema, isto é, denotando por $A = Df(x_0)$ a derivada de f em x_0 , estudaremos o campo linear

$$y' = Ay.$$

A partir dos autovalores de A , podemos determinar informações sobre o ponto x_0 escolhido.

Sejam λ_1, λ_2 autovalores de A , se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

- $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \rightarrow x_0$ é um nó estável.
- $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \rightarrow x_0$ é um nó instável.
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \rightarrow x_0$ é ponto de sela.

Se $\lambda_1 = a + bi, b \neq 0, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$:

- $a < 0 \rightarrow x_0$ é um foco estável.
- $a > 0 \rightarrow x_0$ é um foco instável.
- $a = 0 \rightarrow x_0$ é um centro.

Referências

- [1] DOERING, Cesar I. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- [2] GUEDES DE FIGUEIREDO, Djairo; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.
- [3] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [4] COELHO, Flávio Ulhoa. **Um curso de álgebra linear**. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

Geometria e Topologia

Comissão Científica:

Prof. Dr. Diego Mano Otero
Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel
Prof. Dr. Juan Sebastian Herrera Carmona
Prof^a. Dra. Lilian Cordeiro Brambila
Prof. Dr. Olivier Brahic
Prof. Dr. Ricardo Paleari da Silva

Banca Avaliadora:

Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez

Dr. Diogo Mano Otero

Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel

Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez

Dr. Juan Sebastian Herrera Carmona

Dra. Lilian Cordeiro Brambila

Dr. Olivier Brahic

Dr. Ricardo Paleari da Silva

Dr. Willian Goulart Gomes Velasco

Da Geometria ao Crescimento de Grupos

João Pedro de Castilho Bonini*

joao.bonini@ufpr.br¹

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)

giseleteixeira@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: teoria geométrica de grupos, quasi-isometrias, crescimento de grupos.

Resumo:

O foco da Teoria Geométrica de Grupos consiste em investigar como as propriedades algébricas de grupos finitamente gerados se relacionam com aspectos geométricos de espaços métricos sobre os quais esses grupos podem atuar de maneira apropriada. Desse modo, um grupo finitamente gerado pode ser tratado como um espaço métrico, ao considerar seu grafo de Cayley equipado com a métrica das palavras.

O presente trabalho, produzido em uma pesquisa de Iniciação Científica da Universidade Federal do Paraná, tem por objetivo compreender a geometria de grupos finitamente gerados por meio da métrica das palavras, obtida a partir de apresentações do grupo e de seus grafos de Cayley, estudar propriedades de ações de grupos e quasi-isometrias com foco no Teorema de Milnor–Schwarz, e identificar um dos principais invariantes por quasi-isometrias de um espaço topológico: o crescimento de grupos.

Um **grupo** é um par $(G, \cdot)$ formado por um conjunto G e uma operação binária $\cdot : G \times G \rightarrow G$ que satisfaz:

1. **Fechamento:** Para todos $a, b \in G$, tem-se $a \cdot b \in G$.
2. **Associatividade:** Para todos $a, b, c \in G$, vale $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. **Elemento neutro:** Existe $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$.
4. **Inverso:** Para todo $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Assim, inicia-se com o estudo de **grupos finitamente gerados**. Um grupo G é finitamente gerado se existe um conjunto finito $S \subseteq G$ tal que todo elemento de G pode ser escrito como um produto de elementos de S e seus inversos, assumindo que

*Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC)

$S = S^{-1}$ e $1 \notin S$. A partir desse conjunto de geradores, construímos o **grafo de Cayley** de G com respeito a S , denotado por $\text{Cay}(G, S)$, cujos vértices são os elementos de G e cujas arestas conectam g a gs para cada $g \in G$ e $s \in S$. Este grafo fornece uma representação geométrica de G , permitindo-nos visualizar a estrutura do grupo de forma concreta, como exemplificado a seguir:

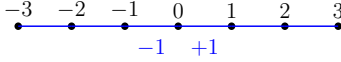


Figura 1: $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$

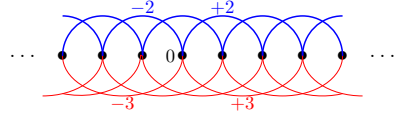


Figura 2: $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{\pm 2, \pm 3\})$

No grafo de Cayley, define-se a **métrica das palavras** d_S , que associa a cada par de elementos $g, h \in G$ o comprimento da menor palavra em S que representa $g^{-1}h$. Essa métrica torna G um espaço métrico discreto e captura a ideia de "distância" entre elementos do grupo em termos da sua expressão nos geradores. Munido de d_S , $\text{Cay}(G, S)$ torna-se um espaço métrico próprio e geodesicamente conexo — isso permite comparar G com outros espaços via aplicações grosseiras (quasi-isometrias), o que motiva o estudo de invariantes por quasi-isometria.

Em seguida, consideram-se as **ações de grupos** em espaços métricos. Uma ação de G em um espaço métrico (X, d) é uma representação de G por isometrias de X . Se $g \in G$ e $x \in X$, denotamos por $g \cdot x$ o elemento de X que é imagem do ponto x pela ação de g . Além disso, a ação de identidade e em qualquer ponto é trivial, isto é, $e \cdot x = x$, e vale, para quaisquer $g, h \in G$, que $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. Dizemos que a ação é *própria* se, para todo subconjunto limitado $B \subseteq X$, o conjunto $\{g \in G : g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ é finito.

Uma ação de um grupo G em um conjunto X define uma relação de equivalência em X , a saber,

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

O conjunto de classes de equivalência será denotado por X/G e chamado de *quociente de X pelo grupo G* . Esse quociente corresponde ao conjunto de órbitas da ação:

$$X/G = \{Gx \mid x \in X\}.$$

A ação é *cocompacta* se o quociente X/G é compacto. Essas propriedades garantem que a ação preserva a estrutura geométrica de X de forma robusta, o que é essencial para relacionar a geometria de G com a de X .

Quasi-isometrias. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de *quasi-isometria* se satisfaz as seguintes condições:

1. f é um *mergulho quasi-isométrico*, ou seja, existem constantes $L \geq 1$ e $A \geq 0$ tais que, para todos $x, x' \in X$,

$$\frac{1}{L} d_X(x, x') - A \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') + A.$$

2. f admite uma *quasi-inversa* $g : Y \rightarrow X$, que também é um mergulho quasi-isométrico, e existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para todos $x \in X$ e $y \in Y$,

$$d_X(g(f(x)), x) \leq C \quad \text{e} \quad d_Y(f(g(y)), y) \leq C.$$

Essa noção ignora distorções locais, preservando apenas a estrutura *em larga escala*. Ao comparar G (com a métrica das palavras) e um espaço (X, d) no qual G age adequadamente e cocompactamente, espera-se que esses espaços sejam quasi-isométricos — como dita o teorema detalhado no parágrafo a seguir.

O **Teorema de Milnor-Schwarz** estabelece uma ponte fundamental entre a álgebra e a geometria: se um grupo G age propriamente e cocompactamente por isometrias em um espaço métrico geodésico e próprio (X, d) , então G é finitamente gerado e quasi-isométrico a X . Em particular, o grafo de Cayley de G (com a métrica das palavras) é quasi-isométrico a X . Isso significa que, do ponto de vista da teoria geométrica de grupos, G e X são geometricamente equivalentes. Assim, invariantes métricos de X que são preservados por quasi-isometrias traduzem-se em invariantes do grupo G .

Chega-se a uma ferramenta quantitativa central para entender a geometria em larga escala dos grupos: o seu crescimento.

O crescimento de grupos é um dos invariantes quasi-isométricos mais estudados na teoria geométrica de grupos, pois conecta a estrutura algébrica de um grupo às propriedades métricas do seu grafo de Cayley. Informalmente, a taxa de crescimento mede, de forma assintótica, quantos elementos do grupo podem ser expressos por palavras de comprimento limitado, e independe da escolha do conjunto finito de geradores. Como o crescimento é preservado por quasi-isometrias, ele se torna uma ferramenta poderosa para classificar grupos em grandes categorias: grupos de crescimento polinomial (caracterizados pelo teorema de Gromov como praticamente nilpotentes), grupos de crescimento exponencial e o intrigante caso intermediário de crescimento subexponencial mas superpolinomial, cuja existência foi estabelecida por Gromov. Dessa forma, o crescimento fornece uma “assinatura geométrica” do grupo, permitindo distinguir famílias distintas e revelando conexões profundas entre álgebra, geometria e análise.

Referências

- [1] BELOLIPETSKY, Mikhail; PAULA, Gisele Teixeira. **An Introduction to Geometric Group Theory**. arXiv preprint arXiv:2409.17797, 2024.
- [2] DE LA HARPE, Pierre. **Topics in Geometric Group Theory**. Chicago: University of Chicago Press, 2000. (Chicago Lectures in Mathematics).
- [3] LÖH, Clara. **Geometric Group Theory: An Introduction**. Cham: Springer, 2017.
- [4] MILNOR, John. **Growth of finitely generated solvable groups**. Journal of Differential Geometry, v. 2, p. 447–449, 1968.

Estudando a Noção de Topologia Através de Redes

Pedro Lascowski Laguna
llpedro16@gmail.com ¹

Gisele Teixeira Paula (Orientador(a))
giseleteixeira@ufpr.br ²

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Convergência, Redes, Sequências.

Resumo:

Neste trabalho, o objetivo é apresentar uma maneira de se estudar continuidade de funções entre espaços topológicos, utilizando métodos de convergência. Nos concentraremos em sequências e redes. Veremos que sequências possuem mais utilidades em espaços topológicos específicos. Além disso, mostraremos que a noção de convergência de redes é mais abrangente que a convergência de sequências.

Definição 1. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma *sequência* em X , é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Denotaremos o elemento $x(n)$ como x_n e a sequência x como a sequência x como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 2. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Dizemos que (x_n) *converge* para $x \in X$ em $(X, \mathcal{T})$ se para todo $V \in \mathfrak{V}(x)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$, tem-se que $x_n \in V$, em que $\mathfrak{V}(x)$ denota o conjunto das vizinhanças de x . Denotamos tal fato por $x_n \rightarrow x$.

O limite de uma sequência nem sempre é único. Vejamos sob quais condições a unicidade do limite é garantida.

Teorema 3. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Se X é Hausdorff, então o limite de toda sequência convergente é único.

Ao buscar uma recíproca para esse resultado, temos o seguinte:

Teorema 4. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Se X é 1º-enumerável e o limite de toda sequência é único, então X é Hausdorff.

O exemplo a seguir mostra que nem todo espaço com limite único é Hausdorff.

Exemplo 5. Sejam X um conjunto infinito, $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{U} \subseteq X; X \setminus \mathcal{U} \text{ é finito}\}$. Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Se $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ é um aberto contendo x e $V \in \mathcal{T}$ é um aberto contendo y , então $X \setminus \mathcal{U}$ e $X \setminus V$ são finitos. Logo, $X \setminus (\mathcal{U} \cap V) = (X \setminus \mathcal{U}) \cup (X \setminus V)$. Assim, $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$, e não existem vizinhanças disjuntas de x, y . Portanto $(X, \mathcal{T})$ não é Hausdorff. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Dizemos que (x_n) converge para $p \in X$ se, para todo aberto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ com $p \in \mathcal{U}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$, $X \setminus \mathcal{U}$ é finito. Portanto, há um número finito de termos da sequência fora de $\mathcal{U}$. Se x_n converge para p , segue que (x_n) é eventualmente constante em p .

Visando a equivalência do Teorema 3, definiremos uma nova noção de convergência.

Definição 6. Um *conjunto dirigido* é um par $(D, \geq)$ onde D é um conjunto não vazio e $\geq$ é uma relação binária em D satisfazendo:

- (i) para todos $m, n, p \in D$, se $m \geq n$ e $n \geq p$, então $m \geq p$;
- (ii) para todo $n \in D$; $n \geq n$;
- (iii) para todos $m, n \in D$, existe $p \in D$ tal que $p \geq m$ e $p \geq n$.

Nestas condições, diremos que $\geq$ direciona X .

Definição 7. Uma *rede* em um conjunto X é uma função $S : D \rightarrow X$ onde D é um conjunto dirigido.

É fácil notar que uma sequência é um caso especial de rede. Utilizaremos a notação S_n no lugar de $S(n)$. Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Escolhendo $S_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ para $\mathcal{U} \in \mathfrak{V}(x)$, então $(S_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in \mathfrak{V}(x)}$ é uma rede em X .

O próximo exemplo mostra uma rede que não é uma sequência.

Definição 8. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $S : D \rightarrow X$ uma rede. Então dizemos que S *converge* para o ponto $x \in X$ se dado qualquer conjunto aberto $\mathcal{U}$ contendo x , existe $m \in D$ tal que para qualquer $n \in D$, com $n \geq m$ temos que $S_n \in \mathcal{U}$. Chamaremos, neste caso, x de um limite de S em X .

Note que a convergência depende tanto da topologia $\mathcal{T}$ como da rede S .

Exemplo 9. Considere o espaço topológico $([0, 1], \mathcal{T})$ onde $\mathcal{T}$ é a topologia usual de subespaço de $\mathbb{R}$. Defina o conjunto dirigido:

$D = \{(a, b) \in (0, 1] \times (0, 1]\}$, $(a, b) \leq (c, d) \iff a \geq c \text{ e } b \leq d$. Agora definimos a rede $S : D \rightarrow [0, 1]$, $S_{(a,b)} = a$. Essa rede converge para 0. de fato, seja $\mathcal{U} = (0, \varepsilon)$ uma vizinhança de 0. Escolha $(c, d) \in D$ com $(c, d) \in D$ com $c < \varepsilon$. Então, para todo $(a, b) \geq (c, d)$, temos $a \leq c < \varepsilon$, logo $S_{(a,b)} \in \mathcal{U}$. Assim, $S_{(a,b)} \rightarrow 0$, na topologia usual de $[0, 1]$.

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 10. Um espaço topológico X é Hausdorff se, e somente se, os limites de todas as redes em X são únicos.

Note que para sequências, tínhamos uma única implicação e para obtermos a recíproca, precisávamos que o espaço topológico fosse 1° -enumerável, o que não é necessário para o caso de redes.

Referências

- [1] GAAL, S. A.; **Point Set Topology**. Nova Iorque.: Academic Press. 1964
- [2] MUNKRES, J. R.; **Topology**: a first course . Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1974.

Estudo de Curvas Planas: Bruxa de Agnesi e Cissoide de Diócles

Luiz Henrique Bahls*

luizhenriquebahls03@gmail.com¹

Ruan Eneias Ferreira†

reneiasferreira@gmail.com²

Prof. Dr. Marciano Pereira (Orientador)

marciano@uepg.br³

^{1, 2, 3}Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

Palavras-chave: parametrização de curvas, Curva de Agnesi, Cissoide de Diócles.

Resumo:

As curvas planas oferecem um campo de estudo rico e, em certa medida, ainda pouco explorado, que pode ser abordado a partir de um nível bastante elementar. A parametrização dessas curvas é um tema recorrente, visto que algumas curvas são melhor manipuladas quando as coordenadas de seus pontos são expressas em função de um parâmetro. Neste estudo, analisamos duas curvas não clássicas: a Curva de Agnesi e a Cissoide de Diócles. Exploramos suas construções geométricas, equações paramétricas, cálculo da curvatura e aspectos históricos, além de realizarmos construções dinâmicas no software GeoGebra.

Nosso estudo iniciou-se compreendendo conceitos básicos de curvas parametrizadas e da Geometria Diferencial. Em seguida, parametrizamos algumas curvas mais simples e usuais no contexto acadêmico como, por exemplo, circunferência, parábola, elipse e hipérbole, para então avançarmos às curvas que apresentaremos neste trabalho.

A primeira delas é a Curva de Agnesi, que pode ser descrita da seguinte forma: considere uma circunferência de raio a e diâmetro OK , situado sobre o eixo y , em que O é a origem do sistema de coordenadas. Seja OA uma secante variável por O , sendo A sua interseção com a tangente à circunferência por K . Se D é a segunda interseção da reta OA com a circunferência, então define-se a **Curva de Agnesi** (figura 1) como o lugar geométrico dos pontos P obtidos pela interseção entre as retas DP e AP , sendo DP paralela ao eixo x e AP perpendicular a ele.

Essa curva apresenta uma curiosidade relacionada ao seu nome. Ela também é conhecida como “Bruxa de Agnesi”, nome que, apesar de soar enigmático, surgiu a

*Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática.

†Voluntário do PICME e acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática.

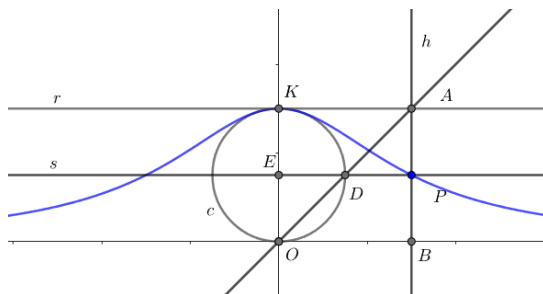


Figura 1: Curva de Agnesi.

partir de um erro de tradução de uma obra de Maria Gaetanea de Agnesi, matemática que realizou estudos sobre tal curva.

A segunda curva estudada foi a Cissoide de Diócles, que também possui uma interessante curiosidade histórica, sua construção solucionou um dos grandes problemas da Matemática Antiga: a duplicação do volume do cubo. Para construí-la, considere uma circunferência γ de diâmetro OA , tal diâmetro está sobre o eixo OX ; além disso, seja AE o segmento tangente à γ em A e defina o ponto D como a intersecção de OE com γ . O ponto P , pertencente a OE , deve satisfazer a condição $|OP| = |DE|$. Então chama-se de **Cissoide de Diócles** (figura 2) o lugar geométrico descrito pelos pontos P .

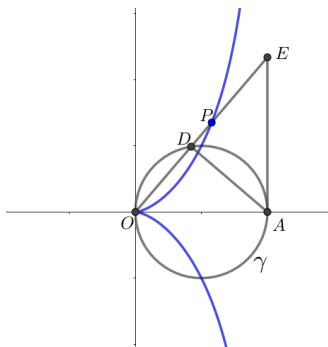


Figura 2: Cissoide de Diócles.

A partir dessas construções, passamos então à parametrização das curvas, ou seja, busca-se expressar as coordenadas dos pontos P em função de um parâmetro t . Em ambos os casos, utiliza-se como parâmetro um ângulo: na Curva de Agnesi, o ângulo $\hat{B}OA$, e na Cissoide de Diócles, o ângulo $\hat{A}OD$.

Com a parametrização em mãos, pudemos então descrever outros aspectos das curvas como, por exemplo, os vetores tangentes e normais, bem como realizar o cálculo da curvatura. Intuitivamente, a curvatura mede a rapidez com que a direção do vetor tangente varia à medida que a curva é percorrida. Além disso, quanto maior for o valor da curvatura (em módulo) em um ponto, mais “dobrada” é a curva ali.

Nosso estudo buscou realizar uma análise matemática mais profunda dessas duas curvas. As construções geométricas, a dedução das equações paramétricas e os cálculos de curvatura proporcionaram uma compreensão enriquecedora. Além disso, o uso do GeoGebra mostrou-se um recurso eficaz para a visualização das curvas, evidenciando o potencial de ferramentas dinâmicas no estudo de tópicos da Geometria Diferencial.

Referências

- [1] CUTRIM, Raimundo José Pinto. **Curvas Planas Parametrizadas: um ensaio para o Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2015.
- [2] GEOGEBRA TEAM. GeoGebra Classic 6. [S. l.]: GeoGebra, 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/u/luizzhenrique>. Acesso em: 25 set. 2025.
- [3] OSEN, Lynn M. **Women in Mathematics**. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1974.
- [4] TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.

Exemplos da fórmula de Weyl para tubos ao redor de subvariedades em baixas dimensões

Celestia Piccioni*

cely42piccioni@gmail.com¹

Juan Sebastián Herrera Carmona (Orientador)

sebastianherrera@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: tubos, fórmula de Weyl, subvariedades.

Resumo:

Dada uma superfície conexa e compacta mergulhada em $\mathbb{R}^3$, podemos nos perguntar o que acontece se adicionarmos uma espessura a essa superfície, como na Figura 1. Qual seria o volume da casca desse objeto? A resposta depende da espessura da casca, da área e da quantidade de buracos da superfície (gênero g).

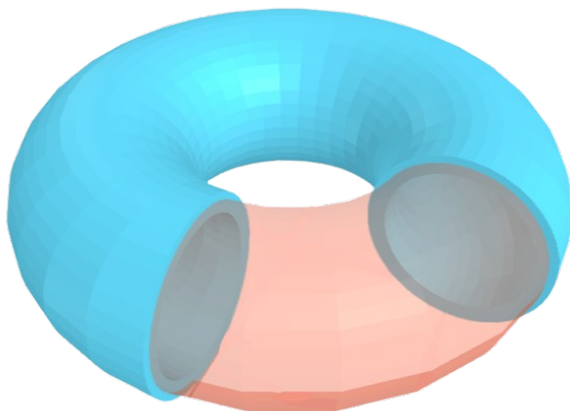


Figura 1: Dado o toro laranja, adicionamos uma espessura e criamos o toro azul, cujo volume da casca depende da sua espessura e da área e do gênero g do toro laranja.

Podemos reescrever nossa pergunta inicial da seguinte maneira: Dada uma subvariedade conexa e compacta P mergulhada em $\mathbb{R}^3$, qual o volume do tubo T ao redor dessa subvariedade? A resposta pode ser obtida através da fórmula de Weyl.

*Bolsista do Programa PICME

Assim, este trabalho tem como objetivo apresentar e introduzir a Fórmula de Weyl para o volume de tubos, utilizando exemplos com subvariedades em baixas dimensões.

Primeiro, definimos o conceito de tubo:

Definição. Seja P uma subvariedade compacta topologicamente mergulhada (com ou sem fronteira) em uma variedade riemanniana M e $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica em M . Então, um tubo $T(P, r)$ de raio $r \geq 0$ ao redor de P é o conjunto de pontos

$$\{p \in M \mid \text{existe } \gamma \text{ tal que } \gamma(0) = p \text{ e } \gamma \perp P \text{ e com comprimento } L \leq r\}$$

Agora, podemos apresentar a fórmula de Weyl, que calcula o volume de um tubo de raio r ao redor de uma subvariedade P de dimensão q , mergulhada em $\mathbb{R}^n$:

$$V_P^{\mathbb{R}^n}(r) = \frac{(\pi r^2)^{(n-q)/2}}{(1/2(n-q))!} \sum_{c=0}^{n/2} \frac{k_{2c}(P)r^{2c}}{(n-q+2)(n-q+4)\dots(n-q+2c)}. \quad (1)$$

Ainda, nesta equação, os k_{2c} são coeficientes, que podem ser calculados em função da curvatura de P . Assim, percebe-se que essa fórmula é simplesmente um polinômio em r . Também, pode-se verificar que a primeira parte

$$\frac{(\pi r^2)^{(n-q)/2}}{(1/2(n-q))!}$$

é a fórmula para o volume de uma esfera mergulhada em $\mathbb{R}^{(n-q)}$.

Após apresentar a fórmula e discutir os casos em que ela é válida, seguimos para o cálculo do volume de tubos em baixas dimensões, onde utilizaremos a expressão mais simples:

$$V_P^{\mathbb{R}^n}(r) = \int_0^r \text{volume}(P_t) dt \quad (2)$$

em que $P_t \subset P$ é um subconjunto definido por $P_t = \{p \in T(P, r) \mid d(p, M) = t\}$, chamado de hipersuperfície tubular de raio t .

A partir dessa equação, conseguimos calcular o volume de tubos ao redor de curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, superfícies em $\mathbb{R}^3$ e meio tubos. Assim, podemos relacionar o volume obtido com a fórmula de Weyl, entendendo sob qual forma ela aparece em casos de baixas dimensões.

Por fim, discutimos como a curvatura da subvariedade aparece nos coeficientes k_{2c} na fórmula de Weyl e, através do teorema de Gauss-Bonnet, mostramos o papel do gênero g no volume do tubo.

Referências

- [1] GRAY, Alfred. **Tubes**. Springer Science & Business Media, 2003.

Filtros

Continuidade para além de topologia.

Guilherme Furquim ¹

¹UFPR

Palavras-chave: Topologia, Convergência, Filtros.

Resumo:

A teoria dos espaços topológicos surge como evolução do estudo das funções contínuas na teoria dos espaços métricos. A estrutura dos espaços topológicos aparece naturalmente dentro da estrutura dos espaços métricos, através da noção de proximidade de pontos formalizada pelo conceito de conjuntos abertos e das propriedades algébricas que essa família de conjuntos abertos satisfaz. A continuidade de uma função é então generalizada, definindo-se como a preservação da estrutura topológica pela preimagem de abertos.

No entanto, a continuidade pode ser vista de forma mais fundamental: uma função é contínua quando preserva a convergência de filtros [1]. Em espaços métricos, a convergência de seqüências já descreve as propriedades topológicas, mas é insuficiente para espaços topológicos mais gerais. Os filtros surgem como uma estrutura capaz de caracterizar continuidade de funções em espaços topológicos através de uma definição “mais forte” de convergência. Uma função é contínua precisamente quando a convergência de um filtro no domínio é preservada pelo prefiltro induzido pela imagem no contradomínio.

Essa observação conduz ao conceito de espaço de convergência. Um espaço de convergência consiste em um conjunto munido de uma relação entre filtros e pontos que indica quais filtros convergem para quais pontos. Essa relação deve respeitar duas condições mínimas: se um filtro é refinado por outro, então todo limite do primeiro é também limite do segundo; e todo ponto é sempre limite do seu filtro principal, aquele formado pelos subconjuntos que o contêm. Com isso, obtém-se uma estrutura suficientemente flexível para tratar de convergência sem recorrer a abertos.

Definição 1. *Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}(X)$ a coleção de filtros sobre X . Uma convergência sobre X é uma relação $\xi \subseteq X \times \mathcal{F}(X)$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo $x \in X$, temos $x \in \lim_{\xi} \{x\}^{\uparrow}$, onde $\{x\}^{\uparrow}$ é o filtro principal em x .*
2. *Se $F \leq G$ (isto é, G é refinado por F) e $x \in \lim_{\xi} F$, então $x \in \lim_{\xi} G$.*

A estrutura (X, ξ) é chamada de espaço de convergência.

Todo espaço topológico carrega naturalmente uma estrutura de espaço de convergência. Dada uma topologia sobre um conjunto X , definimos que um filtro $\mathcal{F}$ converge para um ponto x quando contém todas as vizinhanças de x . Essa definição satisfaz as condições anteriores e mostra que toda topologia induz uma convergência. Inversamente, nem toda convergência provém de uma topologia, o que evidencia que os espaços de convergência formam uma categoria mais ampla que a dos espaços topológicos.

A continuidade pode então ser formulada de forma unificada: uma função $f : X \rightarrow Y$ entre espaços de convergência é contínua em x quando, para todo filtro $\mathcal{F}$ convergindo para x , o filtro imagem $f[\mathcal{F}]$ converge para $f(x)$. No caso particular em que as convergências são induzidas por topologias, essa definição coincide exatamente com a noção usual de continuidade.

Referências

- [1] DOLECKI, S. **A royal road to topology: convergence of filters**. [S.l.]: World Scientific, 2024.

Filtros na Topologia

Caracterizando continuidade a partir de filtros

Guilherme Furquim ¹

¹UFPR

Palavras-chave: Topologia, Filtros, Convergência.

Resumo:

A teoria dos espaços topológicos surge como evolução do estudo das funções contínuas na teoria dos espaços métricos. Um espaço topológico pode ser visto como uma generalização natural de um espaço métrico pela ótica da continuidade: todo espaço métrico pode ser visto como um espaço topológico (com a topologia induzida pela métrica) e a definição topológica de funções contínuas coincide com a definição métrica quando seu domínio e contradomínio são espaços métricos.

A topologia não se desenvolveu apenas pelo prazer da abstração, mas torna possível falar sobre continuidade em espaços com estrutura topológica sem recorrer à ferramentas desnecessárias, como a métrica. Um exemplo disso são espaços métricos que não possuem estrutura métrica equivalente (isométricos), mas possuem estrutura topológica equivalente (homeomorfos). Neste caso os espaços em questão tem os mesmos invariantes topológicos, como a propriedade de ser compacto ou conexo, mas podem não ter os mesmos invariantes métricos, como completude.

Um espaço topológico é um par $(X, \mathcal{T})$ formado por um conjunto X e uma coleção $\mathcal{T} \subset 2^X$ de subconjuntos de X , chamados abertos, satisfazendo as seguintes propriedades: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ é fechada para uniões arbitrárias e interseções finitas.

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um ponto $x \in X$. Dizemos que o conjunto V é uma vizinhança de x quando existe $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tal que $x \in \mathcal{U} \subset V$. Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ a coleção de todas as vizinhanças de x .

Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando para todo aberto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$ tem-se $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_X$.

Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua no ponto $x \in X$ quando para cada vizinhança V de $f(x)$ em Y , a preimagem $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança do ponto x em X . Não é difícil ver que para que uma função seja contínua, é necessário e suficiente que seja contínua em cada ponto do domínio.

Uma base de vizinhanças de um ponto $x \in X$ é uma coleção $\mathcal{B}_x$ de vizinhanças de x tal que para cada vizinhança V de x , existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset V$. Dizemos que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, ou que é um espaço $E1$, quando cada ponto admite uma base de vizinhanças enumerável.

Uma prática padrão na matemática é o estudo das aplicações que preservam alguma estrutura. Muitas dessas aplicações são definidas em termos de quais proprie-

dades são “carregadas” do domínio para a imagem, por exemplo

$$\begin{array}{ll} \text{homomorfismo de grupos} & f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\ \text{transformação linear} & f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \\ \text{isometria} & d(x, y) = d(f(x), f(y)) \end{array}$$

Mas algumas aplicações não são definidas em termos de propriedades carregadas do domínio até a imagem, mas de propriedades “puxadas” através da preimagem, como a definição de função contínua dada acima; ou a definição de função mensurável, análoga a definição de continuidade, onde a preimagem de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Essa dicotomia entre propriedades preservadas pela imagem ou preimagem nos faz pensar se existe alguma propriedade que funções contínuas preservam através da imagem. A melhor candidata é a noção de convergência, explicitada nos resultados a seguir:

Definição. Uma sequência num espaço topológico X é uma aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Também representamos f pela notação $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e seus valores $x_n = f(n)$. Dizemos que a sequência f converge para um ponto $x \in X$ quando para cada vizinhança V do ponto x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso denotamos $x_n \rightarrow x$.

Definição. Uma aplicação entre espaços topológicos $f : X \rightarrow Y$ é dita *sequencialmente contínua* quando para todo $x \in X$ e toda sequência convergente $x_n \rightarrow x$ tem-se $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Proposição 1. Se uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então é sequencialmente contínua.

Os espaços topológicos em que continuidade é equivalente à continuidade sequencial são chamados espaços sequenciais. Todo espaço primeiro-enumerável é sequencial, mas existem espaços sequenciais que não são primeiro-enumeráveis.

A necessidade de uma teoria da convergência “mais forte” que a de sequências é evidenciada pela existência de espaços não-sequenciais.

Exemplo. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{coen}})$ não é sequencial. Onde $\mathcal{T}_{\text{coen}} = \{A \subset \mathbb{R}; A^c \text{ enumerável}\} \cup \{\emptyset\}$.

Demonstração. Tome um ponto $x \in \mathbb{R}$ qualquer e considere $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{coen}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ a função identidade, com a topologia discreta no contradomínio. Sabendo que toda sequência convergente em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{coen}})$ é eventualmente constante segue que f é sequencialmente contínua. Mas f não pode ser contínua, senão cada conjunto unitário seria aberto em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{coen}})$, um absurdo pois o complementar de um conjunto unitário em $\mathbb{R}$ não é enumerável. $\square$

Definição. Um filtro [1, 2] num conjunto X é uma coleção $\mathcal{F} \subset 2^X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{l} \emptyset \notin \mathcal{F} \\ F \in \mathcal{F}, F \subset G \implies G \in \mathcal{F} \\ F, G \in \mathcal{F} \implies F \cap G \in \mathcal{F} \end{array}$$

Definição. Sejam X um conjunto, Y um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um filtro em X . Dizemos que o ponto $y \in Y$ é um limite da função $f : X \rightarrow Y$ segundo o filtro $\mathcal{F}$, e denotamos $y = \lim_{\mathcal{F}} f$, quando para cada vizinhança V de y existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $f(F) \subset V$. Nessas condições, caso $Y = X$ e f seja a função identidade, dizemos que y é um limite do filtro $\mathcal{F}$, e escrevemos $\mathcal{F} \rightarrow y$.

A noção de convergência de seqüências segue como um caso particular da convergência de filtros.

Exemplo. Considere em $\mathbb{N}$ o filtro cofinito $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N}; A^c \text{ é finito}\}$. A convergência da seqüência $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$, no espaço topológico $(Y, \mathcal{T})$, equivale a convergência de f segundo o filtro $\mathcal{F}$.

Proposição 2. Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma função $f : X \rightarrow Y$ seja contínua no ponto $x \in X$ é necessário e suficiente que, dado qualquer filtro $\mathcal{F}$ em X tal que $\mathcal{F} \rightarrow x$, tenha-se $\lim_{\mathcal{F}} f = f(x)$.

Demonstração. Suponha f contínua no ponto $x \in X$ e $\mathcal{F}$ um filtro em X tal que $\mathcal{F} \rightarrow x$. Então para qualquer vizinhança $V \in \mathcal{N}(f(x))$ a preimagem $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x , da convergência de $\mathcal{F}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset f^{-1}(V)$, donde $f(F) \subset V$ e segue que $\lim_{\mathcal{F}} f = f(x)$.

Reciprocamente, se $x \in X$ é um ponto tal que para todo filtro $\mathcal{F}$ convergindo para x tem-se $\lim_{\mathcal{F}} f = f(x)$. Em particular, tomando o filtro das vizinhanças $\mathcal{F} = \mathcal{N}(x)$, claramente $\mathcal{F} \rightarrow x$, tem-se $\lim_{\mathcal{F}} f = f(x)$. Ora, isso quer dizer que para toda vizinhança $V \in \mathcal{N}(f(x))$ existe uma vizinhança $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ tal que $f(\mathcal{U}) \subset V$, segue que f é contínua no ponto x . $\square$

A proposição acima mostra podemos definir continuidade em espaços topológicos através da noção de convergência de filtros. Para ficar mais claro o paralelo com a noção de continuidade sequencial da definição anterior, fazemos a seguinte observação:

Observação. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua no ponto $x \in X$. Para todo filtro $\mathcal{F}$ em X convergindo para o ponto x denote o conjunto $f[\mathcal{F}] = \{A \subset Y; \exists F \in \mathcal{F}, f(F) \subset A\}$, então $f[\mathcal{F}]$ é um filtro em Y convergindo para $f(x)$. A proposição anterior é equivalente a

$$f \text{ é contínua no ponto } x \iff (\mathcal{F} \rightarrow x \implies f[\mathcal{F}] \rightarrow f(x))$$

Referências

- [1] DOLECKI, S. **A royal road to topology: convergence of filters**. [S.l.]: World Scientific, 2024.
- [2] LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2024.

Formas diferenciais e formalismo de Hamilton em fractais.

Matheus Erevaldo Krüger Gebeluc*

22001409@uepg.br¹

Jocemar de Quadros Chagas (Orientador)

jocemarchagas@uepg.br²

^{1,2}Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)

6 de novembro de 2025

Palavras-chave: fractal, Hamilton, formas, fracionária

Resumo:

O objetivo deste trabalho é apresentar a versão generalizada das equações de Hamilton, ou seja, as equações de Hamilton-Jacobi com derivadas fracionárias. Para isto, apresentaremos como as formas diferenciais se comportam em fractais, para assim, derivarmos tais equações.

1 Preliminares:

Começaremos por algumas definições básicas do cálculo de variações em termos de formas.

Definição 1.1 *Seja K uma n -variedade diferenciável, então o funcional linear definido como:*

$$\alpha : K_p^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

é chamado covetor.

Definição 1.2 *O conjunto de todos os covetores de todos os pontos da variedade é chamado espaço de fase, e é definido como:*

$$C^*(K^n) = {}^*K^n := \{(x, \alpha(x)); x \in K^n\}.$$

Definição 1.3 *O "espaço de fase estendido" é definido como o conjunto:*

$$M^{2n+1} = {}^*K^n \times \mathbb{R}^+ := \{(y, t); y \in {}^*K^n, t \in \mathbb{R}^+\}.$$

¹Bolsista do Programa de iniciação científica (PIBIC)

Uma maneira de se encontrar as equações de Hamilton-Jacobi é pelo seguinte formalismo:

Definição 1.4 Para uma partícula com momento generalizado p e coordenadas generalizadas q em estado estacionário, a sua ação é dada por:

$$S[p, q] = \int_R [p_i D_t(q_i) - H(t, p, q)] dt.$$

Onde H é o Hamiltoniano da partícula.

Definição 1.5 A 1-forma ω_H dada por:

$$\omega_H = p_i dq_i - H dt.$$

é chamada 1-forma de ação ou 1-forma de Cartan-Poincaré.

Definição 1.6 As equações de Hamilton-Jacobi são dadas resolvendo:

$$d\omega_H = 0.$$

Por meio destas equações podemos generalizar todo nosso formalismo.

2 Formas fracionárias e derivada exterior fracionária.

Definição 2.1 Definimos a 0-forma diferencial como:

$$\omega_{0,\alpha} = f(x).$$

Onde $f(x)$ é uma função de classe C^∞ .

Neste caso uma 0-forma e uma 0-forma de ordem α são iguais.

Definição 2.2 Definimos a derivada exterior de ordem α de alguma 0-forma com $0 \leq \alpha < 1$, como:

$$d^\alpha f(x) = {}^C D^\alpha f(x) [dx]^\alpha.$$

Onde:

$$[dx]^\alpha = \text{sgn}(dx) |dx|^\alpha$$

Algumas propriedades da derivada exterior generalizada:

- $d^\alpha(d^\alpha x) \neq 0$
- $d(d^\alpha x) = 0$

A regra de Liebniz, ou seja, a compatibilidade com o produto exterior $d^\alpha(x \wedge y) = x \wedge d^\alpha(y) + d^\alpha(x) \wedge y$ em geral não é satisfeita. Outra propriedade que não é satisfeita é a de que $d^\alpha(d^\beta x) \neq d^{\alpha+\beta} x$.

Definição 2.3 Seja $f(x)$ uma 0-forma, então sua derivada exterior generalizada é dada por:

$$d^\alpha f(x) = {}^C D_{x_j}^\alpha f(x) [dx_i]^\alpha$$

Definição 2.4 *Seja $\omega_{1,\alpha}$ uma 1-forma de ordem α , então sua derivada exterior generalizada é dada por:*

$$d^{\alpha}\omega_{1,\alpha} = {}^CD_{x_j}^{\alpha} F^i [dx_j]^{\alpha} \wedge [dx_i]^{\alpha}.$$

Dada a definição a cima, em geral, que:

$$d^{\alpha+\beta} f(x) = {}^CD_{x_j}^{\alpha+\beta} f(x) [dx_i]^{\alpha+\beta}.$$

No entanto:

$$d^{\alpha}d^{\beta}(f(x)) = \frac{1}{2} \left({}^CD_{x_j}^{\alpha} ({}^CD_{x_i}^{\beta} f(x)) - {}^CD_{x_i}^{\beta} ({}^CD_{x_j}^{\alpha} f(x)) \right) [dx_j]^{\beta} \wedge [dx_i]^{\alpha}.$$

Podemos considerar a mesma definição para qualquer p-forma diferencial.

Definição 2.5 *Uma 1-forma diferencial de ordem α é dada pelo campo:*

$$\omega_{\alpha,1} = F_i(x) [dx_i]^{\alpha}.$$

Definição 2.6 *A forma de Cartan-Poincaré de ordem alpha é dada por:*

$$\omega_{H,\alpha} = p_i [dq]_i^{\alpha} - H[dt]^{\alpha}.$$

Definição 2.7 *As equações de Hamilton-Jacobi generalizadas são dadas resolvendo:*

$$d^{\alpha}\omega_H = 0$$

Podemos ainda generalizar diferentes tipos de operadores de derivadas, como divergente e rotacional por exemplo, por meio das formas diferenciais generalizadas, confira [1]. Além disso, as formas generalizadas ligam o cálculo fracionário e a teoria de fractais.

3 Conclusões

Os avanços de cálculos alternativos tem mostrados novas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Podemos encontrar vários resultados novos por meio de derivadas generalizadas, confira [2] e [3] para alguns exemplos, porém para revisar e aplicar tais generalizações, formalizações rigorosas como esta apresentada neste trabalho, são necessárias para compreender seu significado.

Referências

- [1] TARASOV, Vasily E. **Fractional dynamics**. Berlin: Springer, 2010.
- [2] TARASOV, Vasily E. Fractional Vector Calculus and Fractional Maxwell's Equations. **Annals of Physics**, v. 323, n. 11, p. 2756-2778, 2008.
- [3] PODLUBNY, Igor. **Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications**. Elsevier, 1. ed., 340 p., 1998.

Geodésicas via o cálculo das variações

Tiago Filipe Pires Galu*

tiago.galu@ufpr.br¹

Diego Otero (Orientador)

otero@ufpr.br²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: cálculo das variações, geodésicas, geometria Riemanniana.

Resumo:

O cálculo de variações fornece aplicações em diversas áreas de pesquisa como mecânica analítica, mecânica quântica, relatividade geral, ótica geométrica, teoria de controle ótimo, geometria Riemanniana e semi-Riemanniana, dentre outras. A proposta deste trabalho é explorar as ferramentas do cálculo das variações necessárias para estudar conceitos em geometria Riemanniana e geometria semi-Riemanniana, abordando exemplos particulares.

O ponto de partida será a análise de pontos críticos de funcionais $\mathcal{F}$ do tipo abaixo, definidos na família de curvas $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ suaves com extremidades fixas:

$$\mathcal{F}(c) = \int_a^b L(c(t), c'(t)) dt,$$

com $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave. A função L é chamada de **Lagrangiano** do funcional $\mathcal{F}$ e é definida dependendo da situação a qual se queria estudar pontos críticos. Por exemplo, problema de curvas que minimizam distância entre dois pontos fixos (geodésicas), problema da braquistócrona, princípio da mínima ação em mecânica e princípio de Fermat.

Os pontos críticos γ do funcional acima, irão satisfazer uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem, chamada de **equação de Euler-Lagrange** dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0,$$

sendo $(q, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ argumentos da função $L = L(q, v)$. A partir dessa condição podemos estudar certa estrutura de alguns problemas. Por exemplo, em geometria Riemanniana, os coeficientes (**símbolos de Christoffel**) da equação de Euler-Lagrange fornecem parte da estrutura da superfície (ou variedade) na qual estamos estudando o problema de geodésicas.

*Bolsista do PET-Matemática UFPR

Na geometria Riemanniana e semi-Riemanniana, esta estrutura se relaciona com conceitos geométricos importantes, por exemplo, curvatura. Estudaremos alguns exemplos de superfícies munidas com métricas Riemannianas e semi-Riemannianas, e nestes casos pretendemos estudar relações e propriedades entre geodésicas e curvatura, por exemplo, teorema de comparação de Rauch e teorema de Toponogov.

Referências

- [1] do CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. SBM, 2022.
- [2] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry** with applications to Relativity. Academic Press, 1983.
- [3] CHEEGER, J.; EBIN, D. G. **Comparison Theorems in Riemannian Geometry**. North Holland, 1975.

Incírculo de um Triângulo Hiperbólico

Pedro Carvalho Igreja*

pedro.igreja@ufpr.br¹

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)

giseleteixeira@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Transformação de Möbius, triângulo hiperbólico, incírculo.

Resumo:

Na geometria euclidiana, dado um círculo, é possível traçar um triângulo que o tenha como incírculo; no entanto, o mesmo nem sempre é possível na geometria hiperbólica.

A geometria hiperbólica nega o 5º postulado de Euclides e por mais que seja muito diferente da euclidiana, é tão consistente quanto ela. A geometria hiperbólica mostra um mundo curioso, onde os ângulos de um triângulo podem ser muito pequenos, desde que os lados sejam suficientemente grandes. A soma dos ângulos de um triângulo é menor do que π , porém a área dele nunca pode exceder um certo limite. Já por esse fato, é possível deduzir que há um tamanho limite para que o círculo caiba nele; o presente estudo mostra como calcular este limite.

Para chegar ao resultado principal, estudamos dois modelos do plano hiperbólico, a saber, o semiplano superior $\mathbb{H}$ e o disco de Poincaré $\mathbb{D}$. Para esses modelos, trabalhamos com as respectivas métricas, estudando, entre outros objetos, seu grupo de isometrias, que é completamente descrito a partir das Transformações de Möbius. Além disso, demonstramos qual triângulo hiperbólico tem o incírculo de maior raio e também apresentamos construções em $\mathbb{H}$ e em $\mathbb{D}$ para cercar um dado círculo.

O Incírculo de Maior Raio.

Primeiramente, é preciso descobrir qual triângulo tem o maior incírculo.

Chamamos de triângulo ideal um triângulo em qualquer um dos modelos do plano hiperbólico que contenha os três vértices na fronteira desse espaço. Observamos que todos os triângulos ideais são congruentes. Num triângulo qualquer em $\mathbb{H}$, não ideal, há uma transformação de Möbius, γ , que leva o vértice de maior ângulo para i , onde $i = \sqrt{-1}$, de modo que um de seus lados seja levado sobre a reta $x = 0$. É possível mostrar que um triângulo ideal, com lados descritos pelas retas $x = 0$, $x = c$ e o semicírculo com pontos finais 0 e c , no eixo- x , contém esse triângulo. Assim, o triângulo original está contido na imagem desse triângulo ideal pela inversa de γ . Com essa construção, pode ser demonstrado o seguinte lema.

*Bolsista do Programa PICME

Lema. Todo triângulo está contido em um triângulo ideal.

Além disso, usaremos o seguinte resultado para chegar ao raio máximo de um círculo inscrito em um triângulo hiperbólico.

Lema. O círculo de maior raio possível de ser traçado dentro de um triângulo é o incírculo.

De fato, para um triângulo T , considere $f(x) = \min\{d(x, l_1), d(x, l_2), d(x, l_3)\}$, $x \in T$, onde $d(x, l_n)$ é a distância do ponto x ao lado l_n . Como a área de T é limitada, existe um supremo de $f(x)$.

Se o supremo não fosse equidistante dos lados, seria possível movê-lo a fim de aumentar a distância mínima, o que seria uma contradição.

Logo o supremo de $f(x)$ é um ponto equidistante aos lados do triângulo, i.e. o incentro. Logo o incírculo é o círculo de maior raio que pode ser traçado dentro de um dado triângulo.

Corolário. Qualquer triângulo ideal tem o incírculo de maior raio.

Todo triângulo pode ser cercado por um triângulo ideal, pelo Lema 2.1. Então o incírculo de todo triângulo pode ser traçado dentro do triângulo ideal. Logo, pelo Lema 2.2, o incírculo do triângulo ideal é o maior incírculo.

Construções.

Dado um círculo hiperbólico, denotaremos seu centro por z_c e seu raio por r . Esse círculo também é um círculo euclidiano, cujo centro será denotado por z_e e chamaremos de R seu raio euclidiano. É possível traçar um triângulo hiperbólico que tenha esse círculo como incírculo?

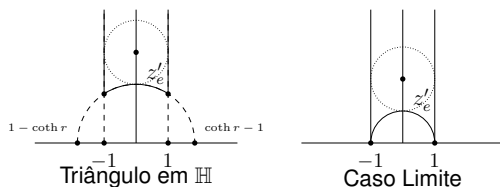
Como vimos, a resposta é que nem sempre. Isso se deve ao fato de que a área de um triângulo hiperbólico de ângulos α, β e γ é igual a $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, nunca excedendo π . Como a área de um disco hiperbólico de raio r é dada por $2\pi(\cosh r - 1)$, esse raio precisa ser suficientemente pequeno para que ocorra a inclusão.

Apresentamos duas formas de deduzir qual é o valor máximo para o raio do incírculo, bem como de construir tal triângulo, a partir de um círculo dado. Elas usam um recurso comum em demonstrações de geometria hiperbólica, que consiste em utilizar transformações de Möbius para levar um objeto a uma posição conveniente no plano, resolver ali o problema associado a este objeto, e depois retorná-lo pela inversa, junto com a solução do problema obtida, de modo a encontrar a solução do problema original.

Triângulo em $\mathbb{H}$.

Conhecendo as coordenadas $Re(z_c) = x_c$ e $Im(z_c) = y_c$ do centro do círculo, o centro euclidiano será $z_e = x_c + iy_c \cosh r$. Existe uma transformação de Möbius, denotada por γ , que leva z_e para o eixo imaginário e que torna $R = 1$. Assim, $\gamma(z_e) = i \coth r$, as geodésicas completas $x = 1$ e $x = -1$ tangenciam o círculo. Elas se encontram em ∞ , com ângulo 0.

O último lado será um círculo ortogonal ao eixo- x com centro em $(0, 0)$. Ele terá raio $\coth r - 1$; logo, sua equação será: $(\coth r - 1)^2 = x^2 + y^2$.



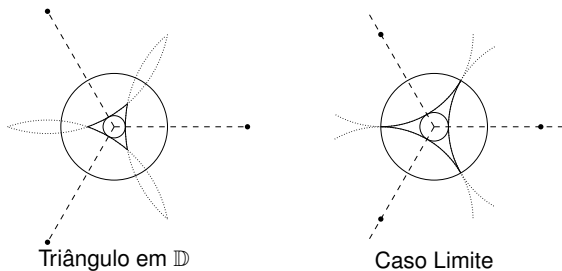
Para concluir, é necessário levar o círculo de volta para seu lugar original, usando γ^{-1} , o que permite descrever uma expressão completa para os vértices e os lados do triângulo buscado.

O caso limite acontece quando $\coth r - 1 = 1$, o triângulo ideal, logo $r \leq \coth^{-1} 2 \approx 0.549$. Então, a área máxima será $2\pi(\cosh r - 1) \approx 0.972$.

Triângulo em $\mathbb{D}$.

Se consideramos agora $z_c \in \mathbb{D}$, existe uma transformação de Möbius, denotada por σ , que leva z_c para a origem. Com o círculo na origem, obtemos a relação $R = \tanh \frac{r}{2}$.

De fato, existe um triângulo hiperbólico equilátero, com lados determinados por círculos ortogonais ao disco, que tem este círculo como incírculo. Com os centros destes lados localizados nas retas $y = 0$; $y = -\sqrt{3}x$; $y = \sqrt{3}x$, basta deduzir a equação de um círculo que encontrará as outras.



Finalmente, é necessário levar o círculo de volta para seu lugar original, usando σ^{-1} , assim é possível descrever uma expressão completa para os vértices e os lados do triângulo buscado. O caso limite é $r = 2 \tanh^{-1}(2 - \sqrt{3}) \approx 0.549$, o mesmo valor de r , o que faz sentido, pois o caso limite das duas é o triângulo ideal. A área máxima, então, também será a mesma.

Referências.

BONAHON, Francis. **Low-Dimensional Geometry: From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2009.

WALKDEN, Charles. **Hyperbolic Geometry**. Manchester: University of Manchester, 2019.

Introdução à Teoria de Morse-Bott

Lucas Xavier*
xavierlucas@ufpr.br¹

¹UFPR

Palavras-chave: Variedades Diferenciáveis, Lema de Morse, Lema de Morse-Bott

Resumo:

A Teoria de Morse, desenvolvida por Marston Morse na década de 1920, possui como ideia central a investigação da forma global de um espaço por meio do estudo dos pontos críticos de uma função suave nele definida. Em vez de analisar diretamente a estrutura topológica global, a teoria concentra-se no comportamento local da função ao redor desses pontos.

O problema motivador da teoria é entender como a topologia de uma variedade diferenciável pode ser construída a partir de uma função. Considere os subconjuntos de nível $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ de uma variedade M . A questão central é: como o tipo de topologia de M^a se altera à medida que o valor de a aumenta? A primeira grande observação da teoria é que, enquanto um intervalo $[a, b]$ não contém valores críticos de f , os espaços M^a e M^b são topologicamente equivalentes. Portanto, qualquer mudança na topologia deve ocorrer precisamente ao se atravessar o nível de um ponto crítico.

Definição 1. Uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *Função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não degenerados (ou seja, a matriz hessiana de f no ponto p é não singular).

Teorema 1. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Suponha que o intervalo $[a, b]$ contenha um único valor crítico $c \in (a, b)$, correspondente a um único ponto crítico $p \in f^{-1}(c)$ de índice de Morse k . Então, a subvariedade $M^b = f^{-1}((-\infty, b])$ é homotopicamente equivalente a $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ com uma k -célula anexada.

O teorema fundamental acima depende crucialmente da hipótese de que os pontos críticos são não-degenerados, ou seja, isolados, entretanto, podemos estender a teoria para um cenário mais geral, focando nas subvariedades formadas pelos pontos críticos da nossa aplicação original, permitindo uma aplicação da teoria a uma classe muito mais ampla de funções e espaços.

*Bolsista do Programa de PET-Matemática

Definição 2. Uma subvariedade suave $C \hookrightarrow M$ é dita uma *subvariedade crítica não-degenerada* se $C \subset C_f$ (o conjunto de pontos críticos de f), C é conexa, e para todo $p \in C$, a forma simétrica induzida $h_p f$ é não-degenerada. Dizemos que f é uma *função de Morse-Bott* se as componentes conexas de C_f são subvariedades críticas não-degeneradas.

Teorema 2. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Bott e C uma componente conexa do conjunto de pontos críticos C_f , sendo C uma subvariedade de dimensão k . Então, para um ponto $p \in C$, existe um sistema de coordenadas locais:

$(U; \varphi = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k})) : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ contendo p tal que $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap C) = \{(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}) \in V \mid (y_1, \dots, y_{n-k}) = (0, \dots, 0)\}$, e a identidade

$$f = f(C) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_{n-k}^2$$

seja válida em todo o domínio U , onde λ é o índice de Morse-Bott de $h_p f$ e $f(C)$ é o valor constante que a função f assume para todos os pontos de C .

Referências

- [1] MILNOR, J. **Morse Theory**. Annals of Mathematics Studies, Vol. 51. Princeton: Princeton University Press, 1969.
- [2] BANYAGA, Augustin; HURTUBISE, David E. **A proof of the Morse-Bott Lemma**. Expositiones Mathematicae, v. 22, n. 4, p. 365-373, 2004.
- [3] DO CARMO, Manfredo P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

Lema de Morse

Camilly Silva dos Anjos
camillyanjos@ufpr.br e ¹

Lucas Xavier
lucasxavier@ufpr.br ²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná - UFPR

Palavras-chave: Lema de Morse, variedade diferenciável, índice de Morse

Resumo:

A teoria de Morse permite analisar a topologia de uma variedade por meio do estudo de funções diferenciáveis definidas sobre ela. A ideia fundamental, proposta por Marston Morse, é que uma função suave típica em uma variedade reflete diretamente a estrutura topológica desse espaço. Assim, a teoria de Morse fornece um método poderoso para decompor variedades e compreender sua forma e suas propriedades globais.

O foco do presente estudo é o **Lema de Morse**, um resultado que descreve a estrutura local de uma função em torno de um ponto crítico não degenerado. O Lema afirma que, em uma vizinhança de tal ponto, a função pode ser representada por uma forma quadrática, uma soma de quadrados. A quantidade de termos negativos nessa soma é determinada unicamente pelo número de autovalores negativos da matriz Hessiana da função.

Antes de enunciar o Lema, é necessário recordar algumas definições básicas gerais:

Definição 1. Uma variedade diferenciável suave de dimensão n é um espaço topológico M (Hausdorff, com base enumerável e localmente euclidiano) munido de um atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha \in A$ tal que, para todo par de índices $\alpha, \beta \in A$ para os quais a interseção $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação de mudança de coordenadas

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é um difeomorfismo.

Definição 2. Um ponto crítico p de uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dito *não degenerado* se a sua matriz Hessiana $H_f(p)$ for invertível

Os seguintes conceitos são centrais para a teoria:

Definição 3. Uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *Função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não degenerados.

Definição 4. Seja p um ponto crítico não degenerado de uma função de Morse f . O *índice de Morse* de f em p é o número de autovalores negativos da matriz Hessiana $H_f(p)$.

Com essas noções, chegamos ao enunciado fundamental:

Lema de Morse: Seja p um ponto crítico não degenerado de uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com índice de Morse k . Então, existe um sistema de coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n)$ em uma vizinhança U de p , com $x_i(p) = 0$, tal que, para todo $q \in U$, a função assume a forma canônica:

$$f(q) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i(q)^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i(q)^2.$$

Esse resultado garante que a natureza de um ponto crítico não degenerado depende apenas da assinatura de sua Hessiana.

Outro pilar da teoria é o teorema que garante a ausência de mudanças topológicas entre níveis críticos (frequentemente chamado de Teorema da Ausência de Pontos Críticos ou primeira parte do Teorema Principal de Morse). Ele assegura que, em uma região sem pontos críticos, a topologia da variedade se mantém inalterada.

Teorema da Ausência de Pontos Críticos: Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ não contém valores críticos de f , então a região $f^{-1}([a, b])$ é difeomorfa ao produto $f^{-1}(a) \times [a, b]$. Em particular, a topologia da subvariedade com bordo $M^c = f^{-1}((-\infty, c])$ não se altera para $c \in [a, b]$.

A combinação deste princípio com o Lema de Morse forma o alicerce de toda a teoria, fornecendo um método para reconstruir a estrutura de uma variedade analisando exclusivamente seus pontos críticos não degenerados.

Por fim, vale destacar que a união do Lema de Morse com o teorema sobre a estabilidade entre níveis críticos conduz diretamente ao Teorema da Alça. Este teorema descreve precisamente como a topologia de uma variedade se altera ao atravessar o nível de um ponto crítico. Esse encadeamento de resultados ilustra a força da teoria de Morse em construir uma ponte sólida entre a análise local de funções e a estrutura topológica global das variedades.

Referências

- [1] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- [2] MILNOR, John W. **Morse Theory**. Princeton: Princeton University Press, 1963.
- [3] HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

O Funcional de Willmore e Desigualdades Geométricas em Variedades de Curvatura Escalar Não-Negativa

Bruno Bonassoli

brunobonassoli@ufpr.br¹

Prof. Dr. Rodrigo Ristow Montes (Orientador)

ristow@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná — UFPR

Palavras-chave: Funcional de Willmore, Desigualdades Geométricas, Curvatura Escalar, Geometria Diferencial, Análise Geométrica, Cálculo de Variações.

Resumo:

O presente trabalho dedica-se ao estudo de um funcional clássico do cálculo de variações geométrico, o funcional de Willmore, no contexto de imersões em variedades Riemannianas. Uma variedade Riemanniana é um par (M, g) , onde M é uma variedade diferenciável e g é um tensor métrico que define um produto interno em cada espaço tangente, permitindo a medição de comprimentos e ângulos. O objetivo é investigar como a geometria do espaço ambiente (M, g) , especificamente sua curvatura, impõe restrições sobre a energia de Willmore de subvariedades imersas. Para uma imersão $\phi : S \rightarrow (M^3, g)$ de uma superfície compacta S , a geometria extrínseca é codificada pela segunda forma fundamental, um tensor que mede a componente normal da aceleração de curvas em S . A partir do traço deste tensor, define-se a curvatura média H . O funcional de Willmore é então dado pela integral do quadrado da curvatura média sobre a superfície:

$$W(S) = \int_S H^2 dA.$$

O problema mais célebre associado a este funcional foi a Conjectura de Willmore, agora um teorema provado por Marques e Neves, que estabelece que a energia de Willmore para qualquer toro imerso em $\mathbb{R}^3$ é no mínimo $2\pi^2$, valor atingido unicamente pelo toro de Clifford. Embora este resultado sobre o mínimo de energia seja um pilar da análise geométrica, o foco deste trabalho é uma questão distinta: a busca por um limite superior para a energia de Willmore. A análise é conduzida no contexto de variedades tridimensionais com curvatura escalar não-negativa ($R_g \geq 0$). Esta condição é central no Teorema da Massa Positiva e aparece também na prova da desigualdade de Penrose. Para uma 2-esfera $S \subset M$, considera-se a massa de Hawking, definida

por

$$m_H(S) = \sqrt{\frac{\text{Área}(S)}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_S H^2 dA \right).$$

Embora não seja verdade que $R_g \geq 0$ implique, em geral, $m_H(S) \geq 0$ para qualquer superfície, resultados clássicos garantem a positividade desse funcional em situações específicas, como no caso de esferas de curvatura média constante estáveis (Christodoulou–Yau) ou de superfícies que surgem como folhas do fluxo inverso da curvatura média (Huisken–Ilmanen, Bray). Nessas condições adicionais, a desigualdade $m_H(S) \geq 0$ é válida e, portanto, a partir da definição do funcional, obtém-se a cota universal

$$\int_S H^2 dA \leq 16\pi.$$

Este resultado, corretamente entendido sob as hipóteses geométricas adequadas, estabelece uma relação não-trivial entre a curvatura escalar não-negativa do espaço e um invariante variacional da superfície. Ele mostra como condições globais do espaço ambiente se traduzem em restrições quantitativas sobre a energia de Willmore, ressaltando a relevância dessas desigualdades na análise de subvariedades.

Referências

- [1] BRAY, H. L. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. **Journal of Differential Geometry**, v. 59, n. 2, p. 177–267, 2001.
- [2] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Birkhäuser, 1992.
- [3] HUISKEN, G.; ILMANEN, T. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. **Journal of Differential Geometry**, v. 59, n. 3, p. 353–437, 2001.
- [4] MARQUES, F. C.; NEVES, A. Min-max theory and the Willmore conjecture. **Annals of Mathematics**, v. 179, n. 2, p. 683–782, 2014.
- [5] MARS, M. Present status of the Penrose inequality. **Classical and Quantum Gravity**, v. 26, n. 19, p. 193001, 2009.
- [6] WILLMORE, T. J. **Riemannian Geometry**. Oxford University Press, 1993.
- [7] CHRISTODOULOU, D.; YAU, S.-T. Some remarks on the quasi-local mass. In: **Mathematics and General Relativity**. Providence: American Mathematical Society, 1988. p. 9–14.

O Grupo Fundamental π_1 de um nó

Felipe Monteiro Kiotheka*
felipe.kiotheka@ufpr.br¹

Carlos Eduardo Durán Fernández (Orientador)
cduran@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná — UFPR

Palavras-chave: nós, grupo fundamental, topologia.

Resumo: Um nó k é um subespaço do espaço euclidiano tridimensional que é homeomorfo à circunferência. Dizemos que k é *poligonal* se é união finita de segmentos de reta.

Definição 0.1. Dois nós k_1 e k_2 são ditos *equivalentes* se existe um homeomorfismo h de $\mathbb{E}^3$ tal que $h(k_1) = k_2$.

Nessa apresentação, vamos nos restringir apenas aos nós que são equivalentes a nós poligonais, chamados de não-selvagens.

Também, para desenhar-los e ilustra-los efetivamente, precisamos ser capaz de projetar eles num plano de uma forma *boa*. Com *projeção boa* queremos dizer que a projeção cruza si mesma finitas vezes e, em cada cruzamento, apenas duas partes do nó estão envolvidas. Afim de garantir que isso é sempre possível, enunciamos o seguinte teorema.

Teorema 0.2. Todo nó admite uma projeção boa [1].

Sejam k_1 e k_2 como na definição anterior. Restringindo h para $\mathbb{E}^3 - k_1$, obtemos um homeomorfismo de $\mathbb{E}^3 - k_1$ para $\mathbb{E}^3 - k_2$. Em outras palavras, nós equivalentes tem complementos homeomorfos. Isso motiva olhar para o grupo fundamental do complemento, que vamos chamar de *grupo do nó*, de um nó e ver se podemos distingui-los de outros nós.

Vamos iniciar por um caso particular. Seja k_0 o nó trevo. Suponha, sem perda de generalidade, que k_0 está completamente contido na metade de cima do espaço tridimensional e assuma que a projeção no plano $z = 0$ é boa. Separe o nó em 'overpasses' e 'underpasses', relativos a projeção, que alternam ao caminhar no nó.

Troque cada 'underpass' pela curva obtida ao derrubar perpendiculares a partir dos pontos finais e iniciais dos 'underpass' no plano $z = 0$, então conecte as pontas livres das perpendiculares pela projeção do 'underpass'. Dessa forma, obtemos um novo nó que é claramente equivalente ao nó original, que denotaremos por k .

*Bolsista do PET Matemática UFPR.

A ideia construir $\mathbb{E}^3 - k$ por várias peças, em que conhecemos o grupo fundamental de cada uma e, aplicando o Teorema de van Kampen em cada estágio, obter o grupo do nó.

Vamos começar calculando $\pi_1(\mathbb{E}_+^3 - k)$, onde $\mathbb{E}_+^3$ é o semiespaço definido por $z \geq 0$. De uma orientação para k e escolha um ponto base p acima de k . Para cada *overpass* crie um *loop*, que é baseado em p , que se enrola uma vez nesse *overpass* na regra da mão direita em relação a direção decidida para k . Chame esses loops de α_1, α_2 e α_3 e seja x_i o elemento de $\pi_1(\mathbb{E}_+^3 - k)$ determinado por α_i .

Lema 0.3. $\pi_1(\mathbb{E}_+^3 - k, p)$ é o grupo livre gerado por x_1, x_2 e x_3 .

Ainda resta adicionar $\mathbb{E}_-^3 - k$. Fazendo isso, vamos obter, para cada k -ésimo *overpass* que está entre o i -ésimo *underpass* e $(i + 1)$ -ésimo *underpass*, as relações

$$x_i x_k = x_k x_{i+1} \text{ ou } x_k x_i = x_{i+1} x_k,$$

dependendo da direção do *overpass* em relação aos *underpass*'s. No nosso caso, a primeira acontece em todos os casos. Mas, no geral, isso não cobre todos os *overpass*'s. Pode ocorrer de existir um *overpass* apenas usado para separar dois *underpass*'s. Nesse caso, é adicionada a relação $x_i = x_{i+1}$ associada ao i -ésimo *overpass*. Chame de r_i a relação associada ao i -ésimo *overpass*.

No total, temos três *underpass*'s. A terceira relação é consequência das duas primeiras. Concluímos que o grupo do nó trevo é:

$$\pi_1(\mathbb{E}^3 - k) = \{x_1, x_2, x_3; r_1, r_2\} = \{x_1, x_2, x_3; x_1 x_3 = x_3 x_2, x_2 x_1 = x_1 x_3\}$$

Referências

- [1] C.C. Adams. *The Knot Book*. W.H. Freeman, 1994. ISBN: 9780821886137. URL: <https://books.google.com.br/books?id=M-B8XedeL9sC>.
- [2] M.A. Armstrong. *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781475717938. URL: <https://books.google.com.br/books?id=NJbuBwAAQBAJ>.
- [3] J. W. Milnor. "On the Total Curvature of Knots". Em: *Annals of Mathematics* 52.2 (1950), pp. 248–257. ISSN: 0003486X, 19398980. URL: <http://www.jstor.org/stable/1969467> (acedido em 04/09/2025).

O Teorema de Fáry-Milnor

Felipe Monteiro Kiotheka*
felipe.kiotheka@ufpr.br¹

Carlos Eduardo Durán Fernández (Orientador)
cduran@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: nós, curvatura total, isotopia.

Resumo:

Um *nó* (mais precisamente, um *tame knot*) é uma curva poligonal fechada simples no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Pro nosso uso de caso, vamos usar uma discretização dos nós usuais. Estudar esse caso, até então particular, é o suficiente pois o resultado se estende a nós não poligonais [petrunin2023six].

Vamos denotar o *triângulo sólido* de vértices $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ por $\triangle abc$. Podemos ver como o fecho convexo dos pontos a, b e c . Aqui, vamos assumir que esses pontos são distintos, ainda pode acontecer de serem colineares.

Com isso, definimos as *isotopias triangulares*; é uma das seguintes operações que podem ser aplicadas num nó afim de obter outro nó.

1. Seja $[p, q]$ uma aresta do nó e x um ponto de $\mathbb{R}^3$ tal que o triângulo sólido $\triangle pqx$ não tem pontos em comum com o nó além da arestas $[p, q]$. Então, podemos repor $[p, q]$ pelas arestas adjacentes $[p, x]$ e $[x, q]$.
2. Podemos também fazer a operação inversa. Isto é, se, duas arestas adjacentes $[p, x]$ e $[x, q]$ de um nó, o triângulo $\triangle pqx$ não tem pontos em comum com o nó exceto nessas arestas, então podemos repor $[p, x]$ e $[x, q]$ pela aretas $[p, q]$.

Nós que são obteníveis de outros a partir de uma sequência finita de isotopias triangulares são chamados de *isotópicos*. E, um nó que não é isotópico a um triângulo (isto é, uma curva poligonal de três vértices distintos) é chamado de *não-trivial*.

Para curvas suaves, a curvatura total é usualmente definida pela integral da curvatura. Para curvar poligonais, vamos definir a *curvatura total* como a soma dos ângulos externos. Dada uma curva poligonal α , vamos denotar esse valor por $\Phi(\alpha)$. A curvatura total de uma curva suave não pode ser menor que a curvatura total de qualquer curva poligonal inscrita. De fato, é equivalente definir a curvatura total de uma curva como o supremo das curvaturas totais das curvas poligonais inscritas [petrunin2023six]. A nossa definição concorda com a definição para curvas suaves.

*Bolsista do PET Matemática UFPR.

Teorema (Fáry-Milnor). Se α é um nó não trivial, então $\Phi(\alpha) \geq 4\pi$.

Assim como na versão original [milnor1950total] da prova desse Teorema feita por John Milnor, a demonstração é baseada na seguinte condição suficiente para um nó trivial.

Proposição. Suponha que uma função altura $(x, y, z) \mapsto z$ tenha apenas um máximo local em uma curva poligonal simples fechada α e todos os vértices dessa curva estão em diferentes alturas. Então, α é o nó trivial [petrunin2023six].

Vamos usar a contrapositiva dessa Proposição.

Proposição. Se um nó α é não-trivial, então a função altura $(x, y, z) \mapsto z$ tem ao menos dois máximos locais em α ou tem vértices de mesma altura.

Prova do Teorema de Fáry-Milnor. Seja $\alpha = p_1 p_2 \cdots p_n$ um nó não trivial e denote por v_i o vetor unitário de direção $p_i p_{i+1}$; assumimos $p_0 = p_n$.

Considere o conjunto U_i formado pelos vetores unitários $u \in \mathbb{R}^3$ tais que $\angle(u, v_i) \geq \frac{\pi}{2}$. Note que $u \in U_i$ se, e somente se, a função $x \mapsto \langle u, x \rangle$ tem um máximo local em p_i em α .

Escolha um sistema de coordenadas no espaço de tal forma que o eixo z aponte na direção de $u \in U_i$ e α tenha todos os vértices de altura diferente. Pela Proposição anterior, a função $x \mapsto \langle u, x \rangle$ admite pelo menos dois máximos locais em α . Disso, segue que cada conjunto $U_1, U_2, \dots, U_n$ cobre cada ponto da esfera unitária $\mathbb{S}^2$ duas vezes.

Chamando $\varphi_i = \angle(v_{i-1}, v_i)$ o ângulo externo de α em p_i , note que U_i ocupa $\frac{\varphi_i}{2\pi}$ de toda a esfera; então, $2\varphi_i = \text{área } U_i$. Como os conjuntos $U_1, U_2, \dots, U_n$ cobrem a esfera $\mathbb{S}^2$ duas vezes e a área de $\mathbb{S}^2$ é 4π , temos que

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{área } U_i \geq \frac{2}{2} \cdot \text{área } \mathbb{S}^2 = 4\pi$$

Como queríamos mostrar. □

Teorema Fundamental da Álgebra via o Grupo Fundamental

Tiago Filipe Pires Galu*

tiago.galu@ufpr.br¹

Gisele Teixeira Paula

giseleteixeira@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: homotopia, grupo fundamental, teorema fundamental da álgebra.

Resumo:

Apresentamos uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra por meio de resultados de topologia algébrica. Para isto, primeiramente estudamos caminhos em espaços topológicos e homotopias entre estes. Um **caminho** em um espaço topológico X é uma função $f : [0, 1] \rightarrow X$ contínua. Dizemos que dois caminhos f e g são **homotópicos** e denotamos esta condição por $f \simeq_p g$ se:

i) $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$

ii) Existe uma função $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F(s, 0) = f(s)$, $F(s, 1) = g(s)$, $F(0, t) = f(0)$ e $F(1, t) = f(1)$, $\forall s, t \in I$

Mostramos que $\simeq_p$ forma uma relação de equivalência entre caminhos e introduzimos uma operação chamada **concatenação** $*$: $C([0, 1], X) \times C([0, 1], X) \rightarrow C([0, 1], X)$ posta por:

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Por meio da concatenação induzimos uma outra operação $*_p$ no quociente de $C([0, 1], X)$ por $\simeq_p$, definindo $[f] *_p [g] = [f * g]$ para todos caminhos que compartilhem o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final. Mostramos que o quociente munido desta operação possui propriedades parecidas com a de um grupo, falhando apenas em estar definida para todos pares de caminhos. Para podermos introduzir o conceito de grupo em nosso estudo, dado $x_0 \in X$, consideramos apenas o conjunto dos caminhos que começam e terminam em x_0 . Mostramos que este conjunto munido da operação $*_p$ forma um grupo, chamado de **grupo fundamental de X relativo ao ponto x_0** e denotado $\pi_1(X, x_0)$. Demonstramos resultados importantes à respeito

*Bolsista do PET-Matemática UFPR

deste grupo, tais como que uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0 \in Y$ induz um homomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$, Y espaço topológico.

Antes de podermos computar exemplos de grupos fundamentais de espaços topológicos importantes para o nosso resultado, estudamos **mapas e espaços de recobrimento de um espaço topológico**. Focamos no mapa de recobrimento $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ posto por $p(x) = (\cos 2x, \sin 2x)$, o qual utilizamos para computar o grupo fundamental do círculo S^1 , exemplo necessário para a prova do teorema principal. Estudamos ainda o grupo fundamental do plano perfurado $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e o conceito de **mapas essenciais**, o qual relaciona funções quaisquer entre dois espaços topológicos com caminhos por meio de homotopias. Com isto, finalizamos o trabalho demonstrando o Teorema Fundamental da Álgebra utilizando das ferramentas que foram construídas ao longo dele.

Referências

- [1] Munkres, J. **Topology**: a first course. New Jersey: Prentice-Hall inc., 1975.

Análise Numérica e Otimização

Comissão Científica:

Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli

Prof. Dr. Roberto Pettres

Banca Avaliadora:

Dr. Luiz Carlos Matioli
Me. Luiz Gabriel Martins
Dr. Roberto Pettres

Aplicação de Otimização Não-Linear para a Modelagem de uma Carteira de Investimentos

Pedro Henrique Cardoso*

pedrohenriquecardoso@estudante.ufscar.br¹

Sadao Massago (Orientador)

sadao@ufscar.br¹

Aniela Fagundes Carrara (Coorientadora)

anielacarrara@ufscar.br¹

¹Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) - Campus Sorocaba

Palavras-chave: Carteira de Investimentos, Otimização Não-Linear, Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz.

Resumo:

O presente trabalho tem como objetivo, a construção de uma carteira de investimentos formada por ativos negociados na B3 (Bolsa de Valores Brasileira) para o ano de 2025, utilizando como principal ferramenta, a Otimização Não-Linear, e teorias do universo da Economia, em particular a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. A modelagem matemática resulta no problema não linear, requerendo o uso de Otimização Não-Linear para a otimização de um portfólio de investimentos, na qual a solução desse problema foi obtida por meio do Método do Gradiente e do Método de Newton, implementado em *software* livre GNU Octave, compatível com MATLABTM. Os ativos inseridos na pesquisa se referem a uma análise do desempenho dos mesmos referentes ao segundo semestre do ano de 2024 e ao primeiro semestre de 2025, na qual foram analisados os dez melhores ativos durante esse período, e selecionados os cinco ativos que tiveram as melhores correlações.

• Breve Panorama do Cenário Econômico para o Ano de 2025

Segundo o Boletim Focus, o ano de 2024 se encerrou com a taxa Selic em 11,75% a.a., e o preço do dólar se findou em R\$ 6,05, enquanto o IPCA fechou em 4,83%, acima da Meta de Inflação que foi de 3%. É importante ressaltar que também houve o crescimento do PIB que se ampliou em 3,5% em relação a 2023 [3].

Comparando esses dados, com o último relatório analisado, a taxa Selic aumentou para 14,75% a.a., o IPCA foi para 5,50%, mas em contrapartida o câmbio diminuiu para R\$5,82, enquanto o crescimento esperado do PIB para 2025 é de 2% [4]. Além disso, é importante ressaltar que a Meta de Inflação definida pelo Conselho Monetário Nacional (CMN) para o ano de 2025 é de 3%, com intervalo de tolerância de 1,5 ponto

*Membro do Núcleo de Estudos em Economia Aplicada (NEA).

percentual para cima ou para baixo, ou seja, o limite inferior é 1,5% e o superior é 4,5%. Com essas projeções, se intensificaram a percepção de incerteza entre os investidores, resultando em uma postura mais avessa ao risco e, consequentemente, na retração dos investimentos em ativos de renda variável.

• **Modelagem da Carteira**

Com os dez ativos selecionados, é necessário realizar o levantamento de suas respectivas rentabilidades mensais ao longo do período analisado (2º semestre de 2024 e 1º semestre de 2025), como também a média anual de cada ativo no decorrer do mesmo período, sendo que ambas as informações são necessárias para o estudo estatístico presente na Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. Dado que com essas informações, conseguimos construir a Tabela 1, na qual mostra os valores de correlação entre cada um dos dez ativos.

Tabela 1 - Correlação entre os ativos.

Ativos	COGN3	ASAI3	CVCB3	CYRE3	TIMS3	TOTS3	BPAC11	MGLU3	SBSP3	PETR4
COGN3	1,0000									
ASAI3	0,8322	1,0000								
CVCB3	0,6077	0,5738	1,0000							
CYRE3	0,6579	0,6810	0,5166	1,0000						
TIMS3	0,4289	0,4427	0,2197	0,4575	1,0000					
TOTS3	0,5315	0,7376	0,4804	0,5799	0,0502	1,0000				
BPAC11	0,5965	0,7975	0,6434	0,8315	0,5600	0,7315	1,0000			
MGLU3	0,6780	0,5511	0,7160	0,6899	0,4290	0,1793	0,5462	1,0000		
SBSP3	0,2328	0,4561	0,2084	0,4991	0,6146	0,1128	0,6247	0,2692	1,0000	
PETR4	-0,1479	0,0100	0,2838	0,0336	-0,3763	-0,0027	0,0193	0,3619	-0,0659	1,0000

Fonte: INVESTING. Dados Históricos.

Com a Tabela 1, conseguimos determinar que os cinco ativos selecionados para compor a carteira de investimento, por possuírem os menores valores de correlação, são: PETROBRÁS (PETR4), COGNA (COGN3), TIM BRASIL (TIMS3), TOTVS (TOTS3) e SABESP (SBSP3). A Tabela 2 fornece os rendimentos percentuais médios dos cinco ativos escolhidos.

Tabela 2 - Rendimento percentual médio dos cinco melhores ativos durante o período analisado.

Ativos	COGN3	TIMS3	TOTS3	SBSP3	PETR4
Rendimento	6,23%	2,37%	3,13%	3,85%	-1,58%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos.

Modelando um problema para um investidor de perfil moderado, o mesmo deve sempre buscar a minimização dos riscos da carteira, sendo que os critérios de minimização do risco da carteira variam de investidor para investidor, assim como as restrições a serem inseridas no problema. Temos um problema com duas funções objetivo, denominado de Problema Multiobjetivo, sendo ele representado por:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \text{VAR}(R_p) \\ &\text{Max } E(R_p) \\ &\text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ &\text{e } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \end{aligned}$$

onde x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são respectivamente os pesos dos ativos ativos: COGN3, TIMS3, TOTS3, SBSP3 e PETR4.

Uma das estratégias para a obter resolução de um problema multiobjetivo é realizar uma combinação linear, no qual transformará para um problema com apenas um único objetivo. Inicialmente, observe que $\text{Max } E(R_p)$ é equivalente a $\text{Min } -E(R_p)$. Assim, poderá considerar a minimização da combinação linear, isto é,

$$\text{Min } Z(x) = \alpha \cdot \text{VAR}(R_p) + \beta \cdot (-E(R_p)), \text{ com } \alpha, \beta > 0$$

Escolhendo $\alpha = \frac{K}{2}$ e $\beta = 1$, temos:

$$Z(x) = \frac{K}{2} \text{VAR}(R_p) - E(R_p)$$

Sendo que $K > 0$, é a constante de aversão ao risco, que é escolhido pelo investidor, no qual quanto maior o K , menor será o risco envolvido.

Assim, o problema se define por:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \frac{K}{2} \text{VAR}(R_p) - E(R_p) \\ &\text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 = 0, \\ &\text{e } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Sendo que o valor escolhido para K (Constante de aversão ao risco), foi em virtude do perfil do investidor, no qual para o presente trabalho é o de Perfil Moderado.

A aplicação da Otimização Não-Linear na construção de uma carteira de investimentos demonstrou ser uma abordagem extremamente eficiente e eficaz para otimizar o portfólio. Através das técnicas presentes na Programação Não-Linear, foi viável desenvolver uma estratégia que reúne e equilibra risco e retorno, considerando as expectativas do mercado de ações, como também as características individuais de cada ativo. Os resultados obtidos, indicam que uma carteira diversificada, edificada através de modelos matemáticos e dados históricos, pode alcançar uma performance superior em comparação a uma seleção aleatória de ativos.

Referências

- [1] ARENALES, M. N. *et al.* **Pesquisa Operacional**. 1. ed. São Paulo: McGraw Hill Brasil, 2007.
- [2] ASSAF, A. **Mercado Financeiro**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2014.
- [3] BANCO CENTRAL DO BRASIL. Boletim Focus: Relatório de Mercado - 27 de dezembro de 2024. 2024. Acesso em: 19 mai. 2025. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/content/focus/focus/R20241227.pdf>.
- [4] BANCO CENTRAL DO BRASIL. Boletim Focus: Relatório de Mercado - 27 de maio de 2025. 2025. Acesso em: 19 mai. 2025. <https://www.bcb.gov.br/content/focus/focus/R20250516.pdf>
- [5] LUENBERGER, D. G., YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. 4. ed. Reading: Addison-Wesley, 2015

Método elipcêntrico para programação quadrática

Eduarda Ferreira Zanatta*
eduardazanatta6@gmail.com¹

Roger Behling (Orientador)
rogerbehling@gmail.com¹

¹Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Campus Blumenau.

Palavras-chave: otimização contínua, métodos de primeira ordem, funções quadráticas.

Resumo:

Este trabalho propõe um novo método de primeira ordem para minimizar funções fortemente convexas, denominado *método elipcêntrico*. A técnica explora a geometria das curvas de nível por meio dos gradientes, definindo o próximo iterando como o centro de uma interpolação elíptica. Para quadráticas estritamente convexas, provamos que o passo elipcêntrico é sempre pelo menos tão eficiente quanto o do método do gradiente com busca exata. No caso bidimensional, o método coincide com o de Newton, atingindo o minimizador em um único passo. Em dimensões maiores, embora não haja convergência finita, o método retém características newtonianas.

A ideia central proposta no método é explorar os **conjuntos de nível elipsoidais** da função

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x, \quad \text{com } A \succ 0 \text{ simétrica.}$$

Esses conjuntos de nível são elipsoides concêntricos em $\mathbb{R}^n$ que ao serem interceptados com planos bidimensionais resultam em elipses. O método busca minimizadores ao longo de **planos afins** que são justamente os centros dessas elipses. O método elipcêntrico converge ao minimizador único e global de f , aqui denotado por x^* .

1. Dado um iterando x , definimos um deslocamento na direção do gradiente:

$$y = x + 2td,$$

com $d = -\nabla f(x)$ e $t > 0$ é o parâmetro de passo, tal que $f(y) = f(x)$.

2. Em seguida, realizamos um segundo deslocamento, novamente na direção do gradiente, a partir de y :

$$z = y + 2\hat{t}\hat{d},$$

*Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Campus Blumenau.

com $\hat{d} = -\nabla f(y)$ e $\hat{t} > 0$, tal que $f(z) = f(y)$.

3. Definimos os vetores $u = y - x$, $v = z - y$ e o plano de busca $\Pi = x + \text{span}\{u, v\}$.

4. Então, o novo iterando é dado por

$$x^+ = \arg \min_{x \in \Pi} f(x).$$

Assim, buscamos o ponto

$$x^+ = x + \alpha u + \beta v$$

que minimiza f restrita ao plano Π . Isso é feito resolvendo o sistema linear:

$$M \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = q,$$

com:

$$M = \begin{bmatrix} u^\top A u & u^\top A v \\ v^\top A u & v^\top A v \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} b^\top u - u^\top A x \\ b^\top v - v^\top A x \end{bmatrix}.$$

Em que M é a matriz de Gram de u e v com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Utilizando o *passo ótimo* tradicional do método do gradiente, dado por:

$$t = \frac{d^\top d}{d^\top A d},$$

temos que $\nabla f(x^+) \perp u$ e $\nabla f(x^+) \perp v$.

Em particular, para $u = 2td$, $v = 2\hat{t}\hat{d}$:

$$d^\top (Ax^+ - b) = 0 \quad \text{e} \quad \hat{d}^\top (Ax^+ - b) = 0.$$

TEOREMA: Seja $\{x^k\}$ a sequência gerada a partir de um ponto inicial qualquer e com lei de formação tal que x^k faz o papel de x e x^{k+1} o de x^+ . Então, $\{f(x_k)\}$ é monótona decrescente, ou seja, $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ e converge linearmente para $f(x^*)$. Mais precisamente, existe $\eta \in (0, 1)$ de modo que para todo k inteiro não negativo

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \eta(f(x_k) - f(x^*)).$$

Temos também que a própria sequência converge linearmente para a solução x^* . Mais que isso,

$$\|x_{k+1} - x^*\|_A \leq \sqrt{\eta} \|x_k - x^*\|_A.$$

A demonstração completa encontra-se em [1]. O trabalho propõe uma comparação prática com métodos clássicos, como o método do gradiente, o método de Newton e o método do gradiente conjugado. Os resultados numéricos visam avaliar o desempenho do método elíptico, destacando potenciais aplicações em otimização. Tais resultados encontram-se detalhados em [1]. As fontes principais da literatura que forneceram uma base teórica sólida e clássica para o desenvolvimento do tema foram: Convex Optimization [2], Elementos de Programação Não-Linear [3], Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e Dualidade [4], Numerical Optimization [5] e Aspectos Teóricos e Computacionais [6].

Referências

- [1] BEHLING, R.; CORREA, R. A.; ZANATTA, E. F.; GUIGUES, V. **Introducing the method of ellipcenters, a new first order technique for unconstrained optimization.** arXiv:2509.15471 [math.OC], 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.15471>. Acesso em: 23 set. 2025.
- [2] BOYD, S; VANDENBERGHE, L. **Convex Optimization.** New York: Cambridge University Press, 2004.
- [3] FRIEDLANDER, A. **Elementos de Programação Não-Linear.** UNICAMP, Campinas, 1994.
- [4] IZMAILOV, A; SOLODOV, M. **Otimização: Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e dualidade.** Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada -IMPA, Rio de Janeiro, 2020.
- [5] NOCEDAL, J; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization.** Springer-Verlag, New York, 1999.
- [6] RIBEIRO, A. A; KARAS, E. W. **Otimização Contínua: Aspectos Teóricos e Computacionais.** Cengage Learning, São Paulo, 2014.

Otimização de Carteira de Ações Utilizando Restrições de Cardinalidade

Tânia Cristina Valasky*

tania.valasky@ufpr.br¹

Evelin H. M. Krulikovski (Orientadora)

evelin.krulikovski@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Otimização de portfólio, Restrição de Cardinalidade, *Branch-and-Bound*.

Resumo:

Problemas de otimização com restrições de cardinalidade podem ser complexos de resolver, mas apresentam aplicações práticas importantes, como na otimização de portfólios [1]. Nosso objetivo é encontrar uma solução ótima com o Modelo de Markowitz, que busca identificar a combinação de ativos que minimize o risco para um dado nível de retorno. A restrição de cardinalidade limita o número de ativos no portfólio, gerando uma solução que seja esparsa [2]. Além disso, buscamos desenvolver uma interface interativa, utilizando HTML, CSS e JavaScript, em que o usuário consiga inserir suas informações como risco, retorno e valor disponível para investimento, e o modelo retorne automaticamente a carteira ótima de acordo com o perfil do cliente e respeitando a cardinalidade imposta.

Nosso problema inicial [3] é descrito como,

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && x^\top Q x \\ &\text{sujeito a :} && v^\top x \geq \rho, \\ & && e^\top x = 1, \\ & && x \geq 0, \\ & && \|x\|_0 \leq \alpha. \end{aligned}$$

Onde Q representa a matriz de covariância, v é o vetor dos retornos médios dos ativos, α a quantidade máxima de ativos ($0 < \alpha \leq n$), $\|x\|_0$ a restrição de cardinalidade e $e \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de uns.

Reformulando o problema, como [3], obtemos um problema quadrático misto-inteiro (MIQP), com variáveis binárias:

*Aluna pesquisadora no Grupo CiDAMO (Ciência de Dados, Aprendizagem de Máquina e Otimização)

$$\begin{aligned}
& \underset{x,y}{\text{minimizar}} && x^\top Qx \\
& \text{sujeito a :} && v^\top x \geq \rho, \\
& && e^\top x = 1, \\
& && 0 \leq x_i \leq y_i, \\
& && \sum_{i=1}^n y_i \leq \alpha, \\
& && y_i \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Que, de maneira geral, é considerado NP-difícil. Podemos resolvê-lo utilizando o algoritmo *branch-and-bound* e encontrar uma resposta exata para um conjunto limitado de ativos. Esse algoritmo [4] tem por objetivo dividir o problema inicial em subproblemas, para serem resolvidos via Programação Linear, com o método *Simplex*, por exemplo. Trata-se de uma técnica de busca em árvore [5] que analisa pontos inteiros de forma implícita, descartando os inviáveis e mantendo as melhores soluções factíveis da função objetivo.

Se a solução de um subproblema não for inteira [5], ocorre uma ramificação; caso seja inteira, ela é considerada candidata a ser a solução ótima se fornecer o melhor valor para a função objetivo. Quando uma solução ótima inteira for obtida, ela é adotada como resultado final. Caso contrário, realiza-se nova divisão a partir da variável não inteira, até que todas assumam valores inteiros. E, sendo o problema limitado, garante-se que a árvore terá tamanho finito, pois cada partição gera uma escolha binária sempre que uma variável não é inteira.

Os experimentos numéricos estão em andamento e têm como objetivo verificar o desempenho do modelo sobre o conjunto de ativos, considerando diferentes perfis de risco, buscando analisar a relação entre risco e retorno alcançado e o tempo computacional utilizado. Essa análise será fundamental para validar a aplicação do método proposto em cenários reais de investimento.

Referências

- [1] BECK, A. and ELDAR, Y. C. **Sparsity constrained nonlinear optimization: Optimality conditions and algorithms**. SIAM J. Optim. 23(3): 1480–1509, 2013.
- [2] KRULIKOVSKI, E. H. M., RIBEIRO, A. A., and SACHINE, M. **A Comparative Study of Sequential Optimality Conditions for Mathematical Programs with Cardinality Constraints**, JOTA, 192:1067–1083, 2022.
- [3] COSTA, C. M.; KREBER, D. and SCHMIDT, M. **An Alternating Method for Cardinality-Constrained Optimization: A Computational Study for the Best Subset Selection and Sparse Portfolio Problems**. INFORMS Journal on Computing 34(6). 2968-2988. 2022.
- [4] CHAVES, Cheienne; MILOCA, Simone Aparecida. **Algoritmo Branch-and-Bound e Aplicação ao Problema do Caixeiro Viajante**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbm.ac.org.br/sbm.ac/article/viewFile/1793/1811>

- [5] MORETTI, Antônio Carlos; BARBOSA, Flávia **Métodos de**
Branch and Bound. IMECC/UNICAMP, 2011. Disponível em:
<https://www.ime.unicamp.br/mac/db/2011-1S-083552.pdf>

Reconstrução de Imagens via Amostragem Compressiva: Formulação Matemática e Testes Numéricos

Rafaella Gulin dos Santos *
rafaellagulin@ufpr.br ¹

Mael Sachine (Orientadora)
mael@ufpr.br ¹

Ademir Alves Ribeiro (Coorientador)
ademir.ribeiro@ufpr.br ¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Amostragem Compressiva, Esparsidade, Otimização Convexa, FISTA.

Resumo:

Nas últimas décadas, o crescimento do volume de dados e a necessidade de métodos eficientes de aquisição e processamento impulsionaram o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas e computacionais. Entre elas, destaca-se a Amostragem Compressiva (*Compressed Sensing*), conceito que surgiu a partir dos trabalhos de Donoho [1], que explora a esparsidade dos sinais para armazenar, transmitir e processar dados de maneira mais eficiente. Essa abordagem tem sido aplicada com sucesso em áreas como ressonância magnética e tomografia computadorizada, visando reduzir o tempo de aquisição e, no caso da tomografia, a exposição à radiação dos pacientes.

Um sinal é dito esparso quando pode ser representado por poucos coeficientes significativos em uma base adequada. Essa característica é central para a Amostragem Compressiva, pois permite recuperar a informação essencial a partir de amostragens incompletas. A Transformada Discreta do Cosseno (DCT) é uma das bases mais utilizadas para esse tipo de problema, concentrando a energia do sinal em poucos coeficientes [2]. A DCT consiste em representar um sinal como uma combinação linear de funções cossenos com diferentes frequências e amplitudes. No método, discretizamos as funções cosseno, mudando da base canônica para a base ortonormal.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor que representa o sinal analisado. Assumimos que x não seja necessariamente esparso, mas que admita uma representação esparsa em uma base ortonormal. Ou seja, existe um vetor $s \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x = \Psi s,$$

*Voluntária do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME

onde $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e s possui $k \ll n$ componentes significativamente diferentes de zero.

Como apenas um número limitado de observações é coletado, introduzimos a matriz de amostragem $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m \ll n$. Assim, o vetor de observações $y \in \mathbb{R}^m$ é dado por

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s.$$

Definindo a matriz

$$A = \Phi \Psi \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

obtemos a seguinte relação entre os dados observados y e o vetor esparso s

$$y = As.$$

A formulação original do problema é

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \|s\|_0 \quad \text{sujeito a} \quad As = y,$$

onde $\|s\|_0$ denota a pseudo-norma ℓ_0 , que conta o número de coeficientes não nulos.

Entretanto, resultados fundamentais de Candès [3] e Foucart-Rauhut [4] mostram que a recuperação exata é possível quando x é suficientemente esparso e A satisfaz determinadas propriedades, como a Propriedade de Isometria Restrita e a Propriedade do Espaço Nulo. A estratégia usual consiste em resolver

$$\min_s \|s\|_1 \quad \text{sujeito a} \quad As = y,$$

um problema convexo que substitui a minimização ℓ_0 .

De forma equivalente, podemos reescrever o problema de forma penalizada

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \|As - y\|_2^2 + \lambda \|s\|_1,$$

onde $\lambda > 0$ controla o equilíbrio entre fidelidade aos dados e esparsidade da solução.

O problema anterior não pode ser resolvido com métodos baseados apenas em gradiente devido à não diferenciabilidade da norma ℓ_1 . Portanto, utilizamos o algoritmo FISTA (Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm), proposto por Beck e Teboulle [5]. Sua principal operação é o operador de soft-thresholding:

$$x_k = \text{sgn}(v_i) \max \left\{ |v_i| - \frac{\lambda}{L}, 0 \right\},$$

onde $v_i = y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k)$ e L é uma constante de Lipschitz de ∇f .

O FISTA difere do ISTA ao adicionar aceleração de Nesterov no algoritmo, conforme

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2}, \quad y_{k+1} = x_k + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}} \right) (x_k - x_{k-1}).$$

Essa modificação é a responsável por garantir a taxa de convergência $O(1/k^2)$, superior à do ISTA ($O(1/k)$), o que o torna adequado para problemas de grande dimensão.

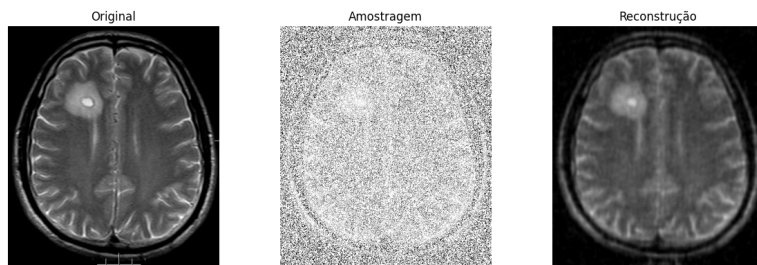


Figura 1: Exemplo de reconstrução de imagem com 30% de amostragem via FISTA.

Foram realizados alguns experimentos numéricos preliminares, com implementação em Python, considerando a análise de imagens parcialmente amostradas [6], e diferentes taxas de amostragem foram avaliadas. Os resultados mostram que o FISTA reconstrói sinais com alta fidelidade mesmo com apenas 30% das amostras da imagem original, como ilustrado na Figura 1, mantendo as principais estruturas visuais. Entre as principais dificuldades, destaca-se a escolha adequada dos parâmetros do algoritmo. Observou-se, em particular, que valores elevados de λ deterioram a qualidade da reconstrução, uma vez que o termo de regularização passa a dominar e suprimir coeficientes relevantes, aumentando o erro.

O estudo mostra que a Amostragem Compressiva constitui uma poderosa ferramenta para reconstrução de sinais e imagens a partir de dados incompletos. A técnica tem aplicações práticas promissoras em áreas que exigem economia de medições ou redução de tempo de aquisição.

Referências

- [1] DONOHO, D. L. **Compressed sensing**. IEEE Transactions on Information Theory, v. 52, n. 4, p. 1289–1306, 2006.
- [2] RAO, K. R.; YIP, P. **Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications**. Academic Press, 1990.
- [3] CANDÈS, E. J.; ROMBERG, J.; TAO, T. **Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information**. IEEE Transactions on Information Theory, v. 52, n. 2, p. 489–509, 2006.
- [4] FOUCAULT, S.; RAUHUT, H. **A Mathematical Introduction to Compressive Sensing**. Springer, 2013.
- [5] BECK, A.; TEOULLE, M. **A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems**. SIAM Journal on Imaging Sciences, v. 2, n. 1, p. 183–202, 2009.
- [6] CHAKRABARTY, N. **Brain MRI Images for Brain Tumor Detection**. Kaggle. Disponível em: <https://www.kaggle.com/datasets/navoneel/brain-mri-images-for-brain-tumor-detection>.

Redes Neurais Fisicamente Guiadas (PINNs) na Simulação do Sistema de Boussinesq para Ondas Aquáticas

Samuel Kutz Paranhos *
samuelkutzparanhos1@gmail.com ¹

Roberto Ribeiro (Orientador)
robertoribeiro@ufpr.br ¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Redes Neurais Guiadas pela Física, Sistema de Boussinesq, Ondas Aquáticas, Viés Espectral, Amostragem Adaptativa.

Resumo: As Redes Neurais Fisicamente Guiadas (PINNs) são uma abordagem que adapta a estrutura das redes neurais para obter soluções aproximadas de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), minimizando o resíduo da rede avaliada na EDP [1]. A função de perda do problema de otimização das PINNs é formulada como a soma dos erros quadráticos médios (EQM) dos resíduos:

$$EQM(\theta) = EQM_D + EQM_0, \quad (1)$$

onde

$$EQM_D = \frac{1}{N_D} \sum_{i=1}^{N_D} |\mathcal{D}[u_\theta](x_i, t_i)|^2, \quad EQM_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} |u_\theta(x_i, 0) - u_0(x_i)|^2,$$

sendo $\mathcal{D}$ o operador diferencial da EDP, $\{x_i, t_i\}_{i=1}^{N_D}$ os pontos de colocação no interior do domínio, $u_0(x)$ a condição inicial e $\{x_i\}_{i=1}^{N_0}$ os pontos de colocação nessa condição.

Este trabalho investiga a eficácia dessa abordagem no sistema de equações de Boussinesq [2]:

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + \alpha(\eta u)_x = 0, \\ u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \frac{\beta}{3} u_{xxt} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

com a condição inicial de uma onda:

$$\begin{cases} \eta(x, 0) = A \operatorname{sech}^2(x), \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

*Voluntário do Programa de Iniciação Científica no programa PIBIC/2024

A PINN empregada foi construída com quatro camadas ocultas contendo cinquenta neurônios cada. O treinamento utilizou 5.000 pontos de colocação no domínio e 200 pontos na condição inicial, com o otimizador ADAM por 15.000 épocas.

Dois cenários foram considerados: no primeiro, os pontos de colocação permaneceram fixos (amostragem uniforme); no segundo, foi aplicado o método de *Residual-based Adaptive Refinement* (RAR) [5], no qual começou com 1.000 e a cada 500 épocas eram adicionados 500 novos pontos em regiões de maior erro. Para fins de validação, os resultados obtidos foram comparados com soluções de referência calculadas por um método pseudoespectral [3].

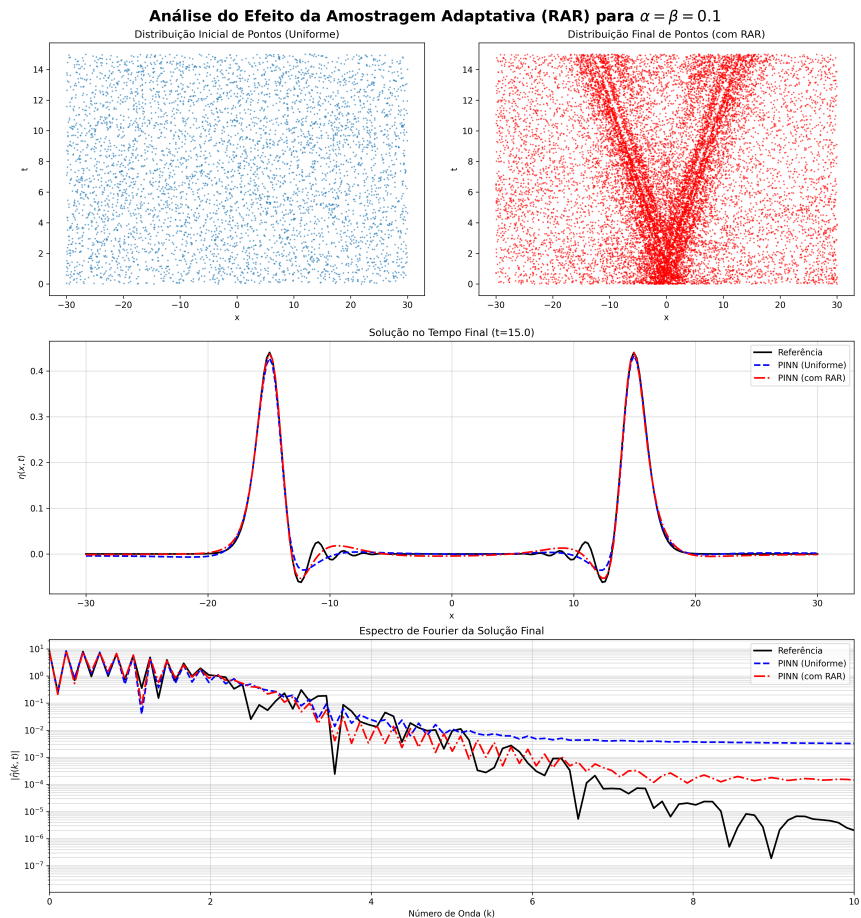


Figura 1: Análise da estratégia de amostragem adaptativa (RAR) para o caso $\alpha = \beta = 0.1$. A PINN possui 4 camadas ocultas e 50 neurônios por camada, treinada com o otimizador ADAM.

Na estratégia RAR, o resíduo da EDP, dado por $\epsilon(x, t) = |\mathcal{D}[u_\theta](x, t)|$, é usado como um indicador de erro para amostrar novos pontos a partir de uma densidade de probabilidade $p(x)$:

$$p(x) \propto \frac{|\epsilon(x)|^k}{\mathbb{E}[|\epsilon(x)|^k]} + c,$$

onde $k \geq 0$ e $c \geq 0$ são hiperparâmetros que controlam quão acentuado é (k) e qual a amostragem mínima possível (c).

No regime mais complexo ($\alpha = \beta = 0.1$), a abordagem expôs uma limitação fundamental da arquitetura: o viés espectral [4], i.e uma dificuldade das redes neurais em aproximar componentes de alta frequência do espectro da função original (no nosso caso, a solução da EDP).

Conforme ilustrado na figura 1, a análise do espectro de Fourier revela que a PINN com amostragem uniforme sofre um corte abrupto nas altas frequências. A PINN com RAR, por outro lado, consegue ir mais longe no espectro e capturar melhor frequências mais altas. Embora a amostragem adaptativa tenha se mostrado uma estratégia útil para mitigar este efeito, ela não é suficiente para eliminar este efeito por completo. Nossos resultados reforçam que as PINNs não são uma “bala de prata”, mas sim uma nova ferramenta emergente que necessita de amplo estudo em torno das suas capacidades.

Referências

- [1] RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations. *arXiv preprint arXiv:1711.10561*, 2017.
- [2] WHITHAM, G. B. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, 2011.
- [3] TREFETHEN, L. N. *Spectral methods in MATLAB*. SIAM, 2000.
- [4] RAHAMAN, N. et al. On the spectral bias of neural networks. In: *International Conference on Machine Learning*. PMLR, 2019. p. 5301-5310.
- [5] WU, Z.; JAGTAP, A. D.; KHARAZMI, E.; KARNIADAKIS, G. E. A comprehensive study on residual-based adaptive sampling for physics-informed neural networks. *ACM Computing Surveys*, v. 55, n. 10, p. 1–37, 2023.

Técnicas de aprendizagem curricular aplicadas à PINNs: Aproximando ondas solitárias solução da equação de KdV

Guilherme Furquim*

furquim.guilherme@ufpr.br¹

Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador(a))

robertoribeiro@ufpr.br¹

Thiago de Oliveira Quinelato (Corientador(a))

thiago.quinelato@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Redes neurais informadas pela física, Equação de KdV, Ondas solitárias.

Resumo:

A aplicação de técnicas de *machine learning* na aproximação numérica de equações diferenciais parciais (EDPs) ganhou destaque com o recente desenvolvimento das *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs). A literatura apresenta diversos exemplos de sucesso das PINNs, mas também casos em que elas falham, especialmente quando a EDP depende de parâmetros. Neste trabalho, analisou-se a efetividade de métodos de aprendizagem curricular na aproximação numérica de ondas solitárias solução da equação de Korteweg–de Vries (KdV). Observou-se numericamente que, para amplitudes pequenas, a rede converge mais facilmente, enquanto o aumento da amplitude eleva substancialmente o número de iterações, tornando inviável o uso convencional de PINNs para ondas de maior amplitude. A aprendizagem curricular consiste em treinar a rede inicialmente em instâncias mais fáceis do problema e, gradualmente, aumentar a dificuldade até alcançar as instâncias mais complexas. No caso da KdV, a rede foi primeiramente treinada para uma onda de baixa amplitude; os pesos obtidos serviram como ponto de partida para treinar ondas com amplitudes progressivamente maiores, até alcançar a amplitude-alvo. Foram testadas duas estratégias: uma com uma lista crescente de amplitudes definida pelo usuário e outra adaptativa, que escolhe automaticamente a próxima amplitude segundo regras pre-definidas. Apesar de a literatura relatar casos bem-sucedidos de aprendizagem curricular, sua aplicação à equação de KdV apresentou limitações: em muitos casos, o treinamento com aprendizagem curricular exigiu mais iterações do que o treinamento convencional.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica

Neste estudo, a equação de KdV foi formulada a partir do operador diferencial $\mathcal{N}$, dado por

$$\mathcal{N}(u) = u_t - \frac{3}{2}u \cdot u_x - \frac{1}{6}u_{xxx}. \quad (1)$$

Dizemos que u é uma solução da equação de KdV quando $\mathcal{N}(u)$ é a função identicamente nula (i.e. zero em todo ponto).

A solução exata usada neste estudo é dada por

$$u(x, t; a) = a \cdot \text{sech}^2[k \cdot (x - ct)], \quad (2)$$

onde $k = \sqrt{\frac{3a}{4}}$, $c = -a/2$ e a é uma constante representando a amplitude da onda.

O termo “onda solitária” origina do conceito de *soliton*. Não há um consenso sobre uma definição precisa de *soliton* – de modo geral chama-se soliton qualquer solução de uma equação (ou sistema) não linear que [3]: (i) representa uma onda de forma permanente; (ii) é localizada, portanto decai ou tende a uma constante no infinito; (iii) pode interagir fortemente com outros solitons e manter a forma. No contexto da KdV refere-se à solução de *soliton* único como “onda solitária” [3].

Os teoremas da aproximação universal para redes neurais nos mostram que, satisfazidas certas hipóteses sobre uma família de redes neurais e um dado espaço de funções, existe uma sequência de redes que convergem para qualquer função f nesse espaço [2, 4, 5, 7]. Ao trabalhar com funções paramétricas é natural pensar que a dificuldade de aproximar uma dada função por uma rede neural é fortemente influenciada pelo parâmetro. De fato, há casos em que é possível obter tal aproximação com poucas iterações; em outros, o uso da rede torna-se inviável [6].

Para contornar esses problemas foram desenvolvidas as chamadas técnicas de aprendizagem curricular [1], que consistem na minimização sucessiva de funções de custo numa família $(C_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ cuja complexidade é crescente em relação a λ . Sendo C_0 uma função que se pode minimizar facilmente e C_1 a função que desejamos minimizar. O método consiste em minimizar a primeira função, aumentar o valor do parâmetro e realizar uma previsão e (se necessário) minimizar a nova função – se prossegue desta maneira até chegar à função C_1 . Bengio et al. [1] conjecturam que uma estratégia de currículo bem formulada é uma forma de método de continuação: dada uma função que se deseja minimizar constrói-se um caminho no espaço de funções, começando por uma função com zeros conhecidos e minimizando as funções subsequentes consecutivamente.

Seja $\hat{u}$ a previsão feita pela rede. A função de custo C_a utilizada neste estudo toma como parâmetro a amplitude a e é definida por

$$C_a = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} |\hat{u}(x_i, 0) - u(x_i, 0; a)|^2 + \frac{1}{N_I} \sum_{j=1}^{N_I} |\mathcal{N}[\hat{u}(x_j, t_j)]|^2 + \frac{1}{N_B} \sum_{b=1}^{N_B} |\hat{u}(x_b, t_b) - u(x_b, t_b; a)|^2. \quad (3)$$

Os três termos da soma representam, nesta ordem, os erros quadráticos médios dos pontos: na condição inicial; no interior do domínio; e na borda. Onde o número de pontos em cada condição é dado, respectivamente, por N_0 , N_I , N_B .

Para a implementação e treinamento da rede informada de física utilizada neste projeto usamos a biblioteca DeepXDE, que também serviu de base para o desenvolvimento dos algoritmos de aprendizagem curricular.

Desenvolvemos dois algoritmos distintos: O algoritmo manual toma como entrada uma sequência de amplitudes finita e crescente, onde espera-se a convergência do modelo na primeira amplitude. O modelo é treinado, nessa ordem, até falhar na convergência para alguma das amplitudes; quando não falha conserva os pesos da amplitude anterior e segue para o treinamento da próxima amplitude.

O segundo é um método adaptativo: esperamos convergência na primeira amplitude e salvamos os pesos do modelo a cada treinamento bem-sucedido. Dado um passo inicial, treinamos o modelo para a próxima amplitude e, quando não converge pelos nossos critérios, o modelo é treinado numa amplitude intermediária até convergir.

Ambos os algoritmos falharam em todos os testes que realizamos, ou seja, ambos obtiveram pior desempenho que o treinamento convencional de PINNs. Conjecturamos que uma mudança na arquitetura da rede, colocando o parâmetro amplitude como um dos dados de entrada, possibilitará melhor desempenho do método.

Referências

- [1] BENGIO, Yoshua; LOURADOUR, Jérôme; COLLOBERT, Ronan; WESTON, Jason. **Curriculum Learning**. In: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning. Montreal: ACM, jun. 2009. p. 41–48. DOI: 10.1145/1553374.1553380.
- [2] CYBENKO, G. **Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function**. Mathematics of Control, Signals, and Systems, v. 2, n. 4, p. 303–314, dez. 1989. DOI: 10.1007/BF02551274.
- [3] DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. **Solitons: An Introduction**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, fev. 1989. DOI: 10.1017/cbo9781139172059.
- [4] HORNIK, Kurt. **Approximation Capabilities of Multilayer Feedforward Networks**. Neural Networks, v. 4, n. 2, p. 251–257, 1991. DOI: 10.1016/0893-6080(91)90009-t.
- [5] HORNIK, Kurt; STINCHCOMBE, Maxwell; WHITE, Halbert. **Multilayer Feedforward Networks Are Universal Approximators**. Neural Networks, v. 2, n. 5, p. 359–366, jan. 1989. DOI: 10.1016/0893-6080(89)90020-8.
- [6] KRISHNAPRIYAN, Aditi S.; GHOLAMI, Amir; ZHE, Shandian; KIRBY, Robert M.; MAHONEY, Michael W. **Characterizing Possible Failure Modes in Physics-Informed Neural Networks**. In: Neural Information Processing Systems. 2021.
- [7] LESHNO, Moshe; LIN, Vladimir Ya.; PINKUS, Allan; SCHOCKEN, Shimon. **Multilayer Feedforward Networks with a Nonpolynomial Activation Function Can Approximate Any Function**. Neural Networks, v. 6, n. 6, p. 861–867, jan. 1993. DOI: 10.1016/s0893-6080(05)80131-5.

Projetos Matemáticos

Comissão Científica:

Prof^a. Dra. Eloisa Rosotti Navarro
Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva

Banca Avaliadora:

Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Lda. Ani Tais Witt

Dra. Elisangela de Campos

Dr. Gabriel dos Santos e Silva

Dra. Lucelina Batista dos Santos

Dra. Ximena Mujica Sordio

A experiência do Lesson Study no PIBID

Alexandre Ruteski da Silva, Gabriel Schiebler Zaninetti, Gabrielli Knapick Hasse, Gabrielly de Oliveira Ripka, Guilherme de Lima Sampaio, Lucas Job Hahn, Mariah Fragallo Ihlenfeldt e Poliana Pereira Palhano¹

*ale.ruteski@outlook.com, gszaninetti@gmail.com, gabrielliknap@gmail.com, gabrielly.ripka@ufpr.br, guilherme.sampaio@ufpr.br, lucas.job.hahn@gmail.com, mariah.ihlenfeldt@ufpr.br e polianapp2004@gmail.com*¹

Prof^a Orientadoras: Etiène Cordeiro Guérios, Neila Tonin Agranionih e Tania Teresinha Bruns Zimer²

*ettiene@ufpr.br, ntagranionih@gmail.com e taniatbz@ufpr.br*²

^{1,2}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Lesson Study; tarefa investigativa.

Resumo:

O PIBID- matemática desenvolve ações em parceria com o Colégio Estadual Pedro Macedo, que tem como professora supervisora Eliane Domingues Stadler. Semanalmente o tempo dos bolsistas se dividia entre momentos de estudos e elaboração da tarefa investigativa, e momentos em sala de aula acompanhados pela professora supervisora. A metodologia utilizada foi o Lesson Study, de origem japonesa, e que auxilia nos ciclos de estudos, aplicações, observações e reflexões da didática de um professor e dos métodos de aula. As aplicações das atividades tiveram caráter qualitativo, cujo objetivos foram: analisar o engajamento dos estudantes diante de uma tarefa investigativa, compreender as estratégias de resolução de problemas dos estudantes e observar de que modo suas produções revelavam raciocínio e compreensão sobre o assunto da tarefa.

A explicação será dividida agora em duas etapas: (i) elaboração da tarefa e (ii) execução da tarefa (composto no desenvolvimento da atividade de cada grupo descrito). Em (i), foram utilizados como referencial teórico os textos “Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula” (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista, 2015) e “O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática” (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista, 2016). Ao longo das reuniões semanais, os bolsistas formaram três grupos e planejaram três aulas. O grupo 1 realizou a atividade com uma turma de 9º ano e os outros dois grupos com uma turma do 3º ano do Ensino Médio.

Grupo 1 – Retas paralelas e transversais (Alexandre e Lucas): construção e reconhecimento de retas paralelas e transversais e ângulos formados.

Desenvolvimento da atividade: a aplicação de aula no período da tarde consistiu em uma atividade voltada ao estudo das retas paralelas e transversais. Os

¹ Bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)

alunos foram organizados em grupos e, ao longo de duas aulas consecutivas (100 minutos), tiveram a oportunidade de explorar e construir, de maneira autônoma, relações entre as retas. Foram utilizados materiais como cartolinas, barbante, tesoura e fita, que possibilitaram aos estudantes manipular e visualizar as construções de forma concreta. Nos minutos finais, realizou-se a formalização coletiva dos conteúdos trabalhados, retomando e sistematizando os conceitos estudados.

Embora a atividade tenha alcançado seus objetivos principais, identificaram-se algumas limitações, como o gerenciamento do tempo disponível e a necessidade de um preparo didático mais aprofundado, aspectos que poderiam ter favorecido um melhor aproveitamento da experiência. Ainda assim, a proposta demonstrou-se significativa para a aprendizagem, favorecendo a participação ativa dos estudantes e estimulando o raciocínio investigativo. Além disso, observou-se que os alunos demonstraram grande interesse e satisfação com a atividade desenvolvida.

Grupo 2 – Área, escala e planta baixa (Mariah, Gabrielly e Guilherme): estudo de área e representações em escala por meio da elaboração de uma planta baixa e planejamento de um espaço.

Desenvolvimento da atividade: a aplicação da atividade foi executada durante duas aulas consecutivas (100 minutos). No início da aula, buscou-se ativar os conhecimentos prévios dos alunos por meio de um diálogo sobre área e perímetro, medindo a sala de aula com o auxílio de trenas e introduzindo a ideia de planta baixa. Em seguida, os estudantes, organizados em grupos, receberam o desafio de projetar uma casa em escala, escolhendo dimensões e mobiliando cômodos em malha quadriculada. Esse formato em grupo favoreceu discussões ricas, permitindo que alunos com maior dificuldade compreendessem melhor a proposta ao interagir com seus colegas.

Durante a execução, observou-se alto engajamento da turma: os grupos debateram sobre o tamanho dos terrenos, das casas e dos móveis, refletindo sobre proporcionalidade e dimensões. Em alguns casos, a empolgação levou os alunos a se dedicarem mais aos rascunhos do que à atividade principal, o que evidenciou a importância de apresentar de forma clara todas as etapas e objetivos já no início. A entrega escalonada da malha quadriculada mostrou-se positiva para respeitar o ritmo de cada grupo, mas exigiu atenção para manter o foco. Na etapa final, alguns grupos apresentaram suas produções, que revelaram avanços importantes no raciocínio espacial, noção de escala e pensamento geométrico, apesar de limitações, como a falta de tempo para aplicar o formulário de feedback previsto.

Grupo 3 – Área, perímetro e horta/estufa (Gabielli, Gabriel e Poliana): cálculo de área e perímetro em contexto de planejamento de horta.

Desenvolvimento: a aplicação da atividade, durante duas aulas consecutivas (100 minutos). No início da aula, buscou-se organizar a turma em grupos de 4 estudantes. Em seguida, os estudantes receberam uma folha com o enunciado da tarefa proposta. Esse formato em grupo favoreceu discussões ricas, permitindo que

estudantes com maior dificuldade compreendessem melhor a proposta ao interagir com seus colegas.

Durante a execução, observou-se alto engajamento da turma: os grupos debateram sobre o tamanho da horta, das escolhas de plantas e da organização das mesmas e, também, da estufa de formato piramidal. Na etapa final, todos os grupos apresentaram suas resoluções, que revelaram avanços importantes no raciocínio matemático. Apesar do grupo aplicador ter conduzido bem a atividade, a etapa final ficou solta, permitindo dispersão dos estudantes, perdendo o foco para que pudesse ter um melhor entendimento.

Em todas as intervenções, os bolsistas dos outros grupos e as professoras coordenadoras atuaram como observadores, deixando o grupo aplicador à frente do esclarecimento de dúvidas da tarefa. Os observadores tinham como objetivo anotar as estratégias, argumentações, o que chamou a atenção no que estava sendo respondido pelos estudantes e na forma de como estava sendo ministrada a aula pelos aplicadores, para que posteriormente fosse feita uma análise da aula.

O Lesson Study integrou teoria e prática, aperfeiçoou o planejamento e ampliou a reflexão sobre a prática pedagógica dos licenciandos, com impacto na aprendizagem docente. De modo geral, observou-se envolvimento significativo dos estudantes e discussões produtivas sobre a resolução, com argumentações registradas por eles. No plano formativo dos licenciandos, o planejamento colaborativo e a reunião de avaliação após a aplicação fortaleceram a capacidade de analisar a aula, o que deu certo e o que não deu e, também, potencializou a formação docente dos bolsistas do PIBID/UFPR, que passaram a planejar, observar e replanejar com base em evidências colhidas em sala. O processo reforça o valor de metodologias colaborativas na formação inicial, pela análise de aula e pelo aperfeiçoamento contínuo da prática pedagógica, como defende o Lesson Study.

Referências:

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mónica. **Exercícios, problemas e explorações: perspectivas de professoras num estudo de aula.** Quadrante, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 81-104, 2015.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mónica. **O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática.** Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 868-891, dez. 2016.

Análise da Produção Escrita em Questões Não-Rotineiras de Matemática em Avaliações Externas

Amanda Grütter Jacon¹, Emanuela Gonçalves Lopes¹, Lara Dambroski Furtado¹,
Mayara Isabele Arcenio¹ e Raíssa Gomes Freitas Ribeiro¹

amagrutterjacon@gmail.com
lopesemanuelag@gmail.com
laradfurtado@gmail.com
mayaraarcenio455@gmail.com
raissa2002.rg@gmail.com

Gabriel dos Santos e Silva¹

gabriel.santos22@gmail.com

¹Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Educação Matemática, análise da produção escrita, avaliação.

Resumo:

Programa Licenciar é um projeto do Departamento de Matemática da UFPR, coordenado pelo professor Gabriel dos Santos e Silva, tendo como objetivo principal analisar a produção escrita de estudantes da Educação Básica para encontrar indícios de aprendizagem, especialmente em questões não rotineiras, aquelas que não são as mais comuns no dia a dia da sala de aula.

A análise da produção escrita é uma estratégia de avaliação e de ensino que vai além do conceito de certo ou errado. Ela busca entender o que os estudantes sabem, observando suas maneiras únicas de resolver questões. Essa abordagem é muito útil para aprimorar o ensino e tomar decisões pedagógicas.

Além disso, a análise da produção escrita é uma ferramenta valiosa na formação de futuros professores de matemática. Ela permite que eles identifiquem diferentes formas de resolver questões, reconheçam tipos específicos de pensamento matemático (como o algébrico ou o geométrico) e compreendam melhor as estratégias dos estudantes. Tudo isso é ainda mais eficaz quando se usam questões não-rotineiras, que desafiam os alunos a pensar de forma criativa.

O programa tem três propósitos principais, primeiro seria escolher questões não-rotineiras disponíveis em bancos de questões e outros materiais, segundo seria analisar a produção escrita de estudantes da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática, e por fim, criar uma prova escrita com essas questões analisando as produções escritas dos estudantes.

Segundo Buriasco (2000, p.157) a avaliação que tem sido praticada na escola “tem servido apenas para selecionar, classificar, rotular, controlar e, por meio dela, o professor decide, muitas vezes, a trajetória escolar do aluno”. Na medida em que se afasta de sua função diagnóstica, “volta-se, quase que exclusivamente, para a função classificatória, que é incentivada no modo de vida de uma sociedade que valoriza a competição” (Buriasco, 2000, p.157). A avaliação educacional precisa ser

entendida como um meio para compreender melhor o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, temos a leitura pela falta, isto é, uma leitura que enfatiza aquilo que o estudante não sabe ou não conseguiu resolver, reduzindo sua aprendizagem à ausência de conhecimentos. Essa leitura, ainda presente em práticas avaliativas tradicionais, reforça a ideia do erro como algo negativo e limitador. Em contrapartida, existe a leitura positiva da produção escrita, em que o erro é entendido como parte integrante do processo de aprendizagem e como oportunidade para novas construções. Essa perspectiva valoriza tanto os avanços quanto as dificuldades, pois ambos revelam pistas do percurso cognitivo que está sendo trilhado.

Outro aspecto importante são as modalidades de leitura utilizadas na análise das produções. A leitura vertical se refere a uma leitura de todos os registros de um mesmo estudante (Santos, 2014). Já a leitura horizontal, é a leitura da produção de todos os estudantes em uma mesma tarefa (Santos, 2014).

Durante o projeto, cada participante ficou responsável por analisar um artigo. De modo geral, todos os artigos mostram a importância de se ter a avaliação como um processo investigativo. No entanto, atualmente, nas escolas, isso não tem ocorrido, pois as avaliações estão sendo utilizadas como instrumento para dividir alunos que “sabem” dos que “não sabem”, distanciando-se do seu papel, que é contribuir para a construção do conhecimento dos alunos. Sendo assim,

Ao investir na avaliação como ação investigativa, o professor tem a oportunidade de valorizar e reconhecer os múltiplos saberes que transitam no espaço da sala de aula a partir mesmo dos desempenhos aquém dos esperados. Daí a importância de o professor observar, analisar, interpretar o processo e os resultados obtidos pelos alunos, fazendo uma análise de suas produções a fim de identificar os saberes por eles construídos. (Buriasco, Lima, 2007, p. 51)

Também, cada artigo apresentou uma análise da produção escrita de uma determinada questão, escolhida pelos escritores, as quais eram não-rotineiras. Então, além da apresentação do artigo, a equipe do projeto resolveu as questões, pensando na realidade de todos os níveis de ensino, já que as questões foram escolhidas para serem resolvidas por estudantes da educação básica. Além disso, os autores dos artigos fizeram agrupamentos das produções escritas analisadas, assim, servindo como aprendizagem e referência para a equipe do Licenciamento, que fez sua própria análise da produção escrita.

Para a escolha das questões, cada participante ficou responsável pela pesquisa de uma avaliação externa, sendo estas: IAVE, OPRM, PISA, Prova Brasil e TIMSS. Antes de tudo, foi pesquisado quais cadernos de questões dos últimos dois anos estavam disponíveis online. Após isso, os participantes fizeram uma coletânea com todas as questões e as disponibilizaram em uma pasta no *Drive*. Em seguida, cada integrante selecionou de 3 a 5 questões de sua respectiva avaliação externa. Com essa seleção, foi feito um documento com as selecionadas e os integrantes do projeto responderam todas as questões. Depois, em conjunto, analisaram quais

questões deveriam ser selecionadas para a prova final, a qual seria composta de um enunciado de cada uma das avaliações externas estudadas. Essa seleção foi feita com base em qual questão poderia gerar produções escritas interessantes durante a sua execução. Para resolvê-las, os estudantes precisam interpretar o enunciado, tomar decisões e selecionar estratégias, além de não possuírem um único caminho lógico, permitindo, assim, diferentes produções escritas.

As provas foram aplicadas por professores dispostos a colaborar com o projeto em duas escolas, uma localizada na região metropolitana de Curitiba e a outra na região metropolitana de Londrina, totalizando 109 produções.

Para iniciar o processo de correção, os nomes dos estudantes foram apagados e substituídos por códigos, que permitem identificar cada prova de forma única sem revelar a identidade do aluno. Cada código é composto pela letra E de estudante e um número de 001 a 109, de forma arbitrária, sendo que de E001 a E085 são estudantes da região metropolitana de Curitiba e de E086 a E109, da região metropolitana de Londrina.

Para a análise das produções, foi adotada uma metodologia que prevê o agrupamento das resoluções por similaridades, de modo que produções com estratégias equivalentes, mesmo raciocínio ou erros parecidos sejam reunidas em agrupamentos comuns. Assim, o conjunto original de 109 produções pode ser reduzido a um número menor de grupos representativos, permitindo uma análise mais clara, objetiva e sistematizada.

Espera-se como resultado a identificação de diferentes tipos de registros escritos, desde procedimentos algébricos mais formais até tentativas informais, bem como o mapeamento de erros recorrentes e de resoluções criativas.

Também espera-se que, por meio dessa pesquisa, fique mais reconhecida a urgência de a avaliação ser mais reconhecida como processo. Para isso, os próximos passos seriam a aplicação das ideias aqui apresentadas na Educação Básica, por meio dos conceitos de leitura positiva e do erro como oportunidade de aprendizagem. O objetivo futuro é que seja cada vez mais compreendido o fato de que, com a avaliação sendo um processo, a aprendizagem deve ser oportunizada a todo momento.

Referências:

- BURIASCO, R. L. C. Algumas Considerações sobre Avaliação Educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, n. 22, p. 155-178, 2000.
- LIMA, R. C. N.; BURIASCO, R. L. C.. Avaliação da Aprendizagem Escolar: um olhar em perspectiva para a produção escrita. **VIDYA**, Santa Maria (RS, Brasil), v. 27, n. 2, p. 43-54, 2007.
- SANTOS, Edilaine Regina dos. Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

Brincando de Matemático 2025

Ana Carla de Carvalho Honório, Andressa Balestrin Dasenbrock, Augusto Henrique da Costa, Camilly Silva dos Anjos, Daniel Thiago Ivanchechen, Elissandro Antonio Sikora, Felipe Monteiro Kiotheka, Isabele Andrade Vichinieski, Kaue Novaki João, Laura Carolina Aymore Ferrandin, Leonardo Cortez do Nascimento, Lucas Xavier, Miguel Augusto Vialich, Pedro Dell'Agnolo Busarello, Pedro Henrique Andrade, Pedro Lasowski Laguna, Samuel Henrique Gomes Velez Benito, Tiago Filipe Pires Galu petmatematica@ufpr.br¹

Cleber de Medeira (Orientador)

clebermedeira@ufpr.br²

¹Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Matemática - UFPR

²Professor no Departamento de Matemática - UFPR

Palavras-chave: Educação matemática, Ensino de matemática, Ensino de álgebra.

Resumo:

O Brincando de Matemático é um evento de extensão promovido pelo PET Matemática da UFPR que tem como público-alvo alunos do Ensino Médio e do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Com o Brincando, o grupo PET Matemática tem como objetivo principal tratar de forma descontraída assuntos de matemática de uma maneira não convencional, além de promover a matemática divertida, oferecendo uma oportunidade de prática docente diferenciada aos integrantes do grupo.

Para o planejamento do evento, os integrantes do PET definiram o tema a partir da apresentação de seminários internos com sugestões para este. Posteriormente, o foco foi voltado para a escrita do material, no qual foi embutido todo o conteúdo necessário para o desenvolvimento das atividades a serem realizadas no dia da aplicação do evento, para que este fosse entregue aos alunos como uma base do que veriam. Os planos de aula e as atividades a serem desenvolvidas com os alunos foram preparados na sequência. Além destas ações, todo o processo de divulgação, inscrição, produção de certificados, e outros aspectos logísticos foram realizados pela equipe do PET.

O XX Brincando de Matemático foi realizado presencialmente no campus Politécnico, nos dias 14, 15 e 16 de julho de 2025, e teve como tema as simetrias de objetos geométricos e a matemática por trás delas. No primeiro dia do evento, o assunto tratado foi sobre as simetrias dos objetos planos, onde demos um primeiro contato com o

significado matemático do que seria uma “simetria” de um objeto. Já no segundo dia, introduzimos o importante conceito do que é um “grupo”, relacionando este conceito com as simetrias e trabalhando com exemplos como os grupos de permutações. Por fim, no terceiro dia estudamos as simetrias de objetos tridimensionais, terminando o evento com a apresentação do Teorema de Cayley e conectando os conteúdos até então apresentados. Em todos os dias do evento, foram programadas dinâmicas e atividades lúdicas para o desenvolvimento dos temas abordados. No total, o evento contou com a presença de 31 alunos.

Referências

- [1] ARMSTRONG, M. **Groups and Symmetry** Undergraduate texts in mathematics. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [2] CONWAY, J.; BURGIEL, H.; GOODMAN-STRAUS, C. **The Symmetries of Things**. Massachusetts: A K Peters, 2008.
- [3] TAPP, K. **Symmetry: A Mathematical Exploration**. New York: Springer-Verlag, 2011

Caminhos Olímpicos da Matemática (COM) - Programa de Iniciação Científica Júnior da Obmep (PIC-OBMEP)

Beatriz Maetiasi de Oliveira¹, Caio Barros Dewnig¹, Henrique Travaglia Fontes¹, Marcos Roberto dos Santos¹, Matheus Margoti¹, Otávio Cordeiro de Santana¹ e Rui Andress Mendes Pereira¹

beatriz.maetiasi@ufpr.br, caio.dewnig@ufpr.br, henrique.fontes@ufpr.br, marcos1@ufpr.br, matheus.margoti@ufpr.br, otavio.santana@ufpr.br e andressmendes@ufpr.br

Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)²

paulacouto@ufpr.br

Florinda Katsume Miyaoka (Coorientadora)³

cric_pr02@obmep.org.br

^{1,2}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Iniciação Científica; OBMEP; Resolução de Problemas.

Resumo:

O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), agora em sua 19ª edição, oferece aos jovens medalhistas da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) uma imersão aprofundada em áreas fundamentais da matemática — Teoria dos Números, Álgebra, Combinatória e Geometria — por meio de desafios selecionados.

Esse programa, financiado pelo CNPq, concede uma bolsa como incentivo aos estudantes matriculados em escolas públicas que foram premiados na OBMEP. Essa iniciativa visa fortalecer tanto o gosto pela matemática quanto as habilidades acadêmicas desses alunos, tornando-se um passo valioso para o futuro.

O PIC ocorre em duas modalidades:

- Presencial — para alunos próximos aos polos, com encontros geralmente aos sábados.
- Virtual — com aulas online para aqueles que residem fora das proximidades.

Além do conteúdo formal, os participantes utilizam o Fórum Hotel de Hilbert (Fórum HH), um fórum virtual onde trocam dúvidas e soluções sobre os exercícios propostos e que é administrado por coordenadores da OBMEP.

Estudantes que já participaram do PIC por mais de duas edições — incluindo pelo menos uma no Nível 3 (Ensino Médio) — são convidados a integrar o Programa Mentores OBMEP, conduzido por professores universitários e com foco em temas avançados da matemática.

1 Bolsista do PIC-OBMEP.

Na UFPR, o PIC está vinculado ao projeto de extensão Caminhos Olímpicos na Matemática (COM), que tem como objetivo estimular a participação de estudantes do Ensino Fundamental e Médio em diferentes olimpíadas de matemática no Brasil. Os participantes são organizados em três grupos conforme seu nível de medalha na OBMEP:

- Grupo 1: medalhistas Nível 1 (6º e 7º anos).
- Grupo 2: medalhistas Nível 2 (8º e 9º anos).
- Grupo 3: medalhistas Nível 3 (Ensino Médio).

Estudantes com menção honrosa também podem ser admitidos se houver vagas disponíveis.

O programa é dividido em oito ciclos ao longo do ano, com materiais didáticos elaborados especificamente para cada nível. As aulas, conduzidas por professores selecionados entre educadores da rede pública ou graduandos, privilegiam a resolução de exercícios como método de ensino, complementada por demonstrações e curiosidades matemáticas.

A partir do segundo ciclo, os alunos presenciais realizam testes avaliativos — duas questões dissertativas sobre o ciclo anterior — e tarefas online contendo sete questões (cinco objetivas e duas dissertativas). Essa metodologia ativa busca promover o aprendizado por meio da prática e da reflexão.

Referências:

[1] OLIMPÍADA Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP | Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apostilas.htm> . Acesso em: 04 de setembro de 2025.

[2] OLIMPÍADA Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP | Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/pic.htm> . Acesso em: 04 de setembro de 2025.

[3] PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Disponível em: <https://19pic.obmep.org.br> . Acesso em: 04 de setembro de 2025.

Desafios ativos: “jogando, explorando e descobrindo a matemática”

Christofer L. Depizzol¹, Daniel Galvão Tibães¹, Denise Evencio I. Batalha¹, Enzo Ogassawara¹, Gabriel Augusto¹, Jacqueline Doresthan¹ e Melanie B. Rosa¹
christoferdepizzol@ufpr.br, daniel.tibaes@ufpr.br, denise.batalha61@gmail.com, eogassa@gmail.com, gz.9202@gmail.com, jacquelineDoresthan@ufpr.br e melanierosa@ufpr.br

Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora)¹

paulacouto@ufpr.br

Ximena Mujica (Orientadora)¹

xmujica@ufpr.br

¹Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: confecção de jogos; atividades lúdicas; ensino-aprendizagem de matemática.

Resumo:

O projeto MatematicATIVA visa proporcionar aos alunos do ensino fundamental e médio, uma abordagem sobre a matemática que excede o que é visto em sala de aula pelos estudantes. Por meio de jogos interativos e que não exigem um conhecimento técnico em matemática que vá além do que visto em sala de aula, eles são estimulados a solucionar problemas e desafios de forma lógico-criativa. Os encontros com os alunos são feitos em uma exposição itinerante com materiais concretos manipuláveis, realizados nas escolas parceiras.

A equipe do MatematicAtiva em 2025 é composta por sete participantes mais duas orientadoras. Neste ano, os novos integrantes vêm se dedicando ao desenvolvimento de objetos lúdicos e conceituais envolvendo matemática. A finalidade do projeto é pensar sobre esses dispositivos e os desenvolver, desde a criação, confecção, implementação e teste para que possa ser aplicado nas escolas. Com este trabalho, busca-se despertar nos alunos o interesse pela matemática, sem utilizar conceitos diretos desta disciplina.

Em virtude do acervo de jogos e objetos concretos que já pertencia ao projeto Matematicativa como: faixa de Möbius, tangram, polígonos replicantes, torre de hanoi, quebra-cabeças geométricos, xadrez guarani, mágica com nó, dentre outros, a equipe deste ano chegou com novas propostas de atividades para ampliar o repertório como o Toukay, o Número Iris e o Mente Matemática.

O Toukay [2] é uma versão haitiana de um jogo de origem africana também conhecido como Mancala. Utiliza-se um tabuleiro retangular de 12 cavidades (6 em cada lado) e duas cavidades maiores nas extremidades. São colocadas 4 sementes em cada uma das 12 cavidades. O objetivo do jogo é capturar o maior número

possível de sementes. É um jogo cognitivo para dois jogadores. Segundo FONSECA (2018),

“com base em Piaget (1954, 1965a, 1965b, 1973), o desenvolvimento cognitivo corresponde à construção de realidade na qual o conhecimento é adquirido através da ação do sujeito sobre o mundo ou sobre os objetos, processo esse que envolve formas de aprendizagem, primeiro, sensoriais, motores e pré-operacionais, e depois modos de aprendizagem mais estruturadas, ditos operacionais e formais”. (FONSECA, 2005).

As habilidades desenvolvidas são: raciocínio lógico, contagem, sequência, estratégia, planejamento e as principais operações aritméticas básicas.

O Número Íris é um jogo idealizado por um dos integrantes do grupo, Enzo Ogassawara. Ele tem como objetivo pedagógico trabalhar e desenvolver a noção de adição e multiplicação de números, usando números primos e seus respectivos múltiplos. O jogo passou por diversas fases de desenvolvimento como: 1) pré-produção, onde ele foi idealizado e planejado; 2) produção, onde foram confeccionados seus principais itens, tabuleiro, peças e cartas; 3) pós-produção, onde foram feitas as discussões sobre as regras e as correções necessárias para sua inclusão no acervo do MatematicAtiva. Esta foi uma atividade desenvolvida ao longo de várias semanas com a participação de todos os membros do grupo, um verdadeiro desafio.

Entre outros projetos que estão em desenvolvimento, está o Mente Matemática, um jogo de baralho criado pela aluna Melanie Rosa como adaptação do “Tudo a Ver ou Nada a Ver Gospel”. O objetivo é estimular a argumentação, o raciocínio lógico, a criatividade e a tomada de decisão em grupo por meio da associação de objetos matemáticos.

Cada jogador recebe uma carta “Tudo a ver” e outra “Nada a ver”, além de sete cartas do baralho, que constituem em elementos matemáticos ou poderes especiais. Para o início do jogo, é virada uma carta no centro da mesa, enquanto o restante forma a pilha de compras. Na sua vez, o participante deve associar uma de suas cartas à que está no centro; caso não consiga, pode comprar uma carta ou optar pelo blefe. As jogadas podem ser contestadas: quando alguém duvida da associação feita, o jogador precisa justificá-la, e os demais decidem se está correto por meio das cartas “Tudo a Ver” ou “Nada a Ver”. Se a maioria aprovar a jogada, quem duvidou compra uma carta; caso contrário, o jogador retira sua carta da mesa e é a vez do próximo. Vence aquele que conseguir descartar todas as suas cartas primeiro.

O MatematicATIVA demonstra que é possível abordar a matemática de forma criativa e acessível, desenvolvendo habilidades como lógica, estratégia, planejamento e raciocínio crítico. A inclusão de novos jogos e materiais amplia o repertório do projeto e reforça seu papel em despertar o interesse dos estudantes, mostrando a matemática como uma experiência prática e instigante.

O trabalho coletivo de criação, confecção e aplicação dos materiais evidencia o compromisso em aproximar a matemática do cotidiano escolar de maneira lúdica.

Assim, o projeto segue contribuindo para despertar curiosidade e fortalecer o interesse pelo conhecimento.

Referências:

[1] FONSECA, Vitor Da: **Desenvolvimento cognitivo e processo de ensino-aprendizagem: abordagem psicopedagógica à luz de Vygotsky**, Petrópolis, RJ, Ed. Vozes, 2018.

[2] **Deux jeux de société amusants typiquement haïtiens**: Centre Toussaint. Disponível em <https://centretoussaint.com/blog/2-jeux-de-societe-amusants-typiquement-haitiens/>. Acesso em 12 de agosto de 2025.

Divulgando Ciência e Matemática: projeto extensionista em andamento na Mostra de Profissões da UNESPAR

Diogo Augusto Maciel de Paula ^{1*}, Patrícia Vieira Alves²

dddidiogoiee@gmail.com ¹

André Guilherme Buss Lemes(Orientador)

andre.lemes@unespar.edu.br

¹Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Palavras-chave: popularização da Ciência, interdisciplinaridade Matemática-Física, experimentos didáticos.

Resumo:

O projeto de extensão Física em Ação: Popularização da Ciência e Orientação Profissional na Mostra de Profissões da UNESPAR configura-se como uma iniciativa extensionista vinculada à disciplina de Física, inserida no currículo da Licenciatura em Matemática, atendendo à exigência de 10% de carga horária voltada à extensão, conforme as diretrizes curriculares nacionais (ASTOLFI; DEVELAY, 1994; ARAÚJO; CALUZI; CALDEIRA, 2006). Seu principal objetivo é promover a divulgação científica, despertando o interesse de estudantes do Ensino Médio pelas Ciências Exatas, especialmente Física e Matemática, por meio de experimentos interativos apresentados durante a Mostra de Profissões da universidade.

A relevância do projeto reside na interdisciplinaridade entre Matemática e Física, áreas complementares que, quando articuladas, possibilitam uma compreensão mais ampla de fenômenos naturais e sua modelagem matemática (DELIZOICOV; ANGOTTI, 1990; LOPES, 2004). Além disso, a iniciativa oferece aos licenciandos a oportunidade de desenvolver competências pedagógicas, tais como a mediação científica, a comunicação de conceitos complexos de forma acessível e o planejamento de atividades práticas, consolidando a relação entre teoria, prática e investigação científica (CARVALHO et al., 2010; GARCIA et al., 2010).

O projeto baseia-se em princípios da Educação CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade), enfatizando que o conhecimento científico deve ser compreendido e aplicado em contextos cotidianos, contribuindo para a formação de cidadãos críticos, informados e conscientes de seu papel social (DELIZOICOV et al., 2003; BASTOS, 2010). Ao integrar experimentos práticos, como Leis de Newton, Pêndulo de Newton, Plano Inclinado e Lei de Ohm, os licenciandos têm a oportunidade de

1Graduando do curso de Licenciatura em Matemática - UNESPAR, Campus Paranaguá.

2Graduandos do curso de Licenciatura em Matemática - UNESPAR, Campus Paranaguá.

observar a aplicação de conceitos teóricos em situações concretas, fortalecendo o vínculo entre aprendizagem e experiências reais. Esses experimentos permitem discutir temas como força, movimento, energia, eletricidade e mecânica, promovendo reflexão sobre como a ciência influencia o dia a dia e diversas profissões.

A fundamentação teórica do projeto também se apoia em autores que discutem a importância da investigação científica no ensino de Ciências e Matemática. Astolfi et al. (1998) destacam que o aprendizado significativo ocorre quando os estudantes conseguem relacionar conceitos científicos com suas experiências cotidianas, enquanto Delizoicov et al. (2003) reforçam que atividades práticas e experimentais são essenciais para a consolidação do conhecimento científico. Além disso, a literatura sobre extensão universitária evidencia que iniciativas como esta contribuem para a formação crítica, o protagonismo estudantil e a interação universidade-comunidade, favorecendo o desenvolvimento social e cultural (ARAÚJO; CALUZI; CALDEIRA, 2006; CALDEIRA, 2009).

A metodologia do projeto é estruturada em três etapas complementares:

- a) *Planejamento e Formação*: seleção de experimentos didáticos de Física, capacitação dos licenciandos sobre mediação científica, linguagem acessível e técnicas de divulgação, além da organização do Laboratório de Física para receber os visitantes (LOPES, 2004; NARDI; ALMEIDA, 2006).
- b) *Execução durante a Mostra de Profissões*: montagem de estações interativas com experimentos, mediação pelos licenciandos durante visitas guiadas, distribuição de materiais informativos sobre cursos e carreiras em Física e Matemática, promovendo o diálogo entre universidade e comunidade escolar (CARVALHO et al., 2010; GARCIA et al., 2010).
- c) *Avaliação e Socialização*: aplicação de questionários para análise do impacto das atividades, rodas de conversa com licenciandos sobre aprendizagens da extensão, sistematização de resultados e elaboração de relatório final para divulgação em eventos acadêmicos internos e externos (ASTOLFI et al., 2002; DELIZOICOV; ANGOTTI, 1990).

Além do fortalecimento do interesse por Ciências Exatas entre estudantes do Ensino Médio, o projeto visa contribuir para a formação prática dos licenciandos em Matemática, desenvolvendo habilidades como planejamento didático, comunicação científica, interdisciplinaridade e capacidade de mediação pedagógica. Ao mesmo tempo, promove a popularização da ciência, aproximando conceitos teóricos de contextos aplicáveis, e evidencia a importância da Matemática e da Física no cotidiano, seja na tecnologia, nas profissões ou na compreensão de fenômenos naturais.

Dessa forma, o projeto evidencia a relevância da extensão universitária como eixo formativo e como estratégia de integração entre ensino, pesquisa e sociedade. A participação de estudantes da Licenciatura em Matemática, combinada com a apresentação de experimentos interativos no Laboratório de Física, promove não apenas aprendizagem conceitual, mas também o desenvolvimento de competências socioemocionais, colaboração, protagonismo e pensamento crítico (BASTOS, 2010;

NARDI, 2003). Em síntese, trata-se de uma iniciativa que articula formação docente, popularização da ciência e orientação profissional, consolidando a atuação da universidade como agente transformador na comunidade e no currículo de licenciatura.

Referências:

- [1] ARAÚJO, E.S.N.N.; CALUZI, J.J.; CALDEIRA, A.M. de A. (Org.). **Divulgação Científica e Ensino de Ciências:** estudos e experiências. São Paulo: Escrituras, 2006.
- [2] ASTOLFI, J.; DEVELAY, M. **A Didática das Ciências.** São Paulo: Papirus, 1994.
- [3] ASTOLFI, J. P. et al. **Como as crianças aprendem as ciências.** Lisboa: Instituto Jean Piaget – Horizontes Pedagógicos, 1998.
- [4] CARVALHO, A.M.P. et al. **Ensino de Física.** São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- [5] DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J.A. **Metodologia do ensino de ciências.** São Paulo: Cortez, 1990.
- [6] DELIZOICOV, D. et al. **Ensino de Ciências:** Fundamentos e Métodos. São Paulo: Cortez, 2003.
- [7] NARDI, R. **Educação em Ciências:** da pesquisa à prática docente. São Paulo: Escrituras, 2003.
- [8] NARDI, R. (Org.). **Pesquisas em Ensino de Física.** São Paulo: Editora Escrituras, 2001.

Olimpíada Paranaense de Matemática: Atraindo talentos da matemática no Paraná

Eduarda Rodrigues Gomes Veloso¹, Natalia Chicora¹ e Yanko Szuszk Soares¹

oprm@ufpr.br

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)²

eidam@ufpr.br

Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Coorientador)²

wagnermoraes@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Olimpíada de Matemática, Educação, Matemática.

Resumo:

A Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM) é uma olimpíada matemática organizada no âmbito do Departamento de Matemática da UFPR, que visa atrair e identificar jovens talentos da matemática em nosso estado. Desde sua primeira edição em 2016, a OPRM tem funcionado como importante ponto de contato entre a UFPR e os estabelecimentos de ensino do estado do Paraná, que se envolvem de diversas formas na execução do evento.

A olimpíada é separada em níveis de acordo com a escolaridade dos estudantes e tem duas fases: a primeira é composta de uma prova de múltipla escolha com 20 questões e a segunda é composta de uma prova discursiva de 6 questões. As provas da primeira fase são aplicadas pelas escolas participantes e as provas da segunda fase são aplicadas em polos específicos distribuídos ao longo do estado.

Para ter ideia da magnitude do evento, na presente edição, tivemos mais de 20 mil estudantes participando da primeira fase. As equipes de elaboração, aplicação e correção das provas são compostas por docentes e estudantes da UFPR, especialmente por alunos do curso de matemática, fato este que tem mostrado o impacto positivo na formação destes estudantes, proporcionando um contato bastante especial e proveitoso com o universo das competições matemáticas.

Ao final do evento, após a divulgação dos resultados finais, são distribuídas medalhas aos estudantes melhores classificados, em uma cerimônia emocionante, normalmente realizada nas dependências de alguma das escolas ou grupos educacionais parceiros do evento.

Dentre os parceiros mais importantes, destacamos o SINEPE – Sindicato das Escolas Particulares do Paraná e a OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática. Ambos são apoios fundamentais para a execução do evento, sem os quais, não

1Bolsista da OPRM 2025

seria possível obter o alcance e impacto que já consolidaram a OPRM ao longo de seus quase 10 anos de existência.

A OPRM também se fortalece por meio de uma parceria com o POTI/TOPMAT, o Programa de Formação em Matemática Olímpica da UFPR. Essa colaboração aproxima a universidade das escolas, criando uma troca de experiências que melhora o ensino da Matemática no Paraná. Na prática, o POTI/TOPMAT funciona como um grande centro de treinamento, preparando e dando suporte intensivo aos alunos para que eles cheguem afiados em competições como a OPRM.

Em síntese, a OPRM representa o compromisso da UFPR com a educação, beneficiando tanto os alunos das escolas quanto os da própria universidade. Para os estudantes de graduação envolvidos no projeto, essa é uma oportunidade única de vivenciar a docência na prática, criar problemas, corrigir provas e trabalhar em equipe, o que contribui para sua formação como futuros professores e matemáticos. Ao mesmo tempo, para os alunos das escolas, é uma chance de ir além da sala de aula, de enfrentar desafios e descobrir um talento para a matemática.

Referências:

[1] Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM). Edições Anteriores. Curitiba, 2025. Disponível em: <https://oprm.ufpr.br/edicoes-antteriores/>. Acesso em: 20 ago. 2025.

[2] Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM). Informações. Curitiba, 2025. Disponível em: <https://oprm.ufpr.br/informacoes/>. Acesso em: 20 ago. 2025.

POTI/TOPMAT: Formando Talentos e Reinventando o Ensino de Matemática no Contexto Olímpico

Camila Rios¹, Camilly Silva dos Anjos¹, Luis Filipe Nazaret Lopes¹ e Luís Gustavo Nadalin¹
poti@ufpr.br

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)²
eidam@ufpr.br

Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Coorientador)²
wagnermoraes@ufpr.br

^{1,2}Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: Desafios de Ensino, Estratégias Inovadoras, Premiações, Engajamento Estudantil.

Resumo:

O Programa Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI), uma iniciativa nacional do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), foi implementado na Universidade Federal do Paraná (UFPR) como TOPMAT desde 2016. Seu objetivo principal é descobrir e preparar jovens talentos do Ensino Fundamental e Médio para olimpíadas de Matemática de prestígio, como a OBMEP, OBM e OPRM. O programa preenche uma lacuna crucial no ensino regular ao explorar conceitos complexos e elegantes, pouco abordados no currículo escolar, que são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico-abstrato. Anualmente, mais de 250 estudantes são selecionados por meio de uma prova de alta concorrência para participar das aulas, que são ministradas por discentes da própria UFPR. Essa dinâmica cria um ambiente de mentoria próximo, onde os instrutores, também jovens, compreendem os desafios dos alunos e servem como inspiração. As aulas cobrem áreas como Álgebra, Aritmética, Combinatória, Geometria e Teoria de Números, utilizando um material didático próprio, desenvolvido para o nível de excelência exigido pelas competições.

Diante do desafio de engajar estudantes com grande aptidão e combater a percepção da matemática como uma disciplina puramente abstrata e desinteressante, o POTI/TOPMAT adota uma metodologia ativa e participativa. O foco reside na resolução de problemas de caráter aberto e interpretativo, que exigem não apenas conhecimento técnico, mas também criatividade. Alinhado a essa busca por práticas inovadoras, o programa intensificou em 2025 a aplicação de dinâmicas envolventes, especialmente em Geometria. Um exemplo concreto foi a implementação de atividades como a construção de um "Creeper", personagem do

1Bolsista do POTI/TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica.

jogo Minecraft, utilizando jujubas (vértices) e palitos (arestas), e a edificação de diversos sólidos geométricos com massinha e palitos. Tais propostas, fundamentadas na importância de tornar o aprendizado mais concreto e tátil, buscaram estimular o pensamento abstrato, permitindo que os alunos visualizassem e manipulassem estruturas tridimensionais, compreendendo intuitivamente conceitos como a relação de Euler para poliedros em um ambiente colaborativo e de descoberta.

Os resultados preliminares dessas atividades indicam um aumento perceptível no interesse dos estudantes pela Matemática enquanto ciência viva e pelas olimpíadas. Esse engajamento se manifesta em discussões mais aprofundadas, na busca por problemas extras e na formação espontânea de grupos de estudo. Além disso, a metodologia fortalece os laços de confiança entre professores e alunos, contribuindo para um ambiente de aprendizado mais rico, diversificado e com baixa ansiedade, onde errar é visto como parte essencial do processo de descoberta.

O sucesso geral dessa abordagem se reflete diretamente nos resultados expressivos alcançados pelos alunos nas competições nacionais e regionais. A trajetória de sucesso do programa é evidenciada pela evolução do quadro de premiações: em seu ano inicial, 2016, o programa conquistou 2 medalhas no Nível 1 e 10 no Nível 2, sem medalhas no Nível 3. Em um contraste notável, o ano de 2024 registrou um total de 31 medalhas para o Nível 1, 63 para o Nível 2 e 46 para o Nível 3. O número de menções honrosas também cresceu substancialmente, passando de um total de 2 em 2016 para 55 em 2024, somando os três níveis. Esse crescimento exponencial não é um acaso, mas sim o reflexo da maturação do programa e da eficácia de suas constantes adaptações pedagógicas.

Em resumo, o POTI/TOPMAT é um programa de grande relevância para o ensino da Matemática no Brasil, atuando como um celeiro de talentos. Suas estratégias dinâmicas e metodologia ativa não só fomentam o engajamento e desenvolvem habilidades avançadas, mas também se traduzem em um sucesso notável nas olimpíadas. Com ajustes contínuos para superar os desafios identificados, o programa tem um imenso potencial para não apenas continuar a lapidar medalhistas, mas para formar uma nova geração de pensadores críticos, cientistas e líderes na área de tecnologia e inovação.

Referências:

[1] SÁ, L. C.; SILVA, S. A. F. da; ESQUINCALHA, A. da C. **Roteiro para escrita de relatos de experiência em educação matemática**. Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2020.

[2] SOARES, Carolina de Souza et al. POTI/TOPMAT: estratégias dinâmicas para engajar estudantes e garantir sucesso nas olimpíadas de Matemática. *In: JORNADA DE MATEMÁTICA, MATEMÁTICA APLICADA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 7., 2023, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2023. p. 184.

[3] POTI UFPR. Polo Olímpico de Treinamento Intensivo UFPR. Disponível em: <<https://poti.ufpr.br/>>. Acesso em 26 de agosto de 2025.

Promovendo a Extensão Universitária por intermédio de Seminários Educacionais: Ação Extensionista desenvolvida na Pós-Graduação para a comunidade acadêmica e sociedade

Wanderson dos Santos Rodrigues¹

wandersonrodrigues@alunos.utfpr.edu.br

Dra. Tamara Simone van Kaick (orientadora)²

tamara@utfpr.edu.br

^{1,2}Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Curitiba

Palavras-Chave: Aprendizagem, Ensino, Formação Continuada.

Resumo:

A extensão universitária assume um papel estratégico importante no ensino superior ao articular o conhecimento científico produzido nos espaços acadêmicos com as demandas sociais. Esse movimento de aproximação possibilita o compartilhamento de saberes e a construção coletiva do conhecimento, reforçando a responsabilidade social da universidade e ampliando as oportunidades formativas de docentes e discentes. Nesse sentido, em 2024, o Projeto de Formação Inicial, Continuada e Tecnológica de Professores de Ciências e Matemática (ForTeCiM), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Curitiba, promoveu ações de extensão por meio da realização de seminários educacionais voltados à comunidade acadêmica e à sociedade em geral.

A iniciativa dos seminários educacionais presentes em 2024, conduzida no âmbito da pós-graduação, teve como finalidade difundir os temas investigados pelos pesquisadores do programa e compartilhá-los com diferentes públicos e em encontros presenciais e virtuais. O planejamento e a execução das ações de extensão contou com a colaboração de uma Equipe Executora formada por estudantes de graduação (voluntários e bolsistas), mestrandos, doutorandos e docentes, que participaram de etapas de elaboração, organização e desenvolvimento das propostas. O processo interno da equipe incluiu a produção de materiais de apoio envolvendo relatórios, planilhas, registros, comunicação

¹ Graduando em Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Curitiba. Voluntário do Projeto de Extensão Formação Inicial, Continuada e Tecnológica de Professores de Ciências e Matemática (ForTeCiM).

² Doutora em Meio Ambiente. Docente do Departamento Acadêmico de Química e Biologia. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Curitiba. Coordenadora do Projeto de Extensão Formação Inicial, Continuada e Tecnológica de Professores de Ciências e Matemática (ForTeCiM).

institucional, participação nas ações de forma presencial e *online*. A divulgação das ações ocorreu por meio de plataformas digitais, redes sociais e materiais impressos, ampliando a visibilidade do projeto.

Entre as práticas gerenciadas pela Equipe Executora, além dos seminários educacionais, destacam-se a organização de grupos de estudos e pesquisa, acompanhamento de ciclos de encontros, realização de palestras, apresentação de seminários vinculados ao mestrado e doutorado, oficinas temáticas, *workshops*, cursos de formação e outras iniciativas de caráter extensionista. Essas ações são estruturadas a partir da identificação de tópicos da equipe e das demandas relacionados à comunidade e sociedade, considerando diagnósticos realizados em reuniões periódicas e grupos focais. Nessa situação, os conteúdos discutidos nas ações de extensão do ForTeCiM buscam responder necessidades reais e fortalecer o vínculo entre universidade e sociedade de maneira a também contribuir com o processo de formação inicial e continuada envolvendo o campo educacional e profissional.

Os seminários educacionais realizados em 2024 contemplaram uma variedade de temas, como a presença feminina no ensino superior, metodologias para o ensino da Matemática, identidade docente na atualidade, fundamentos teóricos da educação, práticas voltadas para as pesquisas, reflexões sobre a Educação de Jovens e Adultos e a socialização de grupos de pesquisa vinculados ao PPGFCET. Essa diversidade temática atraiu públicos distintos, especialmente docentes atuantes no Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior, junto a estudantes da graduação ligados às áreas de Ciências Exatas e Ciências Biológicas. No período de 2024, foram realizados sete encontros envolvendo os seminários educacionais em formato presencial na UTFPR e *online* via Google Meet e YouTube com uma duração média de três horas, atingindo um público total superior a 200 participantes.

As reuniões quinzenais da Equipe Executora evidenciaram aspectos positivos dos seminários educacionais, apontando que eles se configuraram como eventos pontuais que visam compartilhar experiências, saberes e conhecimentos capazes de impactar na formação inicial e continuada dos participantes. Conforme [2, 2016], a extensão universitária, quando planejada de forma colaborativa, potencializa o desenvolvimento profissional dos docentes em exercício e a formação crítica dos futuros docentes, reafirmando seu papel estratégico na integração entre a universidade e a sociedade. Observou-se que a realização dos seminários educacionais contribuiu para ampliar os espaços de diálogo entre diferentes áreas do conhecimento, favorecendo a construção de redes de colaboração e o fortalecimento de práticas e ações pedagógicas vinculadas ao ensino e a aprendizagem de Ciência e Matemática.

Os encontros assumiram um caráter formativo, de maneira a contemplar o compartilhamento de experiências e a possibilidade de refletir sobre os desafios e as potencialidades do ensino, da pesquisa e da extensão na Educação Superior. Os resultados evidenciam que o ForTeCiM auxiliou e fortaleceu a integração entre graduação, pós-graduação e comunidade externa, sobretudo no que se refere ao

processo formativo de docentes em diferentes etapas da carreira. A ação de extensão ampliou o acesso à formação inicial e continuada, ao mesmo tempo em que promoveu o diálogo entre universidade e sociedade. De acordo com [3, 2023], a prática da extensão, ao estimular a reflexão e o compartilhamento de experiências, amplia horizontes de aprendizagem e reafirma o compromisso social dos espaços universitários na transformação da realidade educacional.

A experiência com a organização de ações extensionistas confirma que a extensão universitária, ao fomentar espaços de diálogo, de debate e de socialização de saberes, cumpre sua função social de democratizar o conhecimento acadêmico e colocá-lo a serviço da sociedade [1, 2021]. O engajamento do público, a diversidade dos temas tratados no período de 2024 e a qualidade das discussões demonstram que as ações do ForTeCiM contribuíram de forma ampla para a valorização da educação e para o fortalecimento da formação inicial e continuada. Espera-se que a prática de planejamento, organização e desenvolvimento de seminários educacionais ou outros tópicos relacionados ao campo da extensão inspire novas iniciativas no campo educativo e formativo, consolidando um movimento contínuo de cooperação, reflexão e construção conjunta e colaborativa de saberes e conhecimentos.

Referências Bibliográficas

- [1] DINIZ, Leopoldina Francimar Amorim Coelho; SOUSA, Geida Maria Cavalcanti; SOUZA, Dennis Marinho Oliveira Ramalho. As Instituições de Ensino Superior e seus interlocutores quanto à percepção nas ações extensionistas. **Revista de Educação Popular**, Uberlândia, v. 20, n. 1, p. 140-159, 2021. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/reveducpop/article/view/54250>. Acesso em: 30 ago. 2024.
- [2] LUBECK, Kelly Roberta Mazzutti; SOUZA, José Ricardo; BEZERRA, Renata Camacho. A importância dos projetos de extensão na formação do professor de Matemática. **Revista do Centro de Educação, Letras e Saúde**, Foz do Iguaçu, v. 17, n. 2, p. 28-44, 2016. Disponível em: <https://saber.unioeste.br/index.php/ideacao/article/view/10809>. Acesso em: 30 ago. 2024.
- [3] SANTOS, Maria José Costa; PRATA, Glessiane Coeli Freitas Batista; ANDRADE, Wendel Melo (org.). **Ações extensionistas como espaço de formação docente: teoria e prática pedagógica**. Sobral: Editora dos Autores, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/74393/1/2023_liv_mjcsantos.pdf. Acesso em: 01 set. 2025.

Semana da Matemática 2025

Ana Carla de Carvalho Honório¹, Andressa Balestrin Dasenbrock¹, Augusto Henrique da Costa², Daniel Thiago Ivanchen², Elissandro Antonio Sikora¹, Felipe Monteiro Kiotheka¹, Isabele Andrade Vichinieski¹, Laura Carolina Aymoré Ferrandin¹, Leonardo Cortez do Nascimento¹, Lucas Xavier¹, Pedro Dell'Agnolo Busarello¹, Pedro Henrique Andrade¹ e Tiago Filipe Pires Galu¹

petmatematica@ufpr.br^{1,2}

Cleber de Medeira³ (Orientador)

*clebermedeira@ufpr.br*³

^{1, 2, 3} Universidade Federal do Paraná

Palavras-chave: Semana Acadêmica; Divulgação Científica; Formação Acadêmica.

Resumo:

O Programa de Educação Tutorial (PET) tem como princípio filosófico oportunizar aos estudantes participantes a ampliação de sua formação acadêmica ao mesmo passo que visa criar um ambiente de desenvolvimento científico e educacional para os demais alunos do curso. Desse modo, nesse âmbito de criação de atividades que fomentam a preparação dos discentes de todo o curso, o PET organiza anualmente, no início do período letivo, a Semana de Matemática.

Dessa forma, o presente resumo relata a organização de tal projeto em sua edição de 2025, buscando indicar seu caráter de formação acadêmica, servindo para o primeiro contato dos calouros com a estrutura universitária, bem como uma possibilidade de análise de trajetórias para os veteranos, possuindo assim, um aspecto tanto de política de incentivo à permanência, tendo em vista a ideia de (re)apresentar o curso aos graduandos como também de iniciação dos alunos ingressantes no espaço acadêmico da UFPR.

Ademais, um diferencial da edição deste ano foi a experiência de organização conjunta com o Centro Acadêmico de Matemática (CAM) e a Coordenação do Curso de Matemática (CMAT). Tal associação criou um senso de continuidade no evento de 2025, evitando, assim, a ideia de que tais organizações acadêmicas atuam de forma isolada.

Assim, conforme ilustrado no quadro 1, o PET ficou responsável pela organização de dois dias inteiros do evento.

Quadro 1: Cronograma da SMAT 2025

Horário	DIA 1 - 11 / 03	DIA 2 - 12 / 03
---------	-----------------	-----------------

¹ Bolsista do PET-Matemática UFPR.

² Voluntário do PET-Matemática UFPR.

³ Professor do Departamento de Matemática UFPR.

13:30	Fernando - Palestra: (tema definido pelo palestrante)	Trovon - Palestra: (tema definido pelo palestrante)
14:30	Emerson, Eugênia e Evelin - MR: Áreas de atuação Matemática	Gabi, Thais e Thiago - MRA: Experiências Acadêmicas
15:40	Coffee Break	Coffee Break
16:00	Bisoni - Minicurso 1: Introdução ao Latex	Bisoni - Minicurso 1: Introdução ao Latex
19:00	Elis, Gabriel e Kirilov - MR: Áreas de atuação matemática	Elissandro, Isabele e Natalia - MRA: Experiências Acadêmicas
20:00	Roberto - Minicurso 2 - Aprendendo a Viver a Universidade	Roberto - Minicurso 2 - Aprendendo a Viver a Universidade

Fonte: os autores.

As palestras tinham caráter de divulgação científica, visando mostrar aos graduandos as possíveis áreas de atuação para um matemático, ideia essa que se seguiu com as mesas-redondas de docentes, em que cada um abordava diferentes aspectos de sua área de pesquisa e de sua formação, tanto no espaço da licenciatura como do bacharelado. Já os minicursos, ambos com certificados aos alunos, tratavam de iniciar os estudantes a um tema que será central na sua trajetória acadêmica, seja técnico, como o LaTeX, ou comportamental, como meios de viver a Universidade.

Já no que tange a organização do evento, houve a separação do grupo PET em equipes, ilustrada pelo quadro 2, visando a distribuição homogênea de tarefas, evitando, portanto, a sobrecarga dos membros. O primeiro dia foi realizado no Auditório de Farmacologia, localizado no Setor de Ciências Biológicas da UFPR. Já no segundo dia, as atividades ocorreram no Anfiteatro A, no Bloco PC, do Setor de Exatas da UFPR.

As atividades de organização desenvolvidas pelo grupo PET são as seguintes:

- Credenciamento: corresponde ao momento inicial do evento, com confirmação de participação dos inscritos, entrega de identificação na forma de crachá e distribuição de materiais de marketing do evento, como bloco de notas e marca páginas;
- Fotografia: dois alunos do PET cuidaram do registro do evento, visando tanto a criação de memórias para o arquivo do grupo como também a divulgação;
- Organização de formulários: refere-se à criação e gestão dos formulários de inscrição e certificação do evento;
- Mediação de mesa-redonda: alunos responsáveis por mediar o fluxo da conversa das mesas-redondas, introduzindo perguntas aos participantes e assim, propiciando a coesão e fluidez da atividade;

- Assistência de sala: tal atividade visava o apoio técnico e logístico nos ambientes em que ocorria o evento, como o auxílio na estruturação das salas, gestão de tempo e resolução de imprevistos;
- Coffee break: trata-se do momento de intervalo entre as atividades do dia, em que há disponibilização de comidas e bebidas para os participantes.

Quadro 2: Divisão de grupos para atuação no evento

Função	Hor a	DIA 1 - 11 / 03 (Aud. Farmacologia)	DIA 2 - 12 / 03 (Anfi A)
Credenciamento		Elissandro, Leo, Laura e Tiago(noite)	
Fotografia		Isabele e Felipe	
Formulários		Andressa, Otávio e Pedro B.	
Assistência de Sala	13:30	Elissandro e Augusto (palestra do Fernando)	Elissandro e Otávio (palestra do Trovon)
Mediador	14:30	Elissandro e Pedro A. (MR 1)	Lucas e Otávio (MRA 1)
Coffee Break	15:40	Daniel, Ana Carla, Tiago e Pedro B.	
Assistência de Sala	16:00	Lucas e Pedro A. (minicurso do Bisoni - LAMADE)	
Mediador	19:00	Augusto e Andressa (MR 2)	Augusto e Andressa (MRA 2)
Assistência de Sala	20:00	Augusto e Pedro A. (minicurso do Roberto)	

Fonte: os autores.

Além disso, na Semana de Matemática de 2025 foi criada a mesa-redonda de alunos, com participação também dos graduandos do curso, buscando aproximar os calouros e demais ouvintes com experiências mais próximas do que as citadas pelos professores. Desse modo, foram convidados alunos tanto do bacharelado como da licenciatura, em diferentes graus de sua trajetória acadêmica, incluindo egressos, ex-integrantes do PET, membros do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI).

Por fim, para dar continuidade ao sucesso da atividade e, assim, permanecer divulgando toda a estrutura do curso de matemática da UFPR, a organização da Semana de Matemática 2026 já se iniciou, estando no estágio de elaboração de atividades e sondagem de participantes para palestras, mesas-redondas e minicursos, além de busca pela reserva de espaços físicos para o evento.

Referências:

- [1] PET Matemática UFPR. Disponível em: <https://petmatematica.ufpr.br/>. Acesso em: 22 set. 2025.