UFPR – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET – PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Alexandre Kirilov
Editoração:	Bruno de Lessa Victor Bruno Suzuki Carolina de Almeida Santos Pinotti Diogo Ubaldino Érika Sathie Takatsuki Iésus Sousa Freire Jean Carlo Baena Vicente Larissa Kovalski Lucas Lamy Matheus Augusto Bannack Diniz Nilmara de Jesus Biscaia Pinto Thamara Petroli Wagner Augusto Almeida de Moraes
Site:	petmatufpr.wordpress.com facebook.com/petmatematicaufpr
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Curso:	12 e 13 de Julho de 2013
Horários:	das 8h30 às 12h00 (turma da manhã) das 13h30 às 17h00 (turma da tarde)
Local de Realização:	PC - Bloco de Exatas, Centro Politécnico - UFPR

Curitiba, 2013.

Capítulo 1

Geometria Euclidiana

A geometria de Euclides é a geometria mais antiga da história da humanidade. Ela começou a ser estudada por volta de 3.000 a.c, no Egito Antigo. Na época, tais estudos começaram a ser importantes para que fossem medidas áreas de terreno para cultivo. Apesar disso, a maior parte do conhecimento desenvolvido nesta área da matemática surgiu na Grécia Antiga.

Boa parte dos maiores filósofos gregos tiveram grandes contribuições no estudo da geometria. Para citar apenas alguns, temos Pitágoras, Hipócrates, Tales de Mileto, Apolônio, Hiparco, Arquimedes, Heron de Alexandria e Eudóxio. Mas o geômetra mais importante da história é sem dúvida Euclides. Ele não só produziu conhecimento, como também o reuniu em uma das obras mais importantes da história da matemática: "Os elementos".

1.1 Entes Geométricos

Entes geométricos são entidades da geometria que não possuem definição. Isto é, sabemos de forma intuitiva o que eles significam, mas matematicamente não existe uma forma de definí-los. Seus representantes são: o ponto, a reta e o plano.

O ponto é um ente adimensional, ou seja, não possui comprimento, largura ou altura. A reta possui apenas uma dimensão (comprimento) e é composta por infinitos pontos. Já o plano é composto por infinitas retas e possui duas dimensões (comprimento e largura). Por fim, definimos espaço como o ambiente onde se encontram infinitos planos.

1.2 Axiomas

Um axioma (ou postulado) é uma sentença matemática que devemos assumir como verdadeiras. Eles são a base da matemática, pois através dos axiomas é que se obtém as verdades matemáticas. A geometria não é diferente, e possui postulados. Vejamos alguns deles:

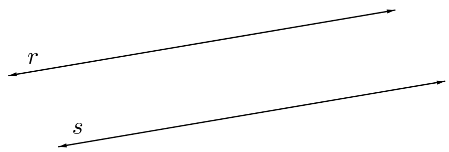
1. A reta é ilimitada em ambos os sentidos.
2. Dados dois pontos, existe uma única reta que passa por ambos.
3. Por um ponto passam infinitas retas.
4. Dado um ponto P e uma reta r que não passa por este ponto, existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r.
5. Toda reta que passar por dois pontos pertencentes a um mesmo plano, também pertence a tal plano.

6. Dados três pontos A,B e C não-colineares (isto é, não existe uma reta que os contenha), existe apenas um plano π tal que A,B e C pertençam a π.

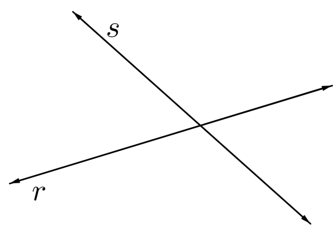
1.3 Posições relativas entre retas e planos

- Dadas duas retas r e s, elas podem ser:

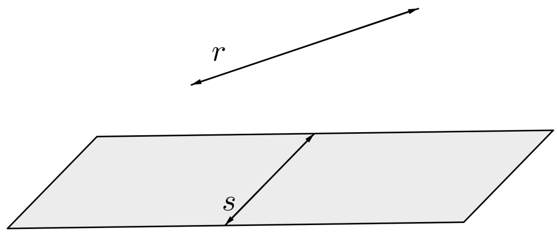
  1. Paralelas: r e s são coplanares (pertencem a um mesmo plano), mas possuem intersecção vazia.



  2. Concorrentes: r e s são coplanares e se intersectam em um ponto.

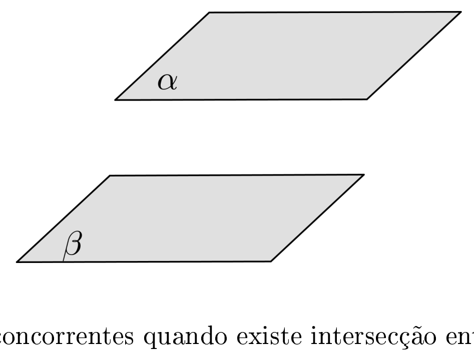


  3. Reversas: r e s não pertencem a um mesmo plano.

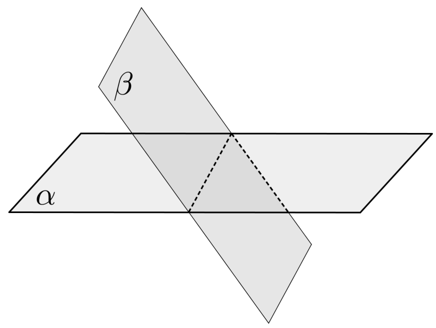


- Para dois planos α e β, temos as seguintes posições relativas:

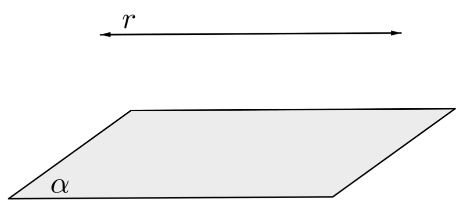
  1. Paralelos: α e β são paralelos se não possuem intersecção.



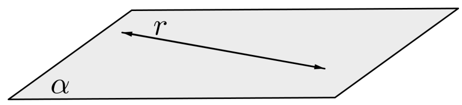
  2. Concorrentes: α e β são concorrentes quando existe intersecção entre eles, sendo esta sempre uma reta.



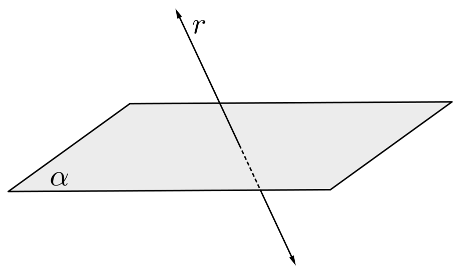
- Quando temos uma reta r e um plano α, existem as seguintes relações relativas:
  1. Paralelos: A intersecção entre r e α é vazia.

  2. Contida: A reta r está inteiramente contida em α.

  3. Secante: r e α se interceptam em exatamente um ponto.

Capítulo 2

Polígonos

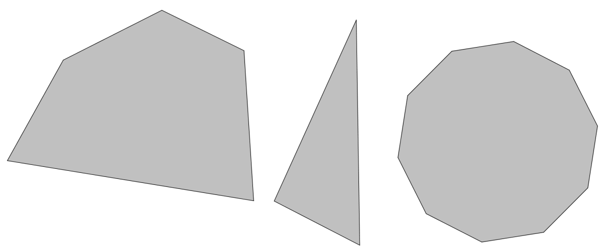
Definição 1. Um *polígono* é uma região do plano delimitada por um número finito de segmentos de reta de tal forma que:

- A interseção de cada par de segmentos é vazia ou é uma das extremidades dos segmentos.
- Para cada par de pontos no interior da região, existe um caminho no interior na região que liga os dois pontos.

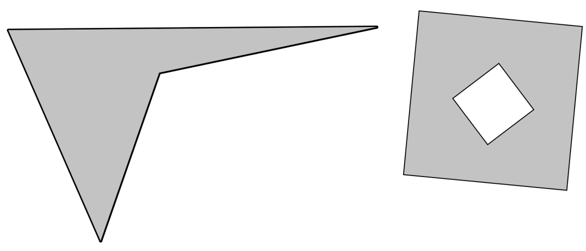
Os segmentos são chamados de *lados* do polígono e as extremidades dos segmentos de *vértices* do polígono.

Definição 2. Um polígono é chadado de *convexo* se para cada par de pontos no interior do polígono, o segmento de reta que os une está no interior do polígono.

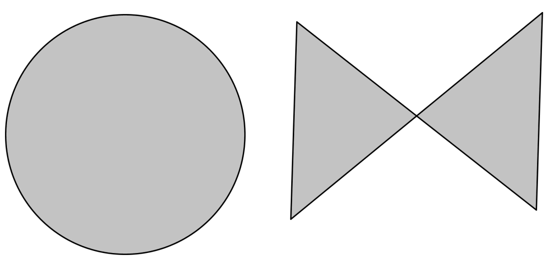
Exemplo 1. São polígonos convexos:



Exemplo 2. São polígonos não-convexos:



Exemplo 3. Não são polígonos:



Capítulo 3

Poliedros

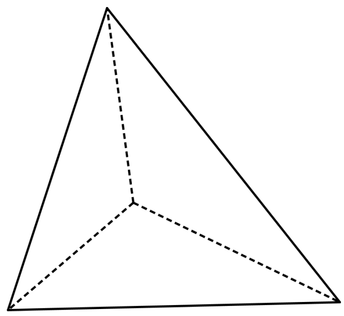
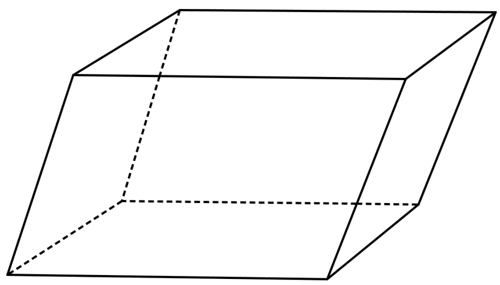
Definição 3. *Poliedro* é a reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* em que:

- Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

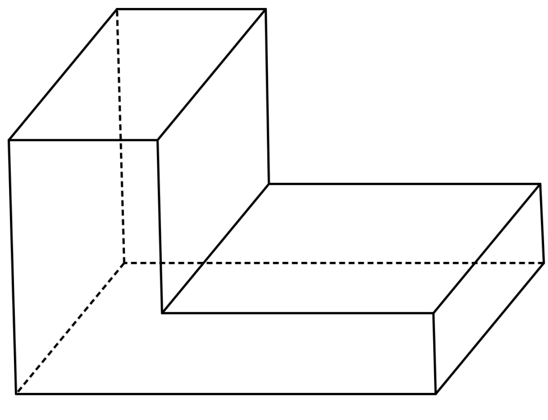
  Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado de uma aresta do polígono e cada vértice de uma face é um vértice do polígono.
- É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Todo poliedro, como definido acima, limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo.

Exemplo 4. São poliedros convexos:

Exemplo 5. É um poliedro não-convexo:



Definição 4. Um poliedro convexo é regular se suas faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Teorema 1. *(Teorema de Euler) Em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces vale a relação*

$$V - A + F = 2$$

Teorema 2. *Existem apenas 5 poliedros convexos regulares.*

Demonstração: Seja n o número de lados de cada face e seja p número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos, então, $2A = nF = pV$, ou

$$A = \frac{nf}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}.$$

Substituindo na relação de Euler, obtemos

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.$$

Devemos ter $2p + 2n - pn > 0$, ou seja,

$$\frac{2n}{n-2} > p.$$

Como $p \geq 3$, chegamos a $n < 6$. As possibilidades são, então, as seguintes:

$$n = 3 \longrightarrow F = \frac{4p}{6-p} \longrightarrow \begin{cases} p = 3 \longrightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ p = 4 \longrightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \longrightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases}$$

$$n = 4 \longrightarrow F = \frac{2p}{4-p} \longrightarrow p = 3 \longrightarrow F = 6 \text{ (cubo)}$$

$$n = 5 \longrightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \longrightarrow p = 3 \longrightarrow F = 12 \text{ (dodecaedro)}$$

Capítulo 4

Relação de Euler

Conhecemos a chamada relação de Euler

$$V + F = A + 2$$

na qual, V é o número de vértice, F o número de faces e A o número de arestas do poliedro.
Mas essa relação sempre é válida?

Essa relação foi descoberta e demonstrada pelo matemático suíço Leonhard Euler por isso recebe esse nome.

Exemplo 6. Quantas arestas e quantos vértices tem um poliedro convexo de 20 faces, todas triangulares?
Determinemos o número A de arestas.
Nas 20 faces triangulares temos $20 \cdot 3 = 60$ arestas. Nesse cálculo, cada aresta, por ser comum a duas faces, foi contada duas vezes, ou seja:

$$A = \frac{20 \cdot 3}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Temos $F = 20$ e $A = 30$.
Da relação de Euler, $V + F = A + 2$, vem:

$$V + 20 = 30 + 2 \Rightarrow V = 12$$

Exercício 1. (Uniube - MG) Um poliedro convexo é formado por 6 faces quadrangulares e 8 triangulares. O número de vertíces desse poliedro é:

(a) 8

(b) 10

(c) 12

(d) 16

(e) 24

Exercício 2. (UFPel - RS) Quando João entrou na sala do professor fez uma observação sobre a beleza do objeto de vidro que estava sobre os papéis do mestre. Este, não resistindo à tentação de propor um problema, característica do matemático, apresentou ao aluno a seguinte questão:
Calcule o número de arestas e vértices deste peso de papel, que é um poliedro convexo de seis faces quadrangulares e duas hexagonais.

Exercício 3. (Cesgranrio) Um poliedro convexo é formado por quatro faces triangulares, duas faces quadradas e uma face hexagonal. O número de vértices desse poliedro é:

(a) 6

(b) 7

(c) 8

(d) 9

(e) 10

Exercício 4. (Mack - SP) Um poliedro convexo tem 15 faces e de dois de seus vértices partem cinco arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. Calcular o número de arestas do poliedro.

Exercício 5. (Mack - SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais.

Exercício 6. (UF - AM) O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Então o número de faces do poliedro é:

(a) 6

(b) 8

(c) 10

(d) 11

(e) 12

Exercício 7. Uma bola de futebol foi feita a partir de um poliedro convexo composto de 32 faces regulares: 12 pentagonais e 20 hexagonais. Determine o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

Exercício 8. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo sabendo que o número de arestas excede o número de faces de 8 unidades.

Exercício 9. Sabe-se que de cada um dos 16 vértices de um poliedro convexo saem 3 arestas. Determine os números de arestas e faces desse poliedro.

Exercício 10. Determine o número de vértices de um dodecaedro regular, sabendo que suas faces são pentagonais.

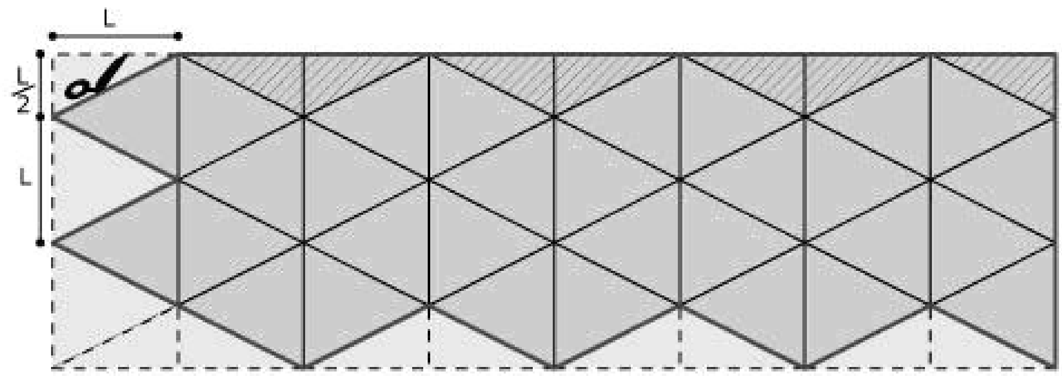
4.1 Caleidociclos.

A palavra Caleidociclo tem origem grega: kalós [belo] + eîdos [forma] + kyklos [ciclos] e o termo Caleidociclo apareceu pela primeira vez no livro de Scahttschneider y Wallace (1977). Em sua essência, um Caleidociclo ou anel rotativo de tetraedros isósceles, é um divertido origami, formado por uma cadeia fechada de pirâmides giratórias (o anel gira até voltar ao ponto de origem). Ao girar os Caleidociclos de dentro para fora ou de fora para dentro, apresentam-se ciclos de figuras diferentes. Existem Caleidociclos de diferentes tipos: quadrados, hexagonais e contorcidos.

Para montar um caleidocilo siga os seguintes passos:

Você vai precisar: régua, tesoura, lápis, borracha, cola e cartolina (ou qualquer papel um pouco mais grosso que o comum).

Primeiro desenhe um dos moldes a seguir na cartolina (L é o valor do lado que você vai escolher, por praticidade tome um valor de L maior ou igual que 4cm).



Recorte segundo a linha de traço forte.

Nas linhas de traço fino você fará dobraduras. Dobre sempre uma para dentro e uma para fora. Um detalhe prático: antes de dobrar convém vincar a cartolina.

Após as dobraduras, a parte hachurada do desenho receberá cola, ficando, por isso, dentro do caleidociclo.

Agora forme um elo, articulando o primeiro tetraedro com o último.

Espere a cola secar e o seu Caleidociclo está pronto.

Referências Bibliográficas

[1] CARVALHO, Paulo. C. P. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto C. de O. **A Matemática no Ensino Médio - Volume 2**. 6^a edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] *Caleidociclo*, <http://es.wikipedia.org/wiki/Caleidociclo> (Acesso em: 10/07/2013)

[3] *Matemática e Tecnologia*, <http://amatematicaeatecnologia.blogspot.com.br/2009/12/o-que-e-um-caleidociclo.html> (Acesso em: 10/07/2013)

[4] http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital1/experimentos/caleidociclos / imags (Acesso em: 10/07/2013)

[5] *Posições relativas* <http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/posicoes-relativas-1.htm> (Acesso em: 10/07/2013)

[6] *Conheça a história da evolução da geometria e de seus estudiosos* <http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/conheca- historia-da-evolucao-da-geometria-e-de-seus-estudiosos.html> (Acesso em: 10/07/2013)

[7] *A história da geometria euclidiana do antigo Egito às salas de aula* <http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/historia-da- geometria-euclidiana-do-antigo-egito-salas-de-aula.html> (Acesso em: 10/07/2013)

[8] *Geometria espacial* <www.mat.ufmg.br/ anacris/ConsultaP1.doc> (Acesso em: 10/07/2013)

[9] *Entidades geométricas* <http://pt.scribd.com/doc/50778185/Introducao-a-Geometria-Espacial> (Acesso em: 10/07/2013)